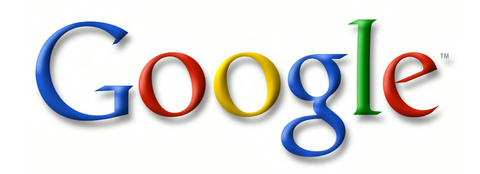
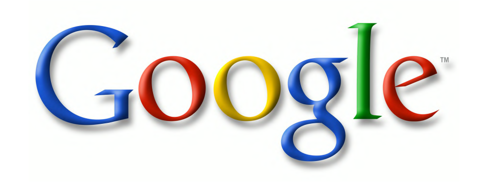
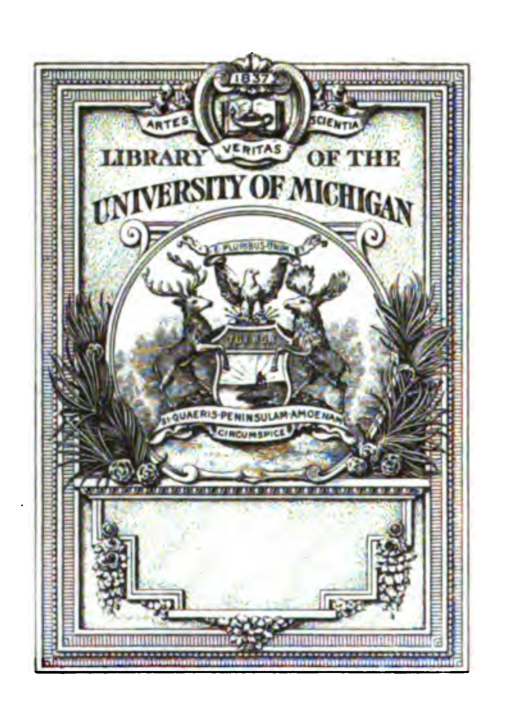





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
Élémentaires et Spéciales

A L'USAGE
DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction
DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix
Ex-directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Avec la collaboration
DE MM.
AUG. MOREL, COCHEZ ET BOQUEL
Professeurs de Mathématiques

TOME QUATRIÈME



ANNÉE 1880

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1880

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

Élémentaires et Spéciales

NOMBRES RELATIFS DES POLYGONES RÉGULIERS

DE n ET DE $2n$ CÔTÉS, SUIVANT QUE n EST UN NOMBRE IMPAIR OU UN NOMBRE PAIR. POLYGONES RÉGULIERS CORRESPONDANTS. POLYGONES RÉGULIERS CONJUGUÉS.

Par Georges **Dostor**.

---

1. **Théorème I.** — *Lorsque* n *est un nombre impair, il existe autant de polygones de* 2n *côtés, dont l'un est convexe et les autres étoilés qu'il y a de polygones de* n *côtés.*

Soit p un nombre entier, inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone étoilé de n côtés et de l'espèce p.

Puisque p est inférieur à la moitié de n, $2p$ sera moindre que n; par suite $n - 2p$ sera aussi un nombre entier positif, plus petit que n ou que la moitié de $2n$.

Or je dis que $n - 2p$ est aussi premier avec $2n$.

En effet, n étant impair, $n - 2p$ sera aussi impair. Il s'ensuit que tout facteur entier commun à $n - 2p$ et $2n$ ne saurait être qu'un nombre impair, qui diviserait n. Ce facteur impair, divisant $n - 2p$ et n, diviserait leur différence $2p$ et par suite p. Donc p et n ne seraient pas premiers entre eux.

Ainsi à chaque nombre entier p, inférieur à la moitié de n et premier avec n, correspond un nombre entier $n - 2p$ inférieur à la moitié de $2n$ et premier avec $2n$.

Réciproquement à chaque nombre entier q, inférieur à la

moitié n de $2n$ et premier avec $2n$, correspond au nombre entier $\frac{n-q}{2}$ inférieur à la moitié de n et premier avec n.

Car q, étant premier avec $2n$, est un nombre impair; et, comme n est supposé impair, $\frac{n-q}{2}$ est un nombre évidemment moindre que $\frac{n}{2}$.

D'ailleurs q, étant premier avec $2n$, l'est avec n; donc $\frac{n-q}{2}$ est aussi premier avec n.

Il s'ensuit que, si n est impair, à tout polygone convexe ou étoilé de n côtés correspond un polygone convexe ou étoilé de $2n$ côtés, et réciproquement.

2. **Théorème II.** — *Lorsque* n *est un nombre pair, il existe deux fois autant de polygones de* 2n *côtés* (dont l'un est convexe et les autres étoilés), *qu'il y a de polygones de* n *côtés.*

Soit, en effet, p un nombre entier, inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone de n côtés et de l'espèce p.

Or le nombre p, étant premier avec le nombre pair n, est nécessairement impair; par suite il est aussi premier avec $2n$.

Mais p étant premier avec n, $n - p$ l'est aussi, non seulement avec n, mais aussi avec $2n$; de plus $n - p$ est évidemment moindre que n ou que la moitié de $2n$.

Donc, si n est pair, à chaque polygone de n côtés et de l'espèce p correspondent deux polygones de $2n$ côtés et des espèces p et $n - p$.

Donc le nombre des polygones de $2n$ côtés est double de celui des polygones qui n'ont que n côtés.

3. **Polygones correspondants.** — Nous avons vu (n° 1) que, si n est impair, il existe autant de polygones de $2n$ côtés qu'il y a de polygones de n côtés, et qu'à chaque polygone de n côtés et de l'espèce p correspond un polygone de $2n$ côtés, et de l'espèce $n - 2p$.

Nous appellerons *polygones correspondants,* les deux poly-

gones l'un d'un nombre impair n de côtés et l'autre de $2n$ côtés, dont les espèces sont respectivement p et $n - 2p$.

Il s'ensuit que

Si n *est impair, deux polygones, l'un de* n *et l'autre de* 2n *côtés, sont correspondants, si la double espèce du premier, augmentée de l'espèce du second, est égale à* n.

Car on a $2p + (n - 2p) = 2p + n - 2p = n$.

4. **Théorème III.** — *Les côtés de deux polygones réguliers correspondants qui sont inscrits dans le même cercle, sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit aux deux polygones.*

Soit, en effet, p l'espèce d'un polygone régulier d'un nombre impair n de côtés ; $n - 2p$ sera l'espèce du polygone régulier correspondant qui a $2n$ côtés.

Le côté $C_{n,p}$ du premier polygone sous-tend p fois la n^{me} partie de la circonférence circonscrite, ou un arc égal à

$$p \times \frac{2\pi}{n} = \frac{2p\pi}{n}.$$

Si R est le rayon du cercle circonscrit, on a donc

$$C_{n,\,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{n}. \qquad (1)$$

On trouverait de même que le côté du second polygone est $C_{2n,n-2p} = 2R \sin \frac{(n-2p)\pi}{2n} = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} = \frac{p\pi}{n}\right)$

ou

$$C_{2n,\,n-2p} = 2R \cos \frac{p\pi}{n}. \qquad (2)$$

Élevant au carré les deux égalités (1) et (2) et ajoutant, on trouvera la relation

$$C^2_{n,\,p} + C^2_{2n,\,n-p} = R^2, \qquad (I)$$

qu'il s'agissait d'établir.

5. **Corollaire.** — Ce principe permet de calculer les côtés des polygones réguliers d'un nombre impair n de côtés, lorsqu'on connaît ceux des polygones réguliers d'un nombre double $2n$ de côtés ; et réciproquement.

Ainsi on sait que les côtés des deux décagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, sont :

$$C_{10,1} = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{5} - 1\right),\quad C_{10,3} = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{5} + 1\right).$$

Or les pentagones réguliers qui leur *correspondent* respectivement sont le pentagone, étoilé et le pentagone convexe. On a par suite

$$C_{5,1} = \sqrt{4R^2 - C^2_{10,3}} = \sqrt{4R^2 - \frac{1}{4} R^2 \left(\sqrt{5} + 1\right)^2},$$

$$C_{5,2} = \sqrt{4R^2 - C^2_{10,1}} = \sqrt{4R^2 - \frac{1}{4} R^2 \left(\sqrt{5} - 1\right)^2},$$

ce qui fournit les valeurs

$$C_{5,1} = \frac{1}{2} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad C_{5,2} = \frac{1}{2} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

pour les côtés des deux pentagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé.

6. **Polygones conjugués**. — Nous avons vu (n° 2) que, si n est un nombre pair, il existe deux fois autant de polygones de $2n$ côtés qu'il y a de polygones de n côtés; et qu'à chaque polygone de $2n$ côtés et de l'espèce p répond un polygone de $2n$ côtés et de l'espèce $n - p$.

Nous donnerons le nom de *polygones conjugués* à deux polygones d'un nombre doublement pair $2n$ de côtés, dont la somme des espèces est égale à n.

7. **Théorème IV**. — *Les côtés de deux polygones réguliers conjugués qui sont inscrits dans le même cercle, sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit aux deux polygones.*

Soit, en effet,

$$C_{2n,\,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n} \tag{3}$$

le côté d'un polygone régulier ayant un nombre doublement pair $2n$ de côtés et étant de l'espèce p. Le côté de son conjugué, parmi ceux de $2n$ côtés, sera

$$C_{2n,\,n-p} = 2R \sin \frac{(n-p)\pi}{2n} = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{2n}\right),$$

ou

$$C_{2n,\,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{n}. \tag{4}$$

Élevant au carré les deux côtés (3) et (4) et ajoutant, on obtient la relation à établir

$$C^2_{2n,\,p} + C^2_{2n,\,n-p} = 4R^2. \qquad \text{(II)}$$

8. **Corollaire I.** — Connaissant les valeurs des côtés de la première moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés, où n est pair, on peut, au moyen du théorème précédent, calculer les côtés de l'autre moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés.

9. **Corollaire II.** — Puisqu'on a

$$C_{2n,\,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n}, \quad C_{2n,\,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{2n},$$

on obtient, en multipliant,

$$C_{2n,\,p} \times C_{2n,\,n-p} = 4R^2 \sin \frac{p\pi}{2n} \cos \frac{p\pi}{2n} = 2R^2 \sin \frac{p\pi}{n}.$$

Mais on sait que $2R \sin \frac{p\pi}{n} = C_{n,\,p}$;

donc il vient

$$C_{2n,\,p} \times C_{2n,\,n-p} = R \times C_{n,\,p}. \qquad \text{(III)}$$

Ainsi *le côté d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est la quatrième proportionnelle au rayon du cercle circonscrit et aux côtés des deux polygones réguliers conjugués d'un nombre double de côtés, dont l'un est de même espèce que le premier et qui sont inscrits dans le même cercle.*

10. **Application.** — Soient x et y les côtés des deux dodécagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé. Nous avons

$$x = C_{12,1}, \; y = C_{12,5}, \; C_{n,\,p} = C_{6,1} = R.$$

En vertu des relations (II) et (III), nous avons

$$x^2 + y^2 = 4R^2, \; xy = R^2, \qquad (5)$$

d'où nous tirons

$$x^2 + 2xy + y^2 = 6R^2, \; x^2 - 2xy + y^2 = 2R^2,$$

ou bien $\quad x + y = R\sqrt{6}, \quad x - y = - R\sqrt{2}.$

Les côtés des deux dodécagones réguliers sont donc :

$$x = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = R \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$y = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Les deux relations (5) prouvent que

1° *La somme des carrés des côtés des deux dodécagones réguliers qui sont inscrits dans le même cercle, est égale au carré du diamètre;*

2° *Le produit de ces côtés est égal au carré du rayon.*

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Composition supplémentaire donnée en 1879 aux candidats à Saint-Cyr empêchés de composer à l'époque ordinaire.

On donne deux points, l'un O situé sur la ligne de terre, l'autre M situé dans le plan horizontal de projection à 50^{mm} en avant de la ligne de terre et à 80^{mm} du point O : ceci posé on demande :

1° De faire passer par la droite MO qui joint les points donnés deux plans, l'un MOP' faisant un angle de 45° avec le plan horizontal de projection, l'autre MOQ' faisant le même angle avec le plan vertical de projection;

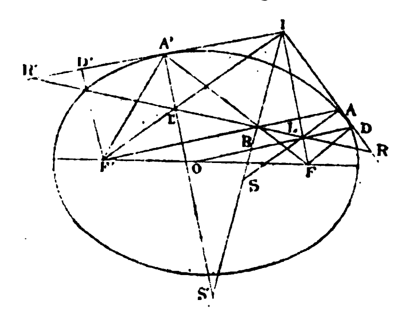
2° De trouver un point C de l'espace situé à égale distance des deux plans MOP', MOQ', à égale distance des deux plans de projection et à 90^{mm} du point O;

3° De construire les projections de la sphère ayant pour centre le point C et tangente aux plans MOP', MOQ'. — On indiquera les points de tangence.

QUESTION 147

Solution par M. Launoy, maître répétiteur au Lycée de Lille.

On considère une ellipse. Soient F *et* F' *les foyers de cette ellipse. Par ces points et dans la même direction, on mène deux rayons vecteurs parallèles rencontrant la courbe, le premier en* A, *le second en* A'. *On mène les tangentes en* A *et* A', *tangentes qui se rencontrent en* I. *La figure ainsi tracée jouit des propriétés suivantes :*



I. *Les triangles* F′IA, FIA′ *sont rectangles en* I.

Les deux angles AF′A′ et FAF′ sont égaux; F′I bissectrice de l'angle AF′A est parallèle à la normale en A et par suite perpendiculaire à IA; de même FI est perpendiculaire à IA′.

II. *L'angle* FIF′ *est moyen arithmétique entre les angles* FAF′ *et* FA′F′.

Dans le triangle FIA, $F'IF = \frac{\pi}{2} - FIA$. et comme dans le triangle FIA

$$FIA = FAD - IFA = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{FAF'}{2} + \frac{FA'F'}{2}\right].$$

on a
$$F'IF = \frac{FAF' + FA'F'}{2}.$$

III. *Quand on fait varier la direction des parallèles* FA *et* F′A′, *le point* I *décrit le cercle dont le diamètre est le grand axe de l'ellipse.*

Je mène la ligne OD; le triangle IOD est isoscèle et $OI = OD = a$

De plus OD est parallèle à F′A; donc l'angle OIA est égal à F′AI ou à FAD et OI est parallèle à AF et à A′F′ (X). Alors le point I est à égale distance de AF et A′F′; on sait qu'il est aussi également distant de AF et A′F, de A′F′ et de AF′; on en conclut qu'il est à égale distance de AB et A′B ou que IB est bissectrice de l'angle ABA′ (VI).

IV. *On a la relation* $\frac{AI \times IF}{IA' \times IF'} = \frac{AF}{A'F'}$.

Les deux triangles FIA et F′IA′ de bases AF et A′F′ ont même hauteur (III); le rapport de leurs surfaces est $\frac{FA}{F'A'}$.
Ils ont aussi un angle égal FIA = F′IA′; ce rapport est également $\frac{IA \times IF}{IA' \times IF'}$;

d'où
$$\frac{IA \times IF}{IA' \times IF'} = \frac{AF}{A'F'}.$$

V. *Les droites* FA, F′A′ *rencontrent l'ellipse sous deux angles tels que la tangente de leur somme, multipliée par la*

somme de leurs tangentes, donne un produit constant, quand on fait varier la direction des parallèles FA, F'A'.

Je pose FAD $= \alpha$, F'A'D' $= \alpha'$; FD et F'I étant perpendiculaires sur IA, on sait que $FD \times F'I = b^2$. (1)

Or dans le triangle rectangle IFD, on a

$$FD = IF \cos IFD = IF \cos(\pi - (\alpha + \alpha'))$$
$$= - IF \cos(\alpha + \alpha');$$

d'où
$$FI \times F'I \cos(\alpha + \alpha') = - b^2, \qquad (2)$$

Cela étant, la figure montre que

$$ID = IA + AD = (AF + AF') \cos \alpha = 2a \cos \alpha.$$

On a aussi
$$ID = IF \sin(\alpha + \alpha'); \qquad (3)$$

d'où
$$IF \sin(\alpha + \alpha') = 2a \cos \alpha$$

et
$$IF = \frac{2a \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \qquad (4)$$

de même
$$IF' = \frac{2a \cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}. \qquad (5)$$

En substituant ces valeurs dans la relation (2) il vient

$$\frac{4a^2 \cos \alpha \cos \alpha' \cos(\alpha + \alpha')}{\sin^2(\alpha + \alpha')} = - b^2,$$

de laquelle on déduit facilement

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha')(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = - \frac{4a^2}{b^2}.$$

VI. *Si l'on appelle* B *le point de rencontre des diagonales du trapèze* AFA'F', *le lieu du point* B, *quand on fait varier la direction des parallèles* AF, A'F', *est une ellipse homofocale à la proposée, et normale à la droite* BI.

Dans le triangle IBF on a

$$\frac{FB}{\sin BIF} = \frac{IB}{\sin IFB} = \frac{IF}{\sin IBF},$$

ou, comme il est facile de le voir sur la figure, en tenant compte de ce que IB est la bissectrice de l'angle AB A',

$$\frac{FB}{\cos \alpha} = \frac{IB}{\cos \alpha'} = \frac{IF}{\sin(\alpha + \alpha')};$$

d'où
$$FB = \frac{IF \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{\overline{IF}^2}{2a}$$

à cause de (4).

$$IB = \frac{FB \cos \alpha'}{\cos \alpha},$$

$$IB = \frac{IF \cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}. \qquad (6)$$

On aurait de même par la considération du triangle IBF' :

$$F'B = \frac{IF' \cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{\overline{IF'}^2}{2a},$$

$$IB = \frac{F'B \cos \alpha}{\cos \alpha'};$$

d'où l'on tire

$$FB + F'B = \frac{IF^2 + IF'^2}{2a} = \frac{2(\overline{OI}^2 + \overline{OF}^2)}{2a} = \frac{a^2 + c^2}{a}.$$

Le point B décrit une ellipse de foyers F et F' et la normale en B est BI, bissectrice de l'angle FBF' (III).

VII. *La distance du point* B *au point* I *est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point* B *aux deux foyers* F *et* F'.

Des formules précédentes résulte évidemment

$$\overline{IB}^2 = FB \times F'B.$$

VIII. *On a* $IF \times I'F' = 2a \times IB$.

Si dans la valeur (6) de IB on substitue à $\dfrac{\cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}$ sa valeur $\dfrac{IF'}{2a}$ (5), on obtient

$$IB \times 2a = IF . IF'.$$

IX. *Si du point* F *on abaisse sur* AI *la perpendiculaire* FD *et du point* F' *la perpendiculaire* F'D' *sur* A'I, *la somme des carrés des inverses de ces perpendiculaires est constante quand on fait varier la direction des parallèles* FA', F'A'.

De la relation (1) on a $\dfrac{1}{FD} = \dfrac{F'I}{b^2}$;

de même $\dfrac{1}{F'D'} = \dfrac{FI}{b^2}$,

et $\dfrac{1}{FD^2} + \dfrac{1}{F'D'^2} = \dfrac{\overline{F'I}^2 + \overline{FI}^2}{b^4} = \dfrac{2(a^2 + c^2)}{b^4}$.

X. *La droite* OI *est parallèle aux droites* FA, F'A' *et la somme des inverses des rayons vecteurs* FA, F'A' *est constante.*

Si dans cette même relation (1) on remplace FD par AF sin α, on a
$$\frac{1}{AF} = \frac{F'I \sin \alpha}{b^2},$$
également
$$\frac{1}{A'F'} = \frac{FI \sin \alpha}{b^2}$$
et
$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{A'F'} = \frac{2a}{b^2 \sin(\alpha + \alpha')} (\sin \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha)$$
$$= \frac{2a}{b^2}.$$

A ces propriétés énoncées par M. de Longchamps je joindrai les suivantes :

XI. L *et* L' *sont les points où les normales en* A *et* A' *rencontrent respectivement* IF *et* IF'*; la ligne* LL' *est la tangente en* B *à l'ellipse que décrit ce point.*

En effet L et L' sont les centres des cercles inscrits aux triangles ABF et A'BF'; LB et L'B sont donc bissectrices des angles ABF et A'BF'.

XII. $$\overline{IB}^2 = AB \cdot A'B'.$$

C'est une conséquence de (VII) et de la similitude des triangles ABF, A'BF'.

XIII. *La perpendiculaire à* AF *menée par le point* F *rencontre* IA *en* Q; *soit* Q' *le point analogue : on a* FQ = F'Q'.

Les triangles rectangles IAF' et IA'F donnent :
$$IF' = IA \operatorname{tg} \alpha, \quad IF = IA' \operatorname{tg} \alpha'$$
et à cause de la proportion (V),
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{AF}{A'F'}.$$

Les triangles OFQ et OF'Q' sont évidemment égaux et les points Q et Q' sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse ; ces points sont, du reste, ceux où chaque tangente vient rencontrer la directrice qui correspond à son point de contact.

XIV. *La ligne qui joint le point* B *au milieu de* OI *a une longueur constante.*

On a, d'après la figure

$$2\overline{OB}^2 + 2c^2 = FB^2 + F'B^2 = (FB + F'B)^2 - 2FB \times F'B;$$

or $FB . F'B = \overline{IB}^2$ (VII) et $FB + F'B = \dfrac{a^2 + c^2}{a}$ (VI);

alors $2\overline{OB}^2 + 2c^2 = \left(\dfrac{a^2 + c^2}{a}\right)^2 - 2\overline{IB}^2$

ou $$2(\overline{OB}^2 + \overline{IB}^2) = \frac{a^4 + c^4}{a^2};$$

mais $$\overline{OB}^2 + \overline{IB}^2 = 2\overline{BK}^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^4 + c^4}{2a^2};$$

donc $$BK = \frac{c^2}{2a}.$$

XV. *Les cercles circonscrits aux triangles* IFA *et* IF'A' *sont tangents en* I.

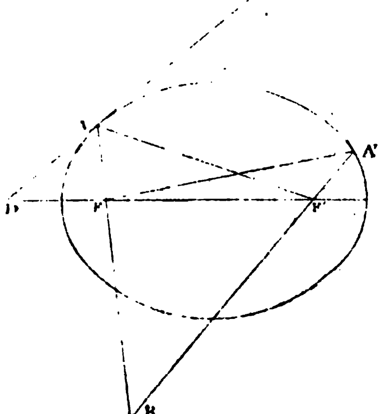
Soit S le point où la normale en A coupe IB; l'angle RIF, égal à $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$, est égal à SAF; les quatre points S, I, A, F sont sur un cercle dont le centre est le milieu de IS; de même les points S', I', A', F' sont sur un cercle dont le centre est le milieu de IS'; ces deux cercles, ayant un point commun I sur la ligne des centres, sont tangents en ce point.

XVI. *Les cercles circonscrits aux triangles* IBF *et* IBF' *se coupent en* I *sous un angle égal à* $FIF' = \dfrac{FAF' + FA'F'}{2}$.

Soient R et R' les points où L'BL rencontre IA et IA', l'angle RBA étant égal à FIA, il en est de même de l'angle FBR; par suite le quadrilatère FBIR est inscriptible dans un cercle dont le centre est le milieu de IR et dont la tangente en I est évidemment IF'. Pareillement, le quadrilatère F'RIR' est inscriptible dans un cercle dont le centre est au milieu de IR' et dont la tangente en I est IF; d'où la propriété énoncée.

Remarque I. — *La propriété* (I) *résulte de la suivante :* FA *et* F'A' *sont deux rayons vecteurs quelconques d'une ellipse;*

IA, IA′ *les tangentes en* A *et* A_1 ; *les angles* F′IA *et* FIA′ *sont complémentaires de l'angle* FRF′ *formé par les rayons vecteurs.*



L'angle A′F′A extérieur au triangle AF′R a pour valeur ARF′ + FAF′ et

$$IF'A = \frac{AF'A'}{2} = \frac{ARF'}{2} = \frac{FAF'}{2};$$

de plus

$$IAF' = \frac{\pi}{2} - \frac{FAF'}{2}$$

et par suite

$$F'IA = \pi - (IF'A + IAF') = \frac{\pi}{2} - \frac{ARF'}{2}.$$

Et si l'angle FRF′ est nul, c'est-à-dire si les deux rayons vecteurs sont parallèles, l'angle F′IA est droit.

Remarque II. — La propriété (II) est générale ; elle a lieu quelle que soit la direction des rayons vecteurs.

En effet, d'après la remarque précédente

$$FIF' = \frac{\pi}{2} - \frac{ARF'}{2} - FIA;$$

or

$$FIA = FAD - IFA = \frac{\pi}{2} - \frac{FAF'}{2} - \frac{FRF'}{2} - \frac{FA'F'}{2}$$

et

$$FIF' = \frac{FAF' + FA'F'}{2}.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Elie, du Collège Stanislas, à Paris, et Lagarde, élève au Collège de Pamiers. Nous leur avons préféré la solution de M. Launoy qui nous donne une série de propriétés nouvelles de la figure, non indiquées dans l'énoncé.

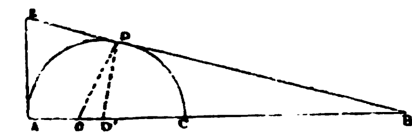
CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

RHETORIQUE

SOLUTION par M. **Andoyer**, du Lycée Saint-Louis.

(Copie couronnée.)

Soit AB *une portion de droite de longueur donnée. On prend entre* A *et* B *sur la droite* AB *un point* C, *et sur* AC *comme diamètre on décrit une demi-circonférence. Par le point* B *on mène une tangente à cette demi-circonférence. Soit* D *le point de contact, et soit* E *le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite* AB *par le point* A. *Déterminer le point* C *de telle façon que si l'on fait tourner la figure autour de la droite* AB, *la surface engendrée par l'arc de cercle* AD *et la surface engendrée par la portion de droite* BE *soient dans un rapport égal à un nombre donné* m.



Indiquer la condition de possibilité.

Appliquer dans le cas particulier où $m = \frac{1}{2}$, *et dans ce cas trouver le rapport des surfaces engendrées par les deux portions* BD, DE *de la droite* BE.

D'après l'énoncé, on doit avoir, en appelant D' la projection du point D sur la droite AB :

$$\frac{\pi \times AC \times AD'}{\pi \times AE \times BE} = m.$$

ou, plus simplement :

$$AC \times AD' = m \times AE \times BE.$$

Soit O le milieu de AC, et faisons AB $= a$, AO $= x$.

Dans le triangle rectangle BOD, on a :

$$OD' = \frac{\overline{OD}^2}{OB} = \frac{x^2}{a - x}.$$

Par suite :

$$AD' = AO + OD' = x + \frac{x^2}{a - x} = \frac{ax}{a - x}.$$

Donc enfin, $AC \times AD' = \dfrac{2ax^2}{a - x}.$

Considérant les triangles rectangles semblables BAE, BOD, ils donnent : $\dfrac{AE \times BE}{OD \times OB} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2}.$

Or :

$$OD \times OB = x\,(a - x);\ \overline{AB}^2 = a^2;\ \overline{BD}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OD}^2$$
$$= (a - x)^2 - x^2 = a\,(a - 2x).$$

Donc :

$$AE \times BE = \frac{a^2x\,(a - x)}{a\,(a - 2x)} = \frac{ax\,(a - x)}{a - 2x}.$$

L'équation du problème est donc :

$$\frac{2ax^2}{a - x} = \frac{max\,(a - x)}{a - 2x}.$$

Nous pouvons diviser les deux membres par ax. Il reste

$$\frac{2x}{a - x} = \frac{m\,(a - x)}{a - 2x}.$$

On supprime ainsi la solution $x = o$, qui convient, quelle que soit la valeur que l'on attribue à m. Il est facile de s'en rendre compte ; car quand $x = o$, les points D et E se confondent avec le point A, et les deux surfaces en question deviennent nulles, ce qui rend leur rapport indéterminé.

En chassant les dénominateurs dans l'équation précédente, il vient : $2ax - 4x^2 = ma^2 - 2max + mx^2,$
et enfin

$$(m + 4)x^2 - 2a\,(m + 1)\,x + ma^2 = o. \qquad (1)$$

On en tire la valeur de l'inconnue :

$$x = a\,\frac{m + 1 \pm \sqrt{1 - 2m}}{m + 4}.$$

Pour que les racines soient admissibles, il faut qu'elles soient réelles, positives et plus petites que $\dfrac{a}{2}$, puisque le point C est situé entre A et B.

Elles seront réelles, tant que l'on aura

$$1 \geq 2m, \text{ ou bien } m \leq \frac{1}{2}.$$

Cette condition remplie, elles seront toujours positives, puisque leur somme et leur produit sont positifs. Pour reconnaître si elles sont plus petites que $\frac{a}{2}$, substituons cette quantité dans le premier membre de l'équation (1). On trouve un résultat positif: $\frac{ma^2}{4}$, et comme le coefficient de x^2 est positif, les racines sont toutes les deux ou plus grandes ou plus petites que $\frac{a}{2}$. Elles seront plus petites, si leur demi-somme est plus petite que $\frac{a}{2}$, c'est-à-dire si l'on a:

$$a\frac{m+1}{m+4} < \frac{a}{2},$$

ou bien:

$$m < 2.$$

Cette condition étant contenue dans celle de réalité, la seule condition de possibilité du problème est $m \leq \frac{1}{2}$, et dans ce cas l'on a toujours deux solutions. Dans le cas particulier où $m = \frac{1}{2}$, le problème n'a plus qu'une solution, $x = \frac{a}{3}$.

On peut remarquer que dans ce cas le cône engendré par le triangle rectangle ABE est équilatéral. En effet, OD est la moitié de OB et les triangles ABE, OBD sont semblables; AE est donc la moitié de BE.

Appelons y le rapport des surfaces engendrées par les portions de droite BD, DE. On aura

$$y = \frac{\pi \times BD \times DD'}{\pi \times BE \times AE - \pi \times BD \times DD'}$$
$$= \frac{BD \times DD'}{BE \times AE - BD \times DD'}.$$

Or, dans le cas particulier où $m = \frac{1}{2}$,

$$BD = \frac{\sqrt{3}}{3}a; \text{ puis } DD' = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a;$$

Il vient donc : $BD \times DD' = \frac{1}{6} a^2$;

d'ailleurs, on obtient en se servant de la formule calculée précédemment : $AE \times BE = \frac{2}{3} a^2$.

Par suite : $AE \times BE - BD \times DD' = \frac{1}{2} a^2$,

et $$y = \frac{1}{3}.$$

On pourrait encore se proposer de calculer y dans le cas général.

Remarquons d'abord que les triangles semblables BAE, BDD' donnent $AE \times BE = BD \times DD' \times \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD'}^2}$;

portant cette valeur dans l'expression de y on obtient :

$$y = \frac{1}{\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD'}^2} - 1}.$$

Or $BD' = AB - AD' = a - \frac{ax}{a-x} = \frac{a(a-2x)}{a-x}$;

donc $\frac{AB}{BD'} = \frac{a-x}{a-2x}$; $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD'}^2} - 1 = \frac{(a-x)^2 - (a-2x)^2}{(a-2x)^2}$

$$= \frac{x(2a-3x)}{(a-2x)^2}$$

et enfin $$y = \frac{(a-2x)^2}{x(2a-3x)}.$$

En faisant $x = \frac{1}{3}a$, on trouverait, comme précédemment, $y = \frac{1}{3}$.

En mettant dans cette formule la valeur de x tirée de l'équation (1), on trouverait, en effectuant les calculs :

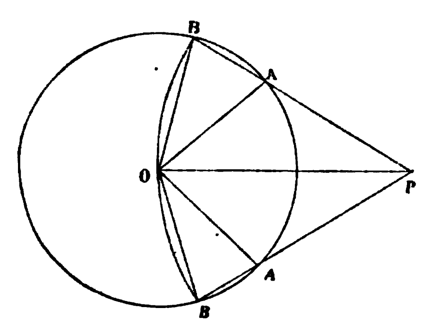
$$y = \frac{8 - 12m + m^2 \pm (4m - 8)\sqrt{1-2m}}{2 + 10m - m^2 \pm (2 - 4m)\sqrt{1-2m}}.$$

QUESTION 153

Solution par M. Duperré de Lisle, élève du Lycée de Versailles.

Étant donné un cercle O, *et un point extérieur* P, *mener par le point* P *une sécante* PAB, *de façon que la partie intérieure* AB *soit vue du centre* O *sous un angle égal à l'angle que fait la sécante* PAB *avec le diamètre* PO.

Supposons le problème résolu et soit PAB la sécante cherchée. Joignons OA, OB. Les triangles OAB et OBP étant semblables et OAB étant isoscèle, il en est de même de OBP, donc PO = PB. De là la construction suivante : Du point P comme centre avec PO pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe la circonférence O en B et B'. Joignant PB, PB'; on obtiendra deux sécantes qui répondront à la question.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Peyrabon, Johannet, de Châteauroux; Ailleret, de Versailles; Bompart, Collège Stanislas; Huet, Gellinet, Manceaux, d'Orléans; Vermond, Corbeau, Schlesser, de Saint-Quentin; Boucheaux, d'Angers; Jacquier, école normale de Charleville; Démaris, de Moulins; Lannes, de Tarbes; Gondy, de Pontarlier; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saulnier; Combebiac, Chaulet, de Montauban; Barbieux, d'Amiens; Blessel, de Paris; Tupin et Jarron, à Beaume-les-Dames; Longueville, à Charleville; Hor, à Sainte-Barbe; Deslais, au Mans; Cadot, élève du Lycée Saint-Louis; Dupuy, de Grenoble; Hugot, à Lyon; Martin, à Passy; Gino Loria, à Mantoue; Renaud, à Bordeaux; Vazou, Collège Rollin à Paris.

FORMULES SUR LES BISSECTRICES DES ANGLES

TANT INTÉRIEURS QU'EXTÉRIEURS D'UN TRIANGLE

Énoncées par M. DOSTOR.

1. *Notations.* Soient

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c$$

les trois côtés d'un triangle ABC, dans lequel nous supposons l'angle $A > B > C$.

Les bissectrices AA′, BB′, CC′ des angles intérieurs A, B, C rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB respectivement en A′, B′, C′; et les bissectrices AA″, BB″, CC″ des angles extérieurs $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ coupent les même côtés en A″, B″, C″. On peut donner à ces points de rencontre le nom de *pieds des bissectrices.*

Posons les bissectrices intérieures,

$$AA' = \alpha',\ BB' = \beta',\ CC' = \gamma';$$

les bissectrices extérieures,

$$AA'' = \alpha'',\ BB'' = \beta'',\ CC'' = \gamma'';$$

et les distances entre les pieds des bissectrices issues d'un même sommet, $A'A'' = \alpha,\ B'B'' = \beta, C'C'' = \gamma$.

Représentons d'ailleurs par S la surface du triangle donné.

On pourra établir sans difficulté les relations et propositions suivantes.

2. *Distances entre les pieds des bissectrices issues d'un même sommet.* On a $\alpha = \dfrac{2\,abc}{b^2 - c^2}$, $\beta = \dfrac{2abc}{a^2 - c^2}$, $\gamma = \dfrac{2abc}{a^2 - b^2}$.

d'où on tire $$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$

3. *Longueur des bissectrices intérieures.* Elles sont

$$\alpha' = \frac{2bc \cos \dfrac{A}{2}}{b + c},\ \beta' = \frac{2ca \cos \dfrac{B}{2}}{c + a},\ \gamma' = \frac{2ab \cos \dfrac{C}{2}}{a + b}$$

4. *Longueur des bissectrices extérieures.* On trouve que

$$\alpha'' = \frac{2bc \sin \dfrac{A}{2}}{b - c},\ \beta'' = \frac{2ca \sin \dfrac{B}{2}}{a - c},\ \gamma'' = \frac{2ab \sin \dfrac{C}{2}}{a - b}$$

5. *Produit des bissectrices issues d'un même sommet.* Ces produits sont

$$\alpha'\alpha'' = \frac{4bcS}{b^2 - c^2}, \quad \beta'\beta'' = \frac{4caS}{a^2 - c^2}, \quad \gamma'\gamma'' = \frac{4abS}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{1}{a\alpha'\alpha''} - \frac{1}{b\beta'\beta''} + \frac{1}{c\gamma'\gamma''} = 0.$$

6. *Produit des trois bissectrices intérieures.*

$$\alpha'\beta'\gamma' = \frac{8abcpS}{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

où p est le demi-périmètre du triangle donné ABC.

7. *Produit des trois bissectrices extérieures.*

$$\alpha''\beta''\gamma'' = \frac{8abcS^2}{p(b-c)(a-c)(a-b)}.$$

8. *Surface du triangle $A'B'C'$, ayant pour sommets les pieds des trois bissectrices intérieures :*

$$A'B'C' = \frac{2abcS}{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

$$A'B'C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{a+b+c}.$$

9. *Surface des triangles $A'B''C''$, $B'C''A''$, $C'A''B''$, ayant pour sommets le pied d'une bissectrice intérieure et les pieds des bissectrices extérieures issues des deux autres sommets :*

$$A'B''C'' = \frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)},$$

$$B'C''A'' = \frac{2abcS}{(c+a)(a-b)(b-c)},$$

$$C'A''B'' = \frac{2abcS}{(a+b)(b-c)(a-c)};$$

ou encore

$$A'B''C'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha'\beta''\gamma''}{b+c-a},$$

$$B'C''A'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta'\gamma''\alpha''}{c+a-b},$$

$$C'A''B'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma'\alpha''\beta''}{a+b-c}.$$

10. *Surface des six triangles, ayant pour sommets les pieds de deux bissectrices rectangulaires et le pied de l'une des deux autres bissectrices extérieures :*

$$B'B''C'' = \frac{2abcS}{(a-b)(a^2-c^2)},$$

$$C'C''B' = \frac{2abcS}{(a-c)(a^2-b^2)},$$

$$C'C'A'' = \frac{2abcS}{(b-c)(a^2-b^2)},$$

$$A'A''C'' = \frac{2abcS}{(a-b)(b^2-c^2)},$$

$$A'A''B' = \frac{2abcS}{(a-c)(b^2-c^2)},$$

$$B'B''A' = \frac{2abcS}{(b-c)(a^2-c^2)},$$

11. *Surface des six triangles, ayant pour sommets les pieds de deux bissectrices rectangulaires et le pied de l'une des deux autres bissectrices.*

$$B'C'C'' = \frac{2abcS}{(c+a)(a^2-b^2)},$$

$$C'B'B'' = \frac{2abcS}{(a+b)(a^2-c^2)},$$

$$C'A'A'' = \frac{2abcS}{(a+b)(b^2-c^2)},$$

$$A'C'C'' = \frac{2abcS}{(b+c)(a^2-b^2)},$$

$$A'B'B'' = \frac{2abcS}{(b+c)(a^2-c^2)},$$

$$B'A'A'' = \frac{2abcS}{(c+a)(b^2-c^2)}.$$

12. *Surface des triangles, ayant pour sommets le centre du cercle inscrit et les centres de deux cercles ex-inscrits.* Soient O le centre du cercle inscrit; O', O'', O''' les centres des cercles ex-inscrits compris respectivement dans les angles A, B, C. On a

$$OO''O''' = \frac{1}{2}\,bc\,.\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = R(b+c-a),$$

$$OO'''O' = \frac{1}{2}\,ca\,.\,\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = R(c+a-b),$$

$$OO'O' = \frac{1}{2}\,ab\,.\,\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = R(a+b-c),$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

13. *Surface du triangle, ayant pour sommets les centres* O', O'', O''' *des cercles ex-inscrits :*

$$O'O''O''' = \frac{1}{2}\,bc\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{1}{2}\,ca\,\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,ab\,\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}},$$

ou $$O'O''O''' = R(a+b+c).$$

14. *Rapport des triangles* A'B'C' *et* O'O''O''' :

$$\frac{A'B'C'}{O'O''O'''} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

15. *Rapport des triangles* A'B''C'' *et* OO''O''', *etc. :*

$$\frac{A'B''C''}{OO''O'''} = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)}{2(b+c)(a-b)(a-c)},$$

$$\frac{B'C''A''}{OO'''O'} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{2(c+a)(b-c)(a-b)},$$

$$\frac{C'A''B'}{OO'O''} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)}{2(a+b)(a-c)(b-c)}.$$

16. *Surface des quadrilatères* OO'BC, OO''CA, OO'''AB. On a

$$OBO'C = \frac{2a(b+c)S}{(b+c+a)(b+c-a)},$$

$$OCO''A = \frac{2b(c+a)S}{(c+a+b)(c+a-b)},$$

$$OAO'''B = \frac{2c(a+b)S}{(a+b+c)(a+b-c)};$$

d'où on tire

$$OBO'C\,.\,OCO''A\,.\,OAO'''B = \frac{abc(b+c)(c+a)(a+b)\,S}{2(a+b+c)^2}.$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

POITIERS

La surface d'un secteur circulaire est $3^{m},18$. Son angle au centre est $54^{\circ}\ 18'$. On demande quel est, à $0^{m},001$ près, le rayon de ce secteur.

— Le volume d'un parallélépipède droit est égal à $4762^{m},7$; ses arêtes sont entre elles comme les nombres 3, 5, 7. Quelle est, en mètres, la grandeur de ces arêtes?

— La surface d'un cylindre droit est a, son volume est b. Calculer le rayon de base et la hauteur.

— Calculer par logarithmes le côté du carré équivalent à la couronne comprise entre deux cercles concentriques donnés par leurs rayons:

$$R = 1^{m},3456; \quad r = 0,3458.$$

— Trouver quatre nombres en proportion géométrique, connaissant la somme des extrêmes 21, la somme des moyens 19, et la somme des carrés des quatre termes 442.

— Résoudre les équations

$$x^2 + y^2 = a; \quad \log x + \log y = b.$$

— Deux points situés sur un même méridien sont distants de 57025 toises. Quel est l'angle des deux verticales en ces deux points? La toise vaut $1^{m},949$; le rayon du méridien est 6366200 mètres. (*Calcul à faire par logarithmes.*)

— On donne une droite $AB = a$. Trouver sur cette droite un point K tel que le produit des deux segments AK et BK soit égal à la moitié du carré de a.

— Un observateur est placé sur une tour à 50 mètres au-dessus du niveau de la mer. Calculer la distance à laquelle sa vue peut s'étendre. Le rayon terrestre est de 6366198 mètres.

— Inscrire dans une sphère de rayon donné un cône droit dont la surface latérale soit maxima.

— Résoudre les deux équations

$$x + y = 63; \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,05.$$

— On donne un cercle et un point sur ce cercle. Par ce point, mener une tangente telle que sa longueur soit double de la partie extérieure d'une sécante passant par le centre et par l'extrémité de la tangente demandée.

— Quel est le rayon de base d'un cylindre équivalent à un tronc de cône de même hauteur dont les rayons de base sont 4 mètres et 22 mètres.

— On fait 371 pas en traversant diagonalement une place carrée. Le pas est de $0^{m},78$. Quelle est la longueur du côté de cette place?

— Résoudre les équations

$$x^2 + y^2 = 132,65; \quad xy = 17.$$

— On a peint le dôme sphérique d'un édifice à raison de 25 fr. 50 c. le mètre carré. Quel est le prix de cette peinture, sachant que le dôme a 18 mètres de rayon.

— Un terrain est compris entre deux routes parallèles distantes de

$319^m,5$. Il a, sur l'une d'elles, un développement de $598^m,7$, et sur l'autre un développement de $623^m,4$. L'hectare de ce terrain vaut 61500 francs. On demande le prix du terrain (*par logarithmes*).

— On donne la hauteur $2^m,4$ et la différence 1 mètre des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. On demande la longueur des trois côtés.

— De 6 ans à 64 ans, la vie probable est donnée approximativement par la formule $y = 59 - \frac{3}{4} x$, x représentant l'âge actuel, et y la vie probable. A quel âge est-on arrivé à la moitié de la vie probable?

— Des sommets d'un triangle comme centres, décrire trois cercles tangents deux à deux, et exprimer les rayons de ces cercles en fonction des trois côtés.

— Quelqu'un donne à trois personnes $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ et $\frac{2}{11}$ de sa fortune, et il lui reste 26200 francs. Quelle était sa fortune totale?

— La France compte 36 millions d'habitants. Quelle est la fraction du nombre de garçons de 20 à 21 ans appelés sous les drapeaux dans une conscription de 80000 hommes, sachant qu'il y a 1045 personnes de 20 à 21 ans sur 65162, et 17 garçons sur 33 personnes?

— Il faut 12 ans pour éteindre une dette par annuités de 1000 francs à 4,75 pour cent par an; on propose au créancier de payer par somme de 500 francs chaque semestre, avec un intérêt de 2 1/3 par semestre. Doit-il accepter?

— On détache d'une pyramide triangulaire, par un plan parallèle à la base mené à 2 mètres du sommet, un tronc dont on demande le volume. Les côtés de la base de la pyramide sont 13, 14 et 15 mètres, et la hauteur de cette pyramide est 16 mètres (*par logarithmes*).

— En supposant que le volume total d'un alliage est la somme des volumes des métaux composants, on demande: 1° le poids de cuivre et d'argent contenu dans une pièce de 5 francs; 2° le volume de chacun de ces métaux; 3° l'épaisseur du cylindre qui devient la pièce de 5 francs, le diamètre de ce cylindre étant $0^m,037$. Densité de l'argent, 10,47; densité du cuivre, 8,85.

— Partager 88° 21′ 13″ en parties proportionnelles à 3,2; 5,3; et 85.

— Un triangle équilatéral a 500 mètres de côté. D'un point pris dans un plan, on voit deux côtés sous le même angle de 120°. Quelle est, en mètres, la distance de ce point à l'un des sommets (*par logarithmes*).

— Evaluer en ares un terrain qui a la forme d'un trapèze isoscèle, dont les côtés non parallèles sont égaux chacun à 50 mètres, les bases étant de 100 mètres et de 40 mètres. — Quelle est, en ares et centiares, la surface du triangle formé par les prolongements des côtés non parallèles?

— Des obligations au porteur, de 1000 francs chacune, rapportent 50 francs par an. On prend ces obligations à 1045 francs. Quel est le taux réel du placement?

— Résoudre les équations.

$$5(x + y) = xy; \quad 2x + 3y = 40.$$

— Un vase sphérique de 60 millimètres de diamètre intérieur est plein de mercure jusqu'à la hauteur de 45 millimètres. On demande le poids de mercure qu'il contient, la densité du mercure étant 13,6.

— Etant donné un trapèze quelconque, et un point O sur l'une de ses

bases, indiquer la construction géométrique qu'il faudrait faire pour diviser le trapèze en deux parties équivalentes par une droite partant du point O.

— F et F' sont les foyers d'une ellipse ; deux droites FO et F'I respectivement égales au grand axe et partant des foyers se coupent en M. On suppose que OI = FF'. Prouver que le point M est un point de la courbe.

— Quelle est l'aire d'un trapèze dont la hauteur est égale à la demi-somme des bases ? la différence des bases est 1 mètre, et la plus grande base est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont la petite base et la hauteur.

— On retranche 3 des deux termes d'une fraction et elle devient égale à $\frac{1}{4}$; on ajoute 5 à chacun des deux termes de la fraction primitive, et elle devient égale à $\frac{1}{2}$. Quelle est cette fraction ?

— Calculer l'angle sous lequel on voit du soleil la ligne qui joint les centres de la terre et de la lune lors de la quadrature.

— Quelle relation doit avoir lieu entre les coefficients des équations générales du 1er degré, à deux inconnues, pour que les deux inconnues soient dans un rapport donné ?

— Le côté d'un tronc de cône est égal à la somme des rayons R et r des bases. Démontrer : 1° que $4\ Rr = h^2$, en appelant h la hauteur du cône ; 2° que le volume du tronc de cône est égal à la surface totale multipliée par le sixième de la hauteur.

— On donne les trois côtés d'un triangle a, b, c exprimer au moyen des données et de la surface le volume engendré par la rotation de ce triangle autour du côté a.

— Quel serait le maximum du produit $(5 - \sin x)(2 + \sin x)$? — L'équation $5 - \sin x = 2 + \sin x$ a-t-elle une solution ?

— Maximum de $\sin x \cos^3 x$.

— Construire un triangle équilatéral équivalent à un hexagone régulier donné.

— Partager géométriquement un quadrilatère quelconque en deux parties équivalentes par une droite partant d'un point pris sur un des côtés.

— Par un point pris dans un angle donné, mener une droite telle que le triangle formé par cette droite et les deux segments des côtés du triangle soit minimum.

— Sur la ligne des centres de deux planètes, déterminer la position d'un point matériel également attiré par chacune d'elles ; appliquer au cas de la terre et de la lune où l'on a $d = 60r$; $M = 88\ m$.

— Indiquer la hauteur minimum que puisse avoir un miroir plan vertical pour qu'une personne, se tenant debout en face, s'y voie par réflexion de la tête aux pieds.

— Partager $2a$ en deux parties x^2 et $2a - x^2$ telles que la somme de leurs racines carrées soit minima.

— Partager 552 en 3 parties telles que leurs racines carrées soient proportionnelles à 7, 5, et 8.

— Calculer le volume de la sphère circonscrite au cube dont l'arête est 0m,36.

— Partager 195 en trois parties en progression géométrique telles que la plus grande surpasse la plus petite de 120.

— On donne un cercle de rayon égal à 2 mètres, et un point extérieur distant de 3 mètres du centre. Quelle est la longueur de la partie extérieure

d'une sécante menée par ce point et telle que la partie intérieure soit de 1 mètre?

— Dans un triangle on connait deux côtés et l'angle compris. Trouver l'expression du volume engendré par le triangle tournant autour d'un des côtés donnés.

— Sur une sphère de 13 mètres de rayon, on prend une zone à deux bases dont l'une est à 1 mètre du centre. La surface de cette zone vaut 100 mq. Quelle est la surface du cercle formant la seconde base?

— Résoudre

$$x + y = 5$$
$$7x^2 - 3y^2 + 5xy - 2x - 27 = 0.$$

— Le produit de trois nombres formant une proportion continue est 13824; leur somme est 126. Quels sont ces nombres?

— Dans un cercle de 10 mètres de rayon, on donne un arc de 83° 20'. Calculer la surface du triangle formé par la corde de cet arc et les cordes AC et BC qui joignent les extrémités A et B au milieu C de l'arc.

— Résoudre

$$3 \sin x = 4 \sin y$$
$$x + y = 72.$$

— Trouver deux nombres sachant que leur produit plus leur somme donne 31, et la somme de leurs carrés moins leur somme donne 48.

— Volume engendré par un trapèze isoscèle tournant autour d'un axe situé dans son plan et perpendiculaire à ses bases.

— Résoudre

$$x + y - z = a - 1$$
$$y + z - u = 2a - 8$$
$$z + u - v = a + 4$$
$$u + v - x = 6a + 2$$
$$v + x - y = 5a + 3.$$

— 190 est un nombre écrit dans le système décimal. Il est représenté par 276 dans un système dont la base est inconnue. Quelle est cette base?

TOULOUSE

Dans un cercle dont le rayon OA = 1, on prend le milieu B d'un quadrant AH. On mène par le point B, BC parallèle à OA. On joint BA et CA. On demande d'évaluer à 0,01 près le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de l'axe OA.

— Un vase cylindrique vertical, dont le fond est un cercle horizontal de 5 centimètres de rayon intérieur, est en partie rempli par de l'eau pesant 4 kilogrammes. On y plonge une boule sphérique de 3 centimètres de rayon, et l'eau monte exactement jusqu'au bord du vase. On demande la hauteur du vase.

— Le premier terme d'une progression arithmétique est 1/2 ; la raison est 1/3. Combien faut-il prendre de termes pour que leur somme soit égale à 48?

— Dans une sphère dont le rayon OA = 1 mètre, la zone engendrée par l'arc de grand cercle AB tournant autour de AO a pour base un cercle dont la surface est les 3/4 de celle de la zone. Déterminer à un centimètre près la hauteur de la zone.

— Dans un triangle ABC, rectangle en A, l'angle aigu B est égal à 60° et le côté b, opposé à cet angle, vaut 1 mètre. Calculer l'hypoténuse a et le côté c à un centimètre près, sans faire usage des logarithmes.

— Partager 85 en parties formant une progression arithmétique dont le premier terme soit 7 et la raison $\frac{4}{3}$. On déterminera le nombre des termes et le dernier.

— Dans une progression arithmétique, on connaît la raison r, le dernier terme l et la somme des termes S. On demande le premier terme et le nombre des termes. On appliquera la formule en faisant $r = \frac{1}{3}$, $l = 2 + \frac{5}{6}$, $S = 13 + \frac{1}{3}$.

— Dans un trapèze ABCD, la grande base AB a 18 mètres, les angles A et B sont égaux chacun à 45°, et chacun des côtés non parallèles est égal à 7 mètres. Evaluer: 1° l'aire du trapèze; 2° celle du triangle que l'on forme en prolongeant les côtés non parallèles.

— Dans un triangle ABC, les côtés AB, AC sont égaux chacun à 1 mètre; l'angle A est de 30°. On demande la valeur de la surface qu'engendrerait BC, si le triangle tournait autour d'une droite AK menée dans son plan perpendiculaire à AC.

— En un point A d'une circonférence de 3 mètres de rayon, on mène une tangente sur laquelle on prend une longueur AB = 4 mètres. On joint le centre O à l'extrémité B, et on abaisse du point A sur OB la perpendiculaire AC. On demande: 1° la valeur de la projection BC de la tangente AB sur la droite OB, ainsi que celle de la perpendiculaire AC; 2° la valeur de la surface engendrée par la révolution de AB, en tournant autour de OB.

QUESTIONS PROPOSEES

Mathématiques élémentaires.

206. — Deux mobiles partent d'un point O sans vitesse initiale ; l'un A parcourt la droite Ox d'un mouvement uniforme ; l'autre B parcourt la droite Oy, perpendiculaire à Ox, d'un mouvement uniformément accéléré; démontrer que la droite qui les joint à chaque instant est constamment tangente à une parabole. *(Launoy.)*

207. — Sur une demi-circonférence de diamètre AB, on prend deux points P et Q tels que, les droites AQ et BP se coupant en M, on ait

$$AM \times BM = 2AP \times BQ.$$

Trouver le lieu géométrique du point M. *(Launoy.)*

208. — Soit ABC un triangle ; de part et d'autre de BC on construit les triangles équilatéraux A'BC, A''BC ; soit X

l'angle A'AA''. Soient de même Y et Z les angles obtenus de la même manière en prenant les autres côtés. On a la relation.

$$\cos X + \cos Y + \cos Z = 0. \quad (E. \textit{Lemoine.})$$

THÉORIE DES CENTRES
DES MOYENNES HARMONIQUES

Par M. **Kœhler**

(*Suite et fin*; voir t. III, p. 354).

Pôles et polaires dans les courbes du troisième ordre.

D'après la remarque de la page 356, les théorèmes VI, VII, VIII, IX et X sont applicables à un lieu quelconque du troisième ordre. Pour compléter l'étude qui précède, nous allons donner les démonstrations de quelques autres théorèmes sur les pôles et polaires dans les cubiques.

Théorème XVII. — *Lorsqu'un lieu du troisième ordre se compose d'une courbe du second degré et d'une droite, la polaire conique d'un point de la droite se compose de cette droite elle-même et de la polaire rectiligne du point par rapport à la conique.*

La démonstration est analogue à celle du théorème XII.

Théorème XVIII. — *Les polaires coniques d'un point par rapport aux courbes d'un faisceau de cubiques forment un faisceau, et il en est de même des polaires rectilignes de ce point.*

Ce qui caractérise un faisceau de courbes, c'est que par un point quelconque du plan on peut faire passer une courbe du faisceau et une seule. Or, si l'on considère le pôle, une seule polaire conique passera par ce point, ce sera la polaire conique de la cubique qui passe au pôle. Cela résulte de ce que, si l'on prend les centres harmoniques q_1, q_2 d'un point p par rapport à trois points a, b, c, l'un de ces centres ne peut se confondre avec p que si l'un des points a, b ou c est le

pôle p lui-même. Le système des polaires coniques jouit donc de la propriété caractéristique de tout faisceau de courbes. Il en est de même des polaires rectilignes; elles passent par un point fixe.

La démonstration s'applique aux polaires successives d'un point par rapport aux courbes d'un faisceau, quel que soit leur degré.

Théorème XIX. — *Étant donnés une cubique* K *et deux points* p, p′ (fig. 13), *si l'on prend les polaires coniques* C *et* C′ *de ces points par rapport à* K, *la polaire rectiligne de* p *par rapport à* C′ *coïncide avec celle de* p′ *par rapport à* C.

La cubique représentée en points ronds (*fig. 13*) se compose d'un ovale et d'une branche infinie. Menons par le point p' une transversale quelconque R qui coupe la courbe en a_1, a_2, a_3 et considérons le faisceau (P) des rayons pa_1, pa_2, pa_3. On démontre dans tous les cours de mathématiques spéciales que, si deux lieux du troisième ordre ont trois points communs en ligne droite, leurs six autres points d'intersection appartiennent à une même conique. Le faisceau (P) et la courbe K ont donc six points communs sur une certaine conique C″; c'est l'hyperbole représentée en traits interrompus (cinq des six points sont visibles sur la figure; le sixième est hors des limites du dessin sur le rayon $a_1 p$ prolongé). Comme la courbe K fait partie du faisceau déterminé par les deux lieux du troisième ordre (P) et (R, C″), la polaire conique de p' par rapport à K appartient au faisceau déterminé par les polaires de p' relativement à (P) et à (R, C″) (théorème XVIII).

La première de ces polaires est le couple de droites pq_1, pq_2, q_1, q_2 étant les centres harmoniques du système a_1, a_2, a_3, par rapport à p'. La deuxième se compose, d'après le théorème XVII, de la droite R elle-même et de la polaire de p' par rapport à C″, qui est la droite $\alpha\beta\gamma$.

On voit ensuite que la polaire de p par rapport à C′ n'est autre chose que celle de p par rapport au couple de droites R et $\alpha\beta\gamma$. C'est une droite $\alpha\pi$ passant en α.

La polaire conique C de p par rapport à K se confond né-

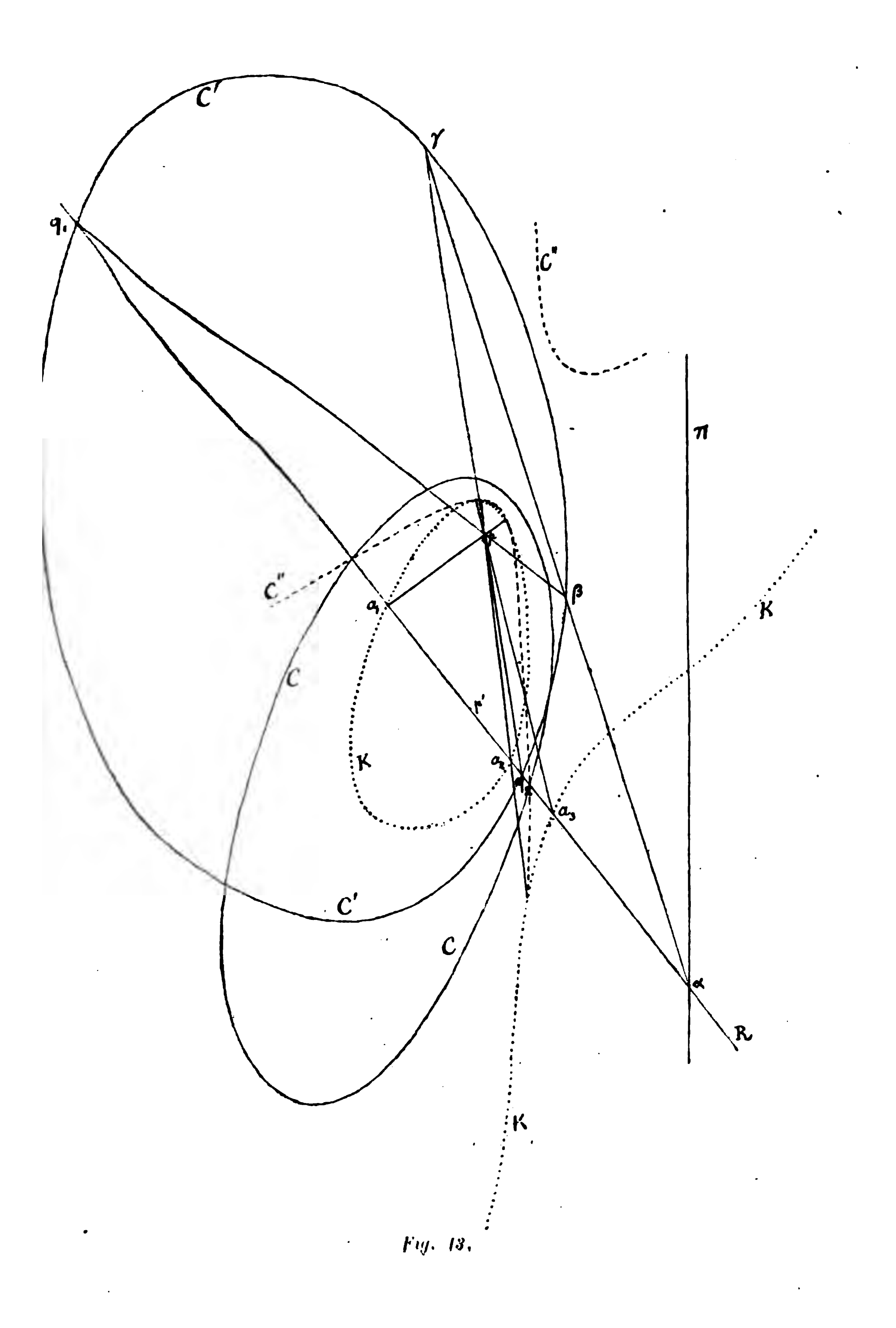


Fig. 13.

cessairement avec celle de p par rapport au lieu (R, C′), car ces deux polaires ont six points communs, deux sur chacune des droites du faisceau (P). Cette conique C passe donc par les points d'intersection de C′ et de R, points doubles du lieu (R, C″), comme la figure l'indique. Il en résulte que la polaire rectiligne de p' par rapport à C passe par le conjugué harmonique de p' relatif aux intersections de C′ et de R, c'est-à-dire par le point α.

Les deux polaires de p' par rapport à C et de p par rapport à C′ ayant un point commun α sur une transversale R *quelconque* issue de p', elles se confondent en une seule et même droite $\alpha\pi$. Cette droite $\alpha\pi$ a été appelée par M. Cremona *seconde polaire mixte* des points p et p'.

Le théorème qui précède donne lieu à de nombreuses conséquences ; nous engageons le lecteur à en chercher la démonstration analytique qui est très facile.

Théorème XX. — *Si une courbe du troisième ordre a un point double* δ, *la polaire conique d'un point quelconque* p *a pour tangente en* δ *le rayon conjugué harmonique de* pδ *par rapport aux tangentes de la cubique.*

Remarquons d'abord que la polaire conique du point double n'est autre chose que le couple des tangentes en ce point ; la polaire de p par rapport à cette conique n'est autre que le rayon conjugué harmonique de $p\delta$ par rapport aux deux tangentes. C'est d'ailleurs, d'après le théorème XIX, la polaire δ par rapport à la polaire conique de p, c'est-à-dire la tangente à cette conique.

Corollaire. — Si la conique a un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est tangente aux polaires coniques de tous les points du plan.

Remarque. — Les théorèmes XIX et XX s'étendent aux courbes d'ordre quelconque.

Théorème XXI. — *Si la polaire d'un point* p *est un couple de droites qui se coupent en* p′, *la polaire de* p′ *est aussi un couple de droites qui se coupent en* p.

Désignons par P le couple de droites qui se coupent en p'

et constituent la polaire de p, par P′ la polaire de p'; soit m un point quelconque. La seconde polaire mixte de p et de m passe nécessairement en p'; celle de p' et de m passera donc en p. Car ces deux droites sont les polaires de p et de p' par rapport à une même conique, savoir la polaire de m. Puisque la polaire de m par rapport à P′ passe en p, quel que soit le point m, P′ est un couple de droites qui se coupent en p.

Théorème XXII. — *Le lieu des points dont les polaires coniques par rapport à une courbe du troisième ordre se décomposent en deux droites est une autre courbe du troisième ordre.*

Considérons une droite quelconque; les polaires de tous les points de cette droite forment un faisceau de coniques, d'après le théorème IX étendu aux cubiques; à chaque point de la droite correspond une conique du faisceau et réciproquement. Comme il y a dans le faisceau trois couples de droites, les trois couples de cordes communes, il y a sur la droite trois points dont les polaires sont décomposables. Le lieu cherché, étant coupé en trois points par une droite arbitraire, est du troisième ordre. Il est évident, d'après le théorème XXI, que si l'on considère un point quelconque de cette courbe, le point de concours des droites qui forment sa polaire appartient aussi à la courbe. Ce lieu remarquable est la *hessienne* de la cubique donnée.

Remarque. — Quand on applique le même procédé de recherche à une courbe d'ordre n, c'est-à-dire quand on cherche le lieu des points dont les premières polaires (d'ordre $m - 1$) ont un point double, on trouve un lieu d'ordre $3(m-2)^2$, appelé courbe de Steiner. La hessienne ne coïncide pas avec cette courbe; c'est le lieu des points doubles des premières polaires ou encore le lieu des points dont les polaires coniques ($n - 2^{\text{mes}}$ polaires) sont décomposables; elle est, comme on sait, d'ordre $3(m-2)$. La coïncidence des courbes de Steiner et de Hesse a lieu seulement quand $m = 3$. Nous nous bornons à cette simple indication.

Théorème XXIII. — *La polaire conique d'un point d'inflexion est un couple de droites, et l'une d'elles est la tangente d'inflexion.*

En effet, si par le point d'inflexion i on mène une transversale qui soit la tangente elle-même, elle coupe la courbe en trois points confondus avec le pôle i lui-même; tout point de la tangente peut être considéré comme un centre harmonique, puisque les trois coefficients de l'équation du second degré

$$x^2 (a + b + c) - 2x (ab + bc + ca) + 3abc = 0$$

sont identiquement nuls.

Corollaire I. — Tout point d'inflexion appartient à la hessienne, d'après le théorème XXII, et par suite toute cubique a neuf points d'inflexion (réels ou imaginaires).

Corollaire II. — La droite J qui, avec la tangente d'inflexion, complète la polaire conique du point d'inflexion i, est évidemment le lieu du conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux points où une transversale issue de i coupe la courbe. On reconnaît aisément que le point i possède, par rapport à la courbe et à la droite J, toutes les propriétés qui dans les coniques appartiennent à un point extérieur et à sa polaire rectiligne. Ainsi les tangentes menées du point d'inflexion passent par les trois points où J coupe la courbe.

Corollaire III. — Si trois droites coupent la cubique respectivement en $(a\ a'\ a'')$ $(b\ b'\ b'')$ $(c\ c'\ c'')$ et si $(a\ b\ c)$, $(a'\ b'\ c')$ sont en ligne droite, $(a''\ b''\ c'')$ sont aussi en ligne droite. Si les points $(a\ b\ c)$ coïncident avec un point d'inflexion i, les deux droites $(a'\ b'\ c')$, $(a''\ b''\ c'')$ se couperont sur la droite J; si de plus $(a'\ b'\ c')$ coïncident, il en sera de même de $(a''\ b''\ c'')$, et nous en concluons que la droite qui joint deux points d'inflexion passe par un troisième point d'inflexion.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

Par M. **E.-J. Boquel.**

Définition des formes quadratiques.—Une fonction homogène du second degré de n variables, x_1, x_2, . . . x_n, est nécessairement de la forme $f = \Sigma a_{i,k} x_i x_k$, où la somme Σ porte sur toutes les valeurs de i et de k depuis 1 jusqu'à n, $a_{i,k}$ désignant le coefficient du terme formé par le produit de deux variables x_i et x_k.

Si le coefficient $a_{i,k}$ est égal au coefficient $a_{k,i}$, les deux termes $a_{i,k} x_i x_k$ et $a_{k,i} x_k x_i$ se réunissent en un seul $2a_{ik} x_i x_k$, et la fonction f prend la forme suivante : $f = a_{1,1} x_1^2 + a_{2,2} x_2^2 + \ldots + a_{n,n} x_n^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + \ldots$

Cette dernière fonction porte le nom de *forme quadratique.*

Décomposition des formes quadratiques en somme de carrés. — Une forme quadratique se décompose toujours en somme de carrés. Il peut se présenter deux cas : 1° l'un au moins des carrés des variables existe; 2° tous les carrés manquent.

1° Supposons que l'un au moins des coefficients des carrés ne soit pas nul, par exemple, $a_{11} \gtrless 0$.

La forme considérée peut s'écrire $f = a_{1,1} x_1^2 + 2 P x_1 + Q$, P et Q étant des fonctions des variables x_2, . . . x_n, autres que x_1, telles que $P = a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 + \ldots + a_{1,n} x_n$ et $Q = a_{2,2} x_2^2 + \ldots + a_{n,n} x^2 + 2a_{2,3} x_2 x_3 + \ldots$ On aura alors :

$$a_{1,1} f = a^2_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,1} P x_1 + a_{1,1} Q$$
$$= (a_{1,1} x_1 + P)^2 + a_{1,1} Q - P^2.$$

Il est clair que $a_{1,1} Q - P^2$ est une fonction homogène, et du second degré des variables x_2, x_3, . . . x_n, autres que x_1. En opérant sur cette fonction comme sur la proposée, on la ramènera à un carré renfermant les variables x_2, x_3, . . . x_n, augmenté d'une fonction homogène et du second degré des variables x_3, x_4, . . . x_n, autres que

x_1 et x_2, et en continuant ainsi l'application du même calcul, on ramènera la forme proposée à être la somme de n carrés de fonctions linéaires et homogènes des variables $x_1, x_2 \ldots x_n$, le premier carré renfermant toutes les variables, le second n'en renfermant plus que $n - 1$, le troisième $n - 2$, et ainsi de suite jusqu'au n^{me}, qui n'en renfermera plus qu'une.

2° Si tous les carrés manquent dans la forme proposée, on peut écrire: $f = 2a_{1,2}x_1x_2 + 2Px_1 + 2Qx_2 + R$,
P, Q étant des fonctions du premier degré et R une fonction du second degré ne contenant ni x_1, ni x_2.

Or on a :

$$2a_{1,2}f = 4a_{1,2}^2\, x_1\, x_2 + 4a_{1,2}\, Px_1 + 4a_{1,2}Qx_2 + 2a_{1,2}R,$$

c.-à-d. $2a_{1,2}f = 4(a_{1,2}x_1 + Q)\,(a_{1,2}x_2 + P) + 2a_{1,2}R - 4PQ$

Or on a identiquement :

$$4(a_{1,2}x_1 + Q)\,(a_{1,3}x_2 + P) = (a_{1,2}x_1 + Q + a_{1,2}x_2 + P)^2 - (a_{1,2}x_1 + Q - a_{1,2}x_2 - P)^2$$

et comme la fonction $2a_{1,2}R - 4PQ$ ne contient plus les variables x_1 et x_2, on aura ramené la forme f à être une somme algébrique de 2 carrés, suivie d'une fonction homogène du second degré des $n - 2$ variables $x_3, x_4 \ldots x_n$, autres que x_1 et x_2.

En continuant de proche en proche l'application du même calcul, on voit qu'on aura finalement une somme algébrique de n carrés, dont les deux premiers contiendront les n variables, les deux suivants $n - 2$ variables seulement, les deux suivants $n - 4$ des variables, et ainsi de suite jusqu'au groupe des deux derniers qui contiendront les deux dernières variables.

On peut donc énoncer dans tous les cas la proposition suivante : *Étant donnée une forme quadratique dépendant de* n *variables, on peut toujours la décomposer en une somme algébrique de carrés, dont le nombre est* AU PLUS *égal au nombre des variables.*

Nous disons *au plus :* car il pourra se faire, dans des cas particuliers sur lesquels nous aurons à revenir, que quelques-uns de ces carrés disparaissent.

Il est utile d'observer que les fonctions linéaires entrant

sous les carrés sont généralement indépendantes les unes des autres ; car en donnant à ces fonctions des valeurs arbitraires, on en déduira, en remontant, un système de valeurs de x_n, $x_{n-1}, \ldots$ x_2, x_1, uniques et bien déterminées. Il est donc impossible, dans le cas général, qu'il existe entre ces fonctions linéaires $A_1, A_2, \ldots$ A_n, une relation identiquement satisfaite, telle que

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots. + \lambda_n A_n = 0$$

où λ_1, $\lambda_2 \ldots$ λ_n seraient des constantes.

Or c'est précisément l'absence d'une telle relation qui constitue l'indépendance des fonctions linéaires $A_1, A_2, \ldots$ A_n.

Loi de l'inertie des formes quadratiques. — M. Sylvester a démontré que les formes quadratiques jouissent d'une propriété très importante dont voici l'énoncé :

Etant donnée une forme quadratique f, il existe évidemment bien des manières différentes de la décomposer en somme de carrés. Parmi ces carrés les uns sont affectés du signe $+$, les autres du signe $-$.

Le théorème consiste en ce que *le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs sont toujours les mêmes, quelle que soit la voie suivie pour la décomposition.*

M. Laurent a donné récemment, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, une démonstration intéressante de cette loi d'inertie. Celle que nous adopterons ici est due à Jacobi ; elle ne suppose pas que le nombre des carrés soit précisément égal au nombre des variables ; celles-ci peuvent être au contraire en nombre supérieur au nombre des fonctions linéaires entrant sous les carrés.

Supposons donc qu'on ait décomposé la forme considérée de deux manières, et soit

1° $f = R_1^2 + R_2^2 + \ldots + R_i^2 - S_1^2 - S_2^2 - \ldots - S_k^2$,

$i + k$ étant le nombre des carrés, et les fonctions linéaires $R_1, R_2, \ldots$ $S_1, S_2, \ldots$ étant supposées indépendantes les unes des autres;

2° $f = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_m^2 - V_1^2 - V_2^2 - \ldots - V_n^2$,

$m + n$ étant le nombre des carrés de cette seconde

décomposition, et $U_1, U_2, \dots V_1, V_2, \dots$ étant ou n'étant pas indépendantes.

Établissons qu'on a $m \geqq i$ et $n \geqq k$.

En effet, si l'on avait $m < i$, on en déduirait $m + k < i + k$. Considérant alors les $i + k$ fonctions indépendantes $R_1\ R_2 \dots R_i$, $S_1, S_2, \dots S_k$, et en même temps les $m + k$ fonctions dépendantes ou indépendantes $S_1, S_2, \dots S_k, U_1, U_2, \dots U^m$, on pourrait donner aux variables des valeurs telles que les $m + k$ secondes fonctions seraient nulles sans que les $i + k$ premières le fussent toutes à la fois; on aurait alors

$$f = R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_i^2 = - V_1^2 - V_2^2 - \dots - V_n^2;$$

ce qui est évidemment absurde.

m ne peut donc pas être moindre que i, et on reconnaîtrait par un raisonnement analogue que n ne peut pas être moindre que K.

Admettons maintenant que les $m + n$ fonctions de la seconde composition soient indépendantes, que les $i + k$ premières le soient ou non, on aura, en vertu du raisonnement précédent, $i \geqq m$ et $k \geqq n$.

Dès lors, si les fonctions obtenues dans les deux décompositions sont indépendantes, ce que nous supposerons, on ne pourra satisfaire aux conditions établies qu'en faisant $i = m$ et $n =$ K, ce qui démontre la *loi d'inertie* énoncée.

Définition de l'invariant d'une forme quadratique. — Considérons une forme quadratique $f = \Sigma a_{i,k} x_i x_k$ renfermant n invariables $x_1, x_2, \dots x_n$.

Représentons par $f_1, f_2, \dots f_n$ les demi-dérivées partielles de cette forme par rapport à chacune des variables; on aura évidemment :

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

On appelle *invariant* de la forme f le *déterminant* des coefficients des variables $x_1, x_2, \dots x_n$ dans ces n relations.

Il est facile de voir qu'en vertu de la définition des formes quadratiques, a_{ik} étant égal à a_{ki}, cet invariant est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

Théorème. — *Si l'on fait une substitution linéaire dans une forme quadratique, on obtient une autre forme dont l'invariant est égal à celui de la première forme multiplié par le carré du déterminant de la substitution.*

Rappelons d'abord que, en général, faire une substitution linéaire, c'est remplacer certaines variables x, y, z,... par des fonctions linéaires et homogènes d'autres variables x', y', z',...

Prenons pour exemple le cas de trois variables; les raisonnements se font de la même manière pour un plus grand nombre de variables, et nous aurons une écriture plus simple.

La substitution linéaire sera de la forme

$$\begin{cases} x = ax' + by' + cz' \\ y = a'x' + b'y' + c'z' \\ z = a''x' + b''y' + c''z' \end{cases}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ que l'on suppose toujours $\lessgtr$ o s'appelle le *déterminant de la substitution.*

Après une première substitution, on peut en faire une seconde déterminée par les relations.

$$\begin{cases} x' = \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' \\ y' = \alpha' x'' + \beta' y'' + \gamma' z'' \\ z' = \alpha'' x'' + \beta'' y'' + \gamma'' z'' \end{cases}$$

x, y, z s'expriment alors au moyen des variables x'', y'', z'', et il est facile de voir que le déterminant de la substitution résultante est le produit des déterminants des deux substitutions composantes ; car on a :

$$x = (a\alpha + b\alpha' + c\alpha'')x'' + (a\beta + b\beta' + c\beta'')y'' + (a\gamma + b\gamma' + c\gamma'')z''$$
$$y = (a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'')x'' + (a'\beta + b'\beta' + c'\beta'')y'' + (a'\gamma + b'\gamma' + c'\gamma'')z''$$
$$z = (a''\alpha + b''\alpha' + c''\alpha'')x'' + (a''\beta + b''\beta' + c''\beta'')y'' + (a''\gamma + b''\gamma' + c''\gamma'')z''$$

et le déterminant de cette substitution finale n'est autre chose que le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

On voit aussi, au moyen d'un raisonnement très usité en mathématiques (logarithme d'un produit, module d'un produit, etc.), que, si l'on fait plusieurs substitutions successives, le déterminant de la substitution résultant sera le produit de tous les déterminants des substitutions considérées.

Cela posé, soit une forme quadratique à trois variables x_1, x_2, x_3; on peut la mettre sous la forme suivante :

$$f = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \quad (1)$$
$$+ x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

Considérons la substitution

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 \\ x_2 = \alpha_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \gamma_2 X_3 \\ x_3 = \alpha_3 X_1 + \beta_3 X_2 + \gamma_3 X_3 \end{cases} \quad (2)$$

Portons d'abord les valeurs (2) dans les fonctions linéaires mises entre parenthèses dans (1); nous aurons :

$$f = x_1(M_{11}X_1 + M_{12}X_2 + M_{13}X_3 + x_2(M_{21}X_1 + M_{22}X_2 + M_{23}X_3) \quad (3)$$
$$+ x_3(M_{31}X_1 + M_{32}X_2 + M_{33}X_3)$$

les quantités ainsi représentées par les lettres M étant les suivantes :

$$M_{11} = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3$$
$$M_{12} = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3$$
$$M_{13} = a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3 \quad \text{etc.}$$

et le déterminant $\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$ étant précisément

le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \text{ et } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \delta$$

Achevons la substitution en portant les valeurs (2) à la place des variables mises en facteurs dans (1), ou, ce qui revient au même, à la place de ces mêmes variables dans (3) écrite comme il suit :

$$f = X_1(M_{11}x_1 + M_{21}x_2 + M_{31}x_3) + X_2(M_{12}x_1 + M_{22}x_2 + M_{32}x_3)$$
$$+ X_3(M_{13}x_1 + M_{23}x_2 + M^{\varepsilon}_{3}x_3)$$

il vient :

$$F = X_1(P_{11}X_1 + P_{21}X_2 + P_{31}O_3) + X_2(P_{12}X_1 + P_{22}X_2 + P_{32}X_3)$$
$$+ X_3(P_{13}X_1 + P_{23}X_2 + P_{33}X_3)$$

les quantités ainsi représentées par les lettres P étant les suivantes :

$$P_{11} = M_{11}\alpha_1 + M_{21}\alpha_2 + M_{31}\alpha_3$$
$$P_{21} = M_{11}\beta_1 + M_{21}\beta_2 + M_{31}\beta_3, \quad \text{etc.}$$

et le déterminant $\begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix}$ qui est l'invariant de la forme nouvelle F,

étant précisément le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \Delta\delta \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \delta$$

c.-à-d. le produit $\Delta\delta^2$.

Or Δ est ce que nous avons défini l'invariant de la forme f, et δ est le déterminant de la substitution. Donc le théorème est démontré.

(A suivre.)

RECHERCHE DES FACTEURS COMMENSURABLES

D'UNE ÉQUATION DE DEGRÉ QUELCONQUE,

Par **M. G. de Longchamps,** professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Lorsqu'un polynôme entier $F(x)$, est le produit de deux facteurs, dont l'un

$$f = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots + \alpha p$$

est de degré p et a tous ses coefficients commensurables, on dit que f est *un facteur commensurable d'ordre* p, de l'équation

$$F(x) = o.$$

La recherche de ces facteurs se fait ordinairement par la méthode de Lagrange, laquelle, comme on le sait, consiste à diviser F par f et à écrire que le reste, polynôme de degré $(p - 1)$, est identiquement nul. Le procédé que nous allons exposer nous paraît remplir le même but, par des calculs

plus simples. Le principe qui leur sert de base, et qui est des plus élémentaires, nous a été inspiré par la lecture d'une note de M. Landry (*), dans laquelle ce géomètre expose une manière ingénieuse de trouver les facteurs de la forme $(x^p - a)$, a étant un nombre commensurable.

1. M. Landry, dans le mémoire cité, part de cette remarque évidente que l'équation proposée peut s'écrire :

$$\varphi_1(x^p) + x\varphi_2(x^p) + \ldots + x^{p-1}\varphi_p(x^p) = 0.$$

Il faut remarquer pour apprécier la simplicité de la méthode, que ces fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$, sont immédiatement déterminées, à la seule inspection de l'équation proposée. Soit α une racine quelconque de l'équation $x^p - a = 0$; elle est donc racine de l'équation proposée, ce qui donne l'égalité

$$\varphi_1(a) + \alpha\varphi_2(a) + \ldots + \alpha^{p-1}\varphi_p(a) = 0.$$

Considérons maintenant l'équation

$$\varphi_1(a) + X\varphi_2(a) + \ldots + X^{p-1}\varphi_p(a) = 0 \quad (1)$$

qui est de degré $p - 1$ et satisfaite par p *nombres différents*, savoir les p racines de l'équation binôme $x^p - a = 0$; l'équation (1) est donc une *identité*, et l'on a

$$\varphi_1(a) = 0 \quad \varphi_2(a) = 0 \ldots \quad \varphi_p(a) = 0. \qquad (2)$$

Il faut remarquer que parmi ces équations, deux ou trois sont *distinctes ;* autrement les fonctions

$$\varphi_1(x^p), \quad \varphi_2(x^p) \ldots \quad \varphi_p(x^p)$$

seraient identiques à des facteurs constants près, et l'équation se décomposerait en deux facteurs,

$$\varphi_1(x^p) = 0$$

$$A_1 + A_2x + \ldots + A_p x^{p-1} = 0;$$

et en posant $x^p = y$, les facteurs commensurables de la forme $(x^p - a)$ sont donnés par les racines commensurables de l'équation $\varphi_1(y) = 0$.

Ce cas exceptionnel, et d'ailleurs favorable, étant mis de côté, on voit donc que le nombre cherché a doit être racine des p équations (2). On cherchera le p. g. c. d. des polynômes,

$$\varphi_1(y), \quad \varphi_2(y) \ldots \quad \varphi_p(y),$$

(*) *Équations numériques; Racines commensurables de tous les degrés.* Librairie Hachette, 1870.

soit $\Psi(y)$ ce p. g. c. d. et a une racine commensurable de l'équation $$\Psi(y) = 0.$$
$(x^p - a)$ est un facteur de l'équation donnée.

En résumé, *ayant formé, chose qui se fait immédiatement, les fonctions* $$\varphi_1(y) \quad \varphi_2(y) \ldots \quad \varphi_p(y):$$

1° *Si elles n'ont pas de p. g. c. d., on peut affirmer que l'équation proposée n'a pas de facteur (commensurable ou non) de la forme* $(x^p - a)$;

2° *Si elles ont un p. g. c. d.* $\Psi(y)$ *et si l'équation* $\Psi(y) = 0$ *admet des racines commensurables* a, b,. . . *l'équation donnée admet les facteurs commensurables* $(x^p - a)$, $(x^p - b)$. . . ;

3° *Si l'équation* $\Psi(y) = 0$ *n'a pas de racine commensurable, l'équation donnée n'a pas de facteur commensurable de la forme* $(x^p - a)$, *mais elle se décompose en deux facteurs commensurables dont l'un est* $\Psi(x^p)$.

2. — Telle est, rapidement exposée, cette méthode de M. Landry qui nous paraît d'une pratique commode; il nous reste à dire comment nous l'avons étendue à la recherche d'un facteur commensurable d'ordre p et *quelconque*.

Nous ferons d'abord la remarque qu'après avoir posé
$$y = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots \alpha_{p-1} x \qquad (1)$$
on peut toujours écrire *identiquement* l'équation donnée $F(x)$ sous la forme
$$F(x) = f_1(y) + x f_2(y) + \ldots + x^{p-1} f_p(y). \qquad (2)$$
En effet de (1) on tire
$$x^p = y - \alpha_1 x^{p-1} \ldots - \alpha_{p-1} x$$
et, par suite,
$$x^{p+1} = yx - \alpha^{p-1} x^2 \ldots - \alpha_1 x^p$$
ou,
$$x^{p+1} = yx - \alpha^{p-1} x^2 \ldots - \alpha_2 x^{p+1} - \alpha_1(y - \alpha_1 x^{p-1} \ldots - \alpha^{p-1} x);$$
x^{p+1} est donc comme x^p donné par une expression de la forme,
$$A_1 + A_2 x \ldots + A_p x^{p-1}; \qquad (3)$$
$A_1, A_2, \ldots A_p$ étant fonction des lettres $y, \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}$, mais pas de la lettre x. De x^{p+1}, on déduira par un calcul semblable et de proche en proche pour x^{p+2}, x^{p+3}, . . .

des expressions de la forme (3); substituant alors dans F, x^p, x^{p+1}, . . . x^m par ces expressions ainsi calculées, F prendra bien la forme indiquée.

3. — Ceci posé, soit

$$f = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ . \ . \ . + \alpha_{p-1} x - \alpha_p ,$$

un facteur commensurable de l'équation $F(x) = 0$, qui est supposée n'avoir que des racines simples; et désignons par α une racine *quelconque* de $f = 0$, α sera aussi racine de $F = 0$ et en remplaçant x par α, dans (3), remarquant en même temps que

$$\alpha^p + \alpha^1, \alpha^{p-1} + \ . \ . \ . + \alpha_{p-1}\alpha = \alpha_p ,$$

que par suite la lettre y qui figure dans cette identité prend pour $x = \alpha$ la valeur α_p, il vient

$$0 = f_1(\alpha_p) + \alpha f_2(\alpha_p) + \ . \ . \ . + \alpha^{p-1} f_p(\alpha_p),$$

et si l'on considère l'équation,

$$X^{p-1} f_p(\alpha_p) + \ldots + X f_2(\alpha_p) + f_1(\alpha_p) = 0.$$

Celle-ci, étant satisfaite par les p racines différentes de l'équation $f = 0$, *est une identité* et l'on a, pour déterminer les p inconnues α_1, α_2, ... α_p, les p équations

$$f_1(\alpha_p) = 0, \ f_2(\alpha_p) = 0 \ \ldots \ f_p(\alpha_p) = 0.$$

L'élimination de α_2, α_3,... α_p, si elle se fait sans introduction de facteurs étrangers, conduira à une équation en α_1 de degré $C_m{}^p$, parce que $(-\alpha_1)$ représente la somme de *p racines quelconques* de l'équation donnée. On cherchera, par la méthode ordinaire, les racines commensurables de cette équation ; ayant trouvé l'une de ces racines α_1, la détermination des autres inconnues α_2,... α_p, se fait *généralement* par des équations qui ne sont *que du premier degré*. En effet, considérons α_2 par exemple ; il y a entre α_1 et α_2 deux équations, et par des combinaisons connues et généralement possibles on pourra obtenir une équation en α_1 et α_2, ne renfermant α_2 qu'au premier degré.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques spéciales.

209. — a, b, c, d, désignant des nombres entiers et positifs $(1+x)^{6a+1} + (1+x)^{b6+2}$ est divisible par x^2+x+1;
$x^{3a-1} + x^{3b} + x^{3c+1}$ est divisible par x^2+x+1;
$x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$ est divisible par x^3+x^2+x+1.

(H. Laurent.)

210. — La valeur de la série

$$\frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)} + \frac{a_3}{a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} + \dots$$

est *un* si le produit

$$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\dots$$

est infini, ce qui a lieu en particulier si la série à termes positifs $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
est divergente.

La série précédente est convergente si le produit tend vers une limite déterminée; elle est divergente si le produit est nul ou indéterminé. *(H. Laurent.)*

211. — L'équation

$$Kx^m + \frac{x^{m-1}}{1} + \frac{x^{m-2}}{2} + \frac{x^{m-3}}{3} + \dots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires si m est pair, et une seule racine réelle si m est impair. K est quelconque.

(H. Laurent.)

212. — Soit V un polynôme entier en x; V_1 sa dérivée. On peut toujours trouver un polynôme X tel que $XV_1 - 1$ soit divisible par V; soit V_2 le quotient, on détermine V_3 à l'aide de V_1 et de V_2 comme on a déterminé V_2 à l'aide de V et V_1, etc. La suite V, V_1, V_2, V_3... peut remplacer la suite de Sturm si $V = 0$ n'a pas de racines égales.

(H. Laurent.)

213. — Soit l'équation à coefficients positifs

$$x - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \dots = 0,$$

il y aura des racines imaginaires si l'une des conditions suivantes est remplie : $b > \frac{m-1}{1.2.m} a^2$;

$$c > \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3.m^2} a^3 \ldots$$

(H. Laurent.)

214. — Faire voir, à l'aide de la seule théorie des logarithmes que si l'on trace les courbes représentées par les équations

$$y = a^x, \; y = b^x,$$

l'une d'elles deviendra la projection de l'autre si on fait tourner son plan d'un angle convenable autour de l'axe des y. — Exprimer cet angle en fonction du module relatif des deux systèmes de logarithmes correspondants. *(Picquet.)*

215. — Démontrer que pour trouver la dérivée d'un déterminant dont tous les éléments sont fonction d'une même variable, il suffit de faire la somme des déterminants obtenus en remplaçant dans le déterminant proposé tous les éléments d'une colonne par leurs dérivées. *(Picquet.)*

216. — Trouver les dérivées des fonctions circulaires inverses

$$\text{arc sin x, arc cos x, arc tg x}$$

en s'appuyant seulement sur la définition de la dérivée et sur les formules inverses de l'addition des arcs :

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc sin} \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\text{arc cos } x + \text{arc cos } y = \text{arc cos} \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } x = \text{arc tg } \frac{x+y}{1-xy}.$$

(Picquet.)

217. — Étant données deux circonférences C et C' tangentes entre elles, et une de leurs tangentes extérieures AB, on mène une circonférence C'' tangente aux deux circonférences proposées et à AB, puis une circonférence C''' tangente à C, à C'' et à AB, et ainsi de suite. On propose d'étudier les séries formées par les rayons de ces circonférences successives et par les surfaces des mêmes cercles. On donne AB $= 2a$, et AC $=$ R.

218. — Soit la série

$$1+\frac{x}{x+p+1}+\frac{x(x+1)}{(x+p+1)(x+p+2)}+\ldots$$
$$+\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{(x+p+1)(x+p+2)\ldots(x+p+n+1)}+\ldots$$

on demande d'établir que cette série est convergente quand p est positif, divergente quand p est négatif, et de déduire de la considération de cette suite une démonstration du théorème de Duhamel. Examiner aussi le cas intermédiaire où $p=0$.

219. — Démontrer la règle de Leibnitz pour trouver la dérivée n^{me} d'un produit uv de deux fonctions de x :

$$y_{(n)}=vu_{(n)}+C_1^n v'u_{(n-1)}+C_2^n v''u_{(n-2)}+\ldots$$

en démontrant que, si cette règle est vraie pour la dérivée d'ordre $(n-1)$, elle est encore vraie pour la dérivée d'ordre n. Appliquer ce théorème à la recherche de la dérivée n^{me} de la fonction $\quad y=e^{ax}\cos(mx+p)$.

220. — Soit la fonction $\quad y=\dfrac{x-a}{x^2+1}$.

1° Démontrer qu'en désignant par $y', y'',\ldots y_{(n)}$ les dérivées successives de y, on a entre trois dérivées consécutives la relation

$$(x^2+1)\,y_{(n)}+2nxy_{(n-1)}+n\,(n-1)\,y_{(n-2)}=0.$$

2° Démontrer que si l'on pose

$$y_{(n)}=(-1)^n\,1.2.3\ldots n\,\frac{V_{n+1}}{(1+x^2)^{n+1}},$$

V_{n+1} est un polynôme en x du degré $(n+1)$, dont le premier terme est x^{n+1}, et que, entre trois polynômes consécutifs, on a la relation

$$V_n-2xV_{n-1}+(1+x^2)\,V_{n-2}=0.$$

3° En faisant $V=1$, le théorème de Sturm s'applique à la suite des polynômes V_n, V_{n+1}, etc. et les racines de l'équation $V_n=0$ séparent celles de l'équation $V_{n-1}=0$.

4° Les coefficients de V sont des fonctions linéaires de la constante a, et en posant

$$V_n=P_n-aQ_n\text{, on a, si } x=\operatorname{cotg}.\varphi;$$
$$\operatorname{cotg} n\varphi=\frac{P_n}{Q_n}.$$

Conclure de là des expressions trigonométriques des racines de l'équation $V_n=0$.

Remarque. — On pourra établir cette relation en posant :

$$u_n = \frac{\cos n\varphi}{\sin^n \varphi} - a \frac{\sin^n \varphi}{\sin^n \varphi},$$

et prouvant que u_n est un polynôme entier en x de degré n où l'on fait $x = \cot g\ \varphi$, et que trois polynômes consécutifs sont liés par la relation

$$u_n - 2xu_{n-1} + (1 + x^2)\ u_{n-2} = 0.$$

5° On propose d'établir que les polynômes V_n satisfont aux deux équations suivantes :

$$nV_{n+1} = 2\ nxV_n - (2 + x^2)\ V'_n\ ;$$
$$(1 + x^2)\ V''_n - 2\ (n - 1)\ x\ V'_n + n\ (n - 1)\ V_n = 0.$$

ERRATUM

Dans l'énoncé de la question 202, il s'est glissé une erreur ; la seconde équation doit être écrite comme il suit :

$$xy + xz - yz = b\ [(a + c)\ (a - c)\ (2a - b) + 2ab^2].$$

Cette correction est indispensable pour obtenir des valeurs commensurables de x, y, z, ce qui est tout l'intérêt de la question.

AVIS

Il reste à résoudre les questions : 175, 184, 185, 186, 192, 193, 200, 201, 202, 203, 204.

Toutes les autres questions sont déjà insérées, ou le seront prochainement.

A ce sujet, nous rappellerons les avis que nous avons déjà donnés pour la solution des questions proposées.

Chaque solution doit être mise sur une feuille séparée, portant le nom de celui qui a résolu la question, l'établissement auquel il appartient, le numéro de la question et l'énoncé.

La figure doit être faite à part avec beaucoup de soin, de façon à ce qu'elle puisse être reproduite directement en cas de besoin.

Toute solution qui ne remplirait pas ces conditions peut parfaitement échapper à notre examen, et nous ne répondons pas de son insertion.

Nous rappelons que, à moins d'avis contraire, nous n'acceptons pas de solution de professeurs pour les questions proposées.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 24080-9.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE

ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au lycée Louis-le-Grand.

I. **Définition.** — *Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à une droite fixe et à un point fixe est constant, est une* ellipse *ou une* hyperbole, *suivant que ce rapport est plus grand ou plus petit que l'unité.*

Dans le cas où ce rapport est égal à l'unité, la courbe est une parabole, et l'étude de cette courbe est faite, d'après cette définition, dans tous les traités de géométrie élémentaire.

Soient *(fig. 1)*, M un point du lieu, D la droite et F le point fixe, FD, MP perpendiculaires sur la droite D, h la distance des deux parallèles MP et FD, FD $= d$, $\frac{m}{n}$ le rapport donné.

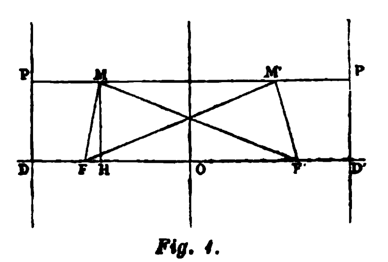


Fig. 1.

En prenant pour inconnue la distance MP $= x$, on déterminera le nombre des points du lieu situés sur une parallèle à FD.

On a, par définition, $\frac{\text{MP}}{\text{MF}} = \frac{m}{n}$.

En abaissant la perpendiculaire MH sur FD, on a le triangle rectangle MFH qui donne

$$\overline{\text{MF}}^2 = h^2 + (x - d)^2,$$

d'où, en vertu de la proportion précédente,

$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + (x - d)^2}} = \frac{m}{n}.$$

Élevant au carré et développant par rapport à x, on obtient

l'équation

$$x^2 (m^2 - n^2) - 2 dm^2 x + m^2 (h^2 + d^2) = 0. \quad (1)$$

Cette équation est du second degré; elle indique qu'il existe deux points M et M′ du lieu sur la ligne MP, et si l'on convient d'appeler *degré* d'une courbe le nombre des points où elle est coupée par une droite, on dira que l'ellipse et l'hyperbole sont des courbes du second degré.

II. *L'ellipse et l'hyperbole ont deux axes de symétrie.* — L'équation (1) est indépendante du signe de h; donc il existe une seconde parallèle à FD, symétrique de la première MP par rapport à FD; cette parallèle renferme également deux points du lieu donnés par la même équation (1), ce qui prouve que ces deux points sont exactement à la même distance de D que les points M et M′; la ligne FD est donc un axe de *symétrie*.

Soient x' et x'' les racines de l'équation (1); on a

$$x' + x'' = \frac{2dm^2}{m^2 - n^2},$$

relation indépendante de h;

Si l'on prend sur DF, et à partir du point D, une longueur DO égale à $\frac{x' + x''}{2}$, c'est-à-dire égale à $\frac{dm^2}{m^2 - n^2}$, et si au point O on élève une perpendiculaire à FD, les points M et M′ seront symétriquement placés par rapport à cette perpendiculaire. Comme la somme $x' + x''$ est indépendante de h, il en sera de même des points de chaque parallèle à FD. La courbe possède donc un second axe de symétrie, perpendiculaire au premier; on sait qu'alors elle possède un *centre*, qui est le point d'intersection des deux axes.

Corollaire I. — Il existe par suite un second point F′ et une seconde droite D′, symétriques du point F et de la droite D et possédant par rapport à tous les points du lieu les mêmes propriétés que ce point F et cette droite D.

Corollaire II. — On a, par définition,

$$\frac{\text{MP}}{\text{MF}} = \frac{\text{M'P}}{\text{M'F}} = \frac{m}{n};$$

or, à cause de la symétrie,

$$\frac{M'P}{M'F} = \frac{MP'}{MF'},$$

et par suite : $\frac{MP}{MF} = \frac{MP'}{MF'} = \frac{MP' \pm MP}{MF' \pm MF} = \frac{m}{n}$. (2)

III. — Les propriétés précédentes sont communes à l'ellipse et à l'hyperbole; comment, partant de la définition, peut-on caractériser chacune de ces courbes?

L'équation (1) donne pour le produit de ces racines :

$$x'x' = \frac{m^2 (h^2 + d^2)}{m^2 - n^2},$$

et ce produit est positif si $m > n$, négatif si $m < n$.

1° $m > n$; *ellipse.* — Dans le premier cas, $m > n$, la courbe est une ellipse; de ce que la somme $x' + x''$ est également positive, on en conclut que les deux valeurs x' et x'' sont positives. Si l'on porte à droite du point P les valeurs positives, on voit que les points M et M' sont compris entre les deux droites D et D'; en prenant dans la dernière proportion (2) le signe +, on a

$$\frac{MP' + MP}{MF' + MF} = \frac{m}{n};$$

or $$MP' + MP = \frac{2dm^2}{m^2 - n^2},$$

et par suite $$MF + MF' = \frac{2dmn}{m^2 - n^2}.$$

Cette somme est constante; donc, *l'ellipse est aussi le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.*

Les points F et F' sont les *foyers* de l'ellipse; MF et MF', les *rayons vecteurs*; les droites D et D', les *directrices.*

L'ellipse est une courbe fermée. — En effet le produit $x'\,x''$ ne peut dépasser un certain maximun qui a lieu lorsque $x' = x''$, puisque la somme $x' + x''$ est constante; alors

$$x' = x'' = \frac{dm^2}{m^2 - n^2},$$

Pour avoir la distance de ce point à la droite FD, il faut dans le produit $x'\,x''$ remplacer x et x' par cette valeur, ce

qui donne $\dfrac{d^2m^4}{(m^2-n^2)^2}=\dfrac{m^2(h^2+d^2)}{m^2-n^2}$,

d'où l'on tire $$h^2=\frac{d^2n^2}{m^2-n^2}.$$

La parallèle menée à cette distance à la droite FD est tangente à l'ellipse ; et cette valeur de h est la longueur du demi-petit axe.

Quant à la valeur minimum du produit $x'x''$, elle a lieu pour $h=o$, ce qui donne les deux points de la courbe situés sur FD ; les perpendiculaires à FD menées par ces deux points sont évidemment tangentes à l'ellipse ; leur distance constitue la longueur du grand axe de l'ellipse. La courbe est donc renfermée entre quatre droites perpendiculaires deux à deux et constituant un rectangle, dont les côtés ont même longueur que les axes de la courbe.

2° $m<n$; *hyperbole.* — Le produit $x'x''$ est négatif ; les deux points M et M' sont de part et d'autre de la droite D. Soit x' la racine positive, x'' la racine négative ; la différence de ces racines est
$$x'-x''=\frac{2dmn}{m^2-n^2};$$
elle est essentiellement positive ; comme $m<n$, il faut que l'on ait $d<o$; alors la somme
$$x'+x''=\frac{2dmn}{m^2-n^2}$$
est positive ; donc la racine positive est plus grande en valeur absolue que la racine négative. Il est facile de conclure de ce qui précède que les foyers F et F' sont en dehors de l'intervalle compris entre les deux droites D et D' comme l'indique la *figure 2*.

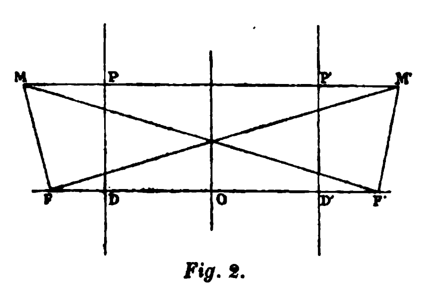


Fig. 2.

Dans ce cas, on prendra le signe — dans la dernière proportion (1) et on aura
$$\frac{MP'-MP}{MF'-MF}=\frac{MP-MP'}{MF-MF'}=\frac{m}{n}.$$

or $$MP - MP' = \frac{2dm^2}{n^2 - m^2},$$

d'où $$MF - MF' = \frac{2dmn}{n^2 - m^2}.$$

Cette différence est constante ; donc, *l'hyperbole est le lieu des points tels que la différence de leurs distances à deux points fixes est constante.*

L'hyperbole est une courbe à branches infinies. — En effet, x' et x'' peuvent avoir des valeurs aussi grandes que possible, pourvu que la différence $x' - x''$ reste constante ; h pourra également prendre toutes les valeurs possibles, ce qui prouve que la courbe a des points sur toute parallèle à FD.

Comme pour l'ellipse, le minimum du produit $x'x''$ en valeur absolue a lieu pour $h = o$; à cette valeur correspondent les deux points de la courbe situés sur l'axe FD ; et si par ces points on élève des perpendiculaires à FD, on obtient deux tangentes qui limitent la courbe.

IV. **Théorème.** — *La tangente en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact.*

Pour le démontrer, on s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme. — M *est un point d'une ellipse ou d'une hyperbole,* F *un foyer et* N *le point où la tangente en* M *rencontre la directrice correspondante ; l'angle* MFN *est droit.*

Soient *(fig. 3)* M et M' deux points voisins, MP, M'P' les perpendiculaires abaissées de ces points sur la directrice et N le point où la corde MM' rencontre cette directrice ; on a, par définition,

Fig 3.

$$\frac{MP}{MF} = \frac{M'P'}{M'F'};$$

mais les triangles semblables NPM et NP'M' donnent

$$\frac{MP}{NM} = \frac{M'P'}{NM'};$$

d'où, en divisant ces deux expressions membre à membre,

$$\frac{MN}{MF} = \frac{MN'}{M'F}.$$

Cette proportion montre que le point N appartient à la bissectrice extérieure de l'angle MFM'. Si le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la corde MM' deviendra la tangente en M à la courbe, et le point N occupera sur la directrice une position telle que la ligne NF sera perpendiculaire à MF, puisque c'est avec MF que coïncidera, à la limite, la bissectrice intérieure de l'angle MFM'.

Cela étant, soient *(fig. 4)* MN une tangente limitée aux directrices; PMP' une parallèle à l'axe FD; l'angle NFM étant droit, le quadrilatère NFMP est inscriptible dans un cercle et par suite les angles NMF et NPF sont égaux.

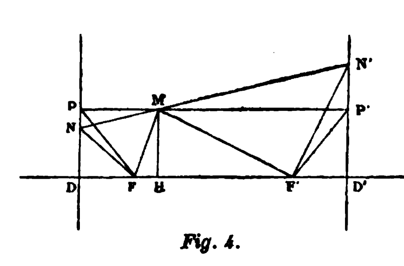


Fig. 4.

De même, le quadrilatère MF'P'N' est inscriptible dans un cercle, et il est facile de voir qu'on a

$$N'MP' = N'F'P'$$

et

$$F'MP' = F'N'P';$$

d'où par addition

$$N'MF' = N'F'P' + F'N'P';$$

or à cause du triangle F'P'N' pour lequel l'angle F'P'D' est un angle extérieur, on a

$$N'F'P' + F'N'P' = F'P'D',$$

d'où

$$N'MF' = F'P'D';$$

mais, par raison de symétrie, les angles F'P'D' et FPD sont égaux, donc il en est de même des angles FMN et F'MN'.

Corollaire. — La normale est alors bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

De ce théorème résultent les constructions connues de la tangente à l'ellipse et à l'hyperbole, et quelques propriétés

simples qu'on démontre dans les cours et qu'il est utile de rappeler ici.

I

ELLIPSE

1° *Propriétés des tangentes.*

V. — Pour introduire dans les relations obtenues jusqu'ici les paramètres qui définissent ordinairement une ellipse, savoir les longueurs des axes, on devra poser :

$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF'} = \frac{2dmn}{m^2 - n^2} = 2a \text{ et } \frac{d^2n^2}{m^2 - n^2} = b^2.$$

En divisant ces deux expressions membre à membre, après avoir élevé la première au carré, on a :

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

d'où l'on tire
$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^2}{a^2 - b^2},$$

et
$$\frac{m}{n} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{d}{c},$$

en posant
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

En divisant membre à membre les expressions posées, on a
$$\frac{m}{dn} = \frac{a}{b^2},$$

d'où
$$d = \frac{b^2}{a} \times \frac{m}{n} = \frac{b^2}{c};$$

Et enfin, la figure 4 montre que

$$\mathrm{FO} = \mathrm{OD} - \mathrm{DF} = \frac{dm^2}{m^2 - n^2} - d = \frac{dn^2}{m^2 - n^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - b^2} = c.$$

On a alors, par substitution,

$$x'x'' \text{ ou } \mathrm{MP} \times \mathrm{M'P} \text{ ou } \mathrm{MP} \times \mathrm{MP'} = \frac{a^2}{b^2}\left(h^2 + \frac{b^4}{c^2}\right).$$

Ceci posé, soit 2α l'angle des rayons vecteurs d'un point de la courbe (*fig. 4*) ; l'angle NMF est égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, et comme les angles NMF et DPF sont égaux, il en résulte

que $$\widehat{PFO} = \frac{\pi}{2} - \widehat{DPF} = \alpha,$$

et aussi que $$MH = PD = \frac{b^2}{c} \operatorname{tg} \alpha.$$

On a aussi, par définition,

$$\frac{MP}{MF} = \frac{a}{c}, \quad \frac{MP'}{MF'} = \frac{a}{c},$$

d'où $$\frac{MP \times MP'}{MF \times MF'} = \frac{a^2}{c^2},$$

et comme

$$MP \times MP' = \frac{a^2}{b^2}\left(h^2 + \frac{b^4}{c^2}\right) = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2 \alpha},$$

il vient $$MF \times MF' = \frac{b^2}{\cos^2 \alpha}.$$

VI. **Théorème.** — *Le produit des distances des foyers à une tangente est constant et égal au carré du petit axe.*

En effet, la relation

$$MF \times MF' = \frac{b^2}{\cos^2 \alpha}$$

peut s'écrire $(MF \cos \alpha) \times (MF' \cos \alpha) = b^2$,
et les deux facteurs du premier membre représentent précisément les distances des foyers à la tangente considérée.

Remarque. — La somme de ces deux facteurs est

$$(MF + MF') \cos \alpha = 2a \cos \alpha$$

et si OQ représente la distance du centre à la tangente en M, on a $OQ = a \cos \alpha$.

Si du centre on abaisse une perpendiculaire sur la normale en M, la distance du point M à cette perpendiculaire est précisément égale à OQ. Cette perpendiculaire prolongée coupe les rayons vecteurs du point M en deux points distants de M d'une longueur égale à a.

VII. **Théorème d'Apollonius.** — 1° *La somme des carrés construits sur deux diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés construits sur les axes ;* 2° *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a une surface constante est égal à celle du rectangle construit sur les axes.*

Soit (*fig.* 5) γ l'angle du diamètre OM avec la tangente en ce point M, OQ la distance du centre à la tangente.

Le triangle rectangle OMQ donne

$$OQ = OM \sin \gamma,$$

et (VI) par suite $\quad a \cos \alpha = OM \sin \gamma.$

Le triangle FMF' donne

$$\overline{FM}^2 + \overline{F'M}^2 = 2c^2 + 2\overline{OM}^2$$

et comme (V) $\quad 2FM \times F'M = \dfrac{2b^2}{\cos^2 \alpha},$

on a, en additionnant ces deux expressions membre à membre

$$(FM + F'M)^2 \text{ ou } 4a^2 = 2\overline{OM}^2 + 2c^2 + \frac{2b^2}{\cos^2 \alpha},$$

ou $$\overline{OM}^2 = a^2 + b^2 - \frac{b^2}{\cos^2 \alpha},$$

ou encore, puisque

$$\cos \alpha = \frac{OM \cdot \sin \gamma}{a},$$

$$\overline{OM}^4 \sin^2 \gamma - (a^2 + b^2) \sin^2 \gamma \times \overline{OM}^2 + a^2 b^2 = 0.$$

Or, il existe deux angles ayant même sinus pouvant convenir à la relation précédente; ces deux angles sont supplémentaires; à chacun d'eux correspondent un diamètre et une tangente et la figure formée par ces quatre lignes est un parallélogramme. Les diamètres, pris deux à deux, jouissant de cette propriété, à savoir que la tangente à l'extrémité de l'un est parallèle à l'autre, sont dits *conjugués*. Les longueurs de deux pareils diamètres et l'angle qu'ils font avec leurs tangentes sont liés par la relation précédente; en la considérant comme une équation du 2e degré par rapport à $\overline{OM}^2$ et désignant par a'^2 et b'^2 les racines, on obtient les deux relations:

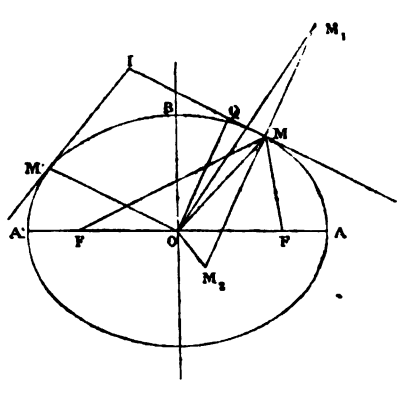


Fig. 5.

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$
$$a' b' \sin \gamma = ab,$$

qui constituent les deux théorèmes d'Apollonius.

VIII. **Théorème.** — *Le produit des rayons vecteurs d'un point est égal au carré du diamètre conjugué de celui du point considéré.*

Soit *(fig. 5)* OM $= a'$ le demi-diamètre du point M; le deuxième théorème d'Apollonius donne

$$a' \sin \gamma = \frac{ab}{b'},$$

et comme (VII) $\cos \alpha = \frac{\text{OM} \sin \gamma}{a} = \frac{b}{b'},$

on peut écrire $\text{MF} \times \text{MF}' = \frac{b^2}{\cos^2 \alpha} = b'^2.$

Remarque. — La relation

$$\cos \alpha = \frac{b}{b'}$$

qu'on vient d'obtenir permet de déterminer facilement les variations de l'angle des rayons vecteurs d'un point M d'une ellipse. Le point M étant en A, $b' = b$ et $\alpha = 0$; le point M parcourant l'arc AB, b' augmente, $\cos \alpha$ diminue et α augmente; le cosinus aura sa valeur minimum ou l'angle sa valeur maximum lorsque b' aura sa plus grande valeur a; alors $\cos \alpha = \frac{b}{a}$.

IX. **Théorème.** — *Si l'on porte sur la normale en un point* M (fig. 5) *de part et d'autre de ce point une longueur égale au demi-diamètre conjugué de* OM, *les points* M_1 *et* M_2 *obtenus décrivent des cercles lorsque le point* M *parcourt l'ellipse.*

Dans le triangle OMM_1 on a

$$\overline{\text{OM}_1}^2 = \overline{\text{OM}}^2 + \overline{\text{MM}_1}^2 - 2\text{OM} \times \text{MM}_1 \cos \text{OMM}_1;$$

or, d'après les notations usitées

$$\text{OMM}_1 = \frac{\pi}{2} + \gamma$$

et $$\cos \text{OMM}_1 = - \sin \gamma,$$

et par suite, si l'on pose OM $= a'$, MM_1 sera égal à b' et

$$\overline{OM_1}^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin \gamma,$$

ou, en vertu des théorèmes d'Apollonius,

$$\overline{OM_1}^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2.$$

Donc le point M_1 décrit un cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $a + b$.

De même, d'après la figure

$$\overline{OM_2}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin \gamma = (a - b)^2$$

et le point M_2 décrit un cercle de même centre que l'ellipse et de rayon $a - b$.

X. **Théorème.** — *La tangente en un point* M *rencontre les tangentes aux extrémités du grand axe en deux points* R *et* R' *tels que*

$$MR \times MR' = b'^2$$

b' *étant le demi-diamètre conjugué de* OM.

Sans entrer dans les détails de construction de la *figure 6*

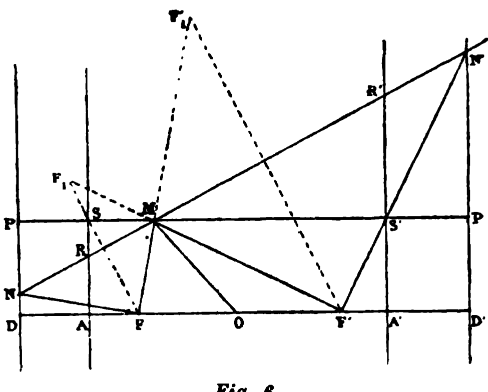


Fig. 6.

que l'on connaît, on voit que les triangles semblables MPN et MSR donnent la proportion

$$\frac{MR}{MN} = \frac{MS}{MP}.$$

On a, de même $\dfrac{MR'}{MN'} = \dfrac{MS'}{MP'}$,

et, en multipliant ces deux proportions membre à membre,

$$\frac{MR \times MR'}{MN \times MN'} = \frac{MS \times MS'}{MP \times MP'}$$

Or les triangles MFN et MF'N' étant rectangles, on a

$$MN \times MN' = \frac{MF \times MF'}{\sin^2 \alpha} = \frac{b'^2}{\sin^2 \alpha}.$$

et (V) $\quad MP \times MP' = \dfrac{a^2b^2}{c^2 \cos^2 \alpha}.$

Si l'on remarque que la distance comprise entre les droites ARS et DNP est égale à $\dfrac{a^2}{c} - a$, on a

$$MS \times MS' = \left[MP - \left(\frac{a^2}{c} - a\right)\right]\left[MP' - \left(\frac{a^2}{c} - a\right)\right] = \frac{a^2b^2}{c^2} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

et par suite :

$$MR \times MR' = \frac{b'^2}{\sin^2 \alpha} \times \frac{a^2b^2 \sin^2 \alpha}{c^2 \cos^2 \alpha} \times \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{a^2b^2} = b'^2.$$

Remarque. — Soient F'_1 le symétrique de F' par rapport à la tangente en M, F_1 celui du point F, on a, comme il est facile de le voir,

$$MF \times MF'_1 = MF' \times MF_1 = MR \times MR' = \overline{MM_1}^2 = \overline{MM_2}^2 = b'^2$$

M_1 et M_2 étant les points définis dans le théorème précédent et construits *figure 5*.

On conclut de cette suite d'égalités que les huit points R, R', F, F', F_1, F'_1, M_1, M_2, sont sur un même cercle ; son centre est évidemment au point où la tangente en M rencontre le petit axe. *(A suivre.)*

QUESTION 155.

Solution par M. Élie, élève au Collège Stanislas.

Étant donné un parallélogramme ABCD, *on prolonge* AB *d'une longueur* BB' *et* AD *d'une longueur* DD' *égale à* BB'; *on construit avec* AB' *et* AD' *un parallélogramme. Soit* C' *son quatrième sommet. Démontrer que les droites* B'D, BD' *se coupent sur la droite* CC'. (De Longchamps.)

Soit R le point de rencontre. Joignons B'D', EF. Les deux

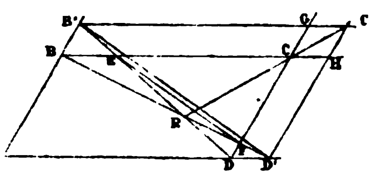
triangles équiangles RBB′, RDF donnent $\frac{RB'}{RD} = \frac{RB}{RF}$.

De même les triangles REB, RDD′ donnent $\frac{RE}{RD} = \frac{RB}{RD'}$

Divisant membre à membre ces deux égalités, on a

$$\frac{RB'}{RE} = \frac{RD'}{RF}.$$

Les deux triangles REF, RB′D′ sont dès lors semblables et B′D′ est parallèle à EF.



De sorte que les deux triangles C′B′D′, CEF ont leurs trois côtés respectivement parallèles. Les droites B′D et BD′, joignant des sommets homologues, doivent se couper sur CC′ qui joint les troisièmes sommets. On voit que cette démonstration ne s'appuie pas sur ce que BB′ = DD′.

La propriété a donc lieu indépendamment de cette condition.

Si BB′ = DD′, la figure CGC′H est un losange et CC′ est la bissectrice de l'angle C. C'est donc une droite fixe.

D'où l'énoncé de ce lieu géométrique. — *Étant donné un parallélogramme* ABCD, *on prolonge* AB, AD *de longueurs* BB′, DD′ *égales entre elles. On forme sur* AB′ *et* AD′ *le parallélogramme* AB′CD′. *On joint* B′D *et* BD′, *et on demande le lieu du point de rencontre de ces droites.*

Dans ce cas on peut démontrer directement que la droite CR est bissectrice de l'angle C et par suite passe par le point C′.

En effet BRD′ est une transversale dans le triangle AB′D

et l'on a
$$\frac{BB' \times AD' \times DR}{AB \times DD' \times RB'} = 1,$$

d'où
$$\frac{AD'}{AB} = \frac{RB'}{RD}.$$

Les deux triangles ABD′ et BFC sont semblables et l'on a

$$\frac{AD'}{AB} = \frac{BC}{CF},$$

et d'après l'égalité démontrée on a

$$\frac{RB'}{RD} = \frac{RB}{BF}.$$

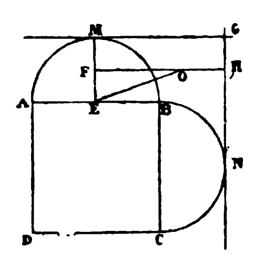
Comparant entre elles ces trois dernières égalités, on voit que $\frac{BC}{FC} = \frac{RB}{RF}$. Le point R divise la base du triangle BCF en parties proportionnelles aux côtés adjacents ; il est donc sur la bissectrice de l'angle C.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, de Grenoble; Jacquier, École normale de Charleville ; Manceau, d'Orléans; Hoc, de Sainte-Barbe; Pasquier, Institut Léopold, Bruxelles; Chareton, Collège Stanislas; Vazou, Collège Rollin; Renaud, de Bordeaux; Delais, du Mans; Gondy, Collège de Pontarlier; Montérou, Lycée de Pau.

QUESTION 156.

Solution par M. DUPUY, élève au Lycée de Grenoble.

Sur deux côtés consécutifs d'un carré ADCD, *on décrit des circonférences ayant pour diamètres ces côtés, et l'on mène des tangentes* MQ, NQ *parallèles au côté du carré. Démontrer que le rayon du cercle* O *tangent aux deux premiers et à* MQ, NQ *est égal au double du côté du carré diminué de deux fois le côté du triangle équilatéral inscrit dans l'un des cercles précédents.*



Soit le problème résolu et $2a$ le côté du carré; joignant ME, OE et menant HOF parallèle à MQ, on a le triangle rectangle EFO. Soit x le rayon du cercle cherché, et a le rayon des circonférences données, on a

$$\overline{OE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FO}^2$$

$$(a + x)^2 = (a - x)^2 + (2a - x)^2,$$

d'où

$$x = 4a - 2a\sqrt{3}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Tessier, d'Angers; Schlesser, Corbeaux, Vermand, de Saint-Quentin; Peyrabon, de Châteauroux; Elie, Cha-

reton, Collège Stanislas; Gondy, de Pontarlier; Dumur, de Chartres; Manceau. Gélinet, Huet, d'Orléans; Pombart, École normale de Charleville; Hoc, de Sainte-Barbe; Deslais, au Mans; Hugot, de Lyon; Demaris, de Moulins; Lannes, de Tarbes.

QUESTION 157.

Solution par M. LANNES, élève au Lycée de Tarbes.

Une droite de longueur et de direction constantes appuie ses extrémités sur deux sphères données. On demande la courbe décrite par chaque extrémité sur la sphère correspondante.

(Amigues.)

Soient O et O′ les centres des deux sphères. Par le point O menons une droite parallèle à la direction donnée et égale à la longueur donnée; soit O″ l'extrémité de cette droite. En désignant par A et A′ les extrémités de l'une des droites, on a $OA = O''A'$; les extrémités des droites se trouvent donc sur la sphère ayant pour centre O″ et un rayon égal à O; elles se trouvent aussi sur la sphère O′ : elles se trouvent donc à leur intersection, et comme cette intersection est une circonférence, la courbe décrite est une circonférence.

Il en est de même pour la circonférence O.

NOTA. — M. Hoc, de l'École Sainte-Barbe, a résolu la même question.

QUESTION 158.

Solution par M. GENIN, Collège de Charleville.

Soient O *le centre d'un cercle,* ABC *un triangle circonscrit,* A′, B′, C′ *les points de contact des côtés* BC, CA, AB; *si l'on désigne par* R *le rayon du cercle, par* S *et* S′ *les aires des triangles* ABC, A′B′C′, *on a*

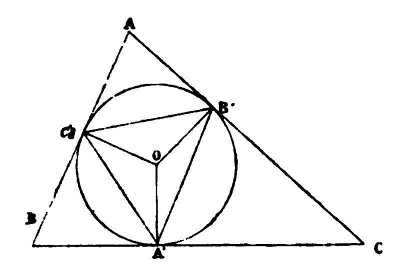
$$4S = R^4 \frac{S'^2}{OA'B' \cdot OA'C' \cdot OB'C'}.$$

$$\text{On a } S' = OA'B' + OA'C' + OB'C' = \frac{R^2}{2} (\sin A + \sin B + \sin C),$$

ou $$S' = 2R^2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$$

et $$OA'B' \,.\, OA'C \,.\, OB'C' = \frac{R^6}{8} \sin A \sin B \sin B$$

$$= R^6 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} \,.\, \sin\frac{B}{2} \cos\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cos\frac{C}{2}$$



d'où $$R^4 \frac{S'^2}{OA'B' \,.\, OA'C' \,.\, OB'C'} = 4R^2 \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2};$$

or $$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-c)}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,p-b)}{p(p-c)}};$$

d'où $$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p^3(p - (a) - b)\,(-c)}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}}$$

$$= \frac{p^2}{S} = \frac{p}{R};$$

dès lors $$R^4 \frac{S'^2}{OA'B' \,.\, OA'C' \,.\, OB'C'} = 4R^2 \,.\, \frac{p}{R} = 4S.$$

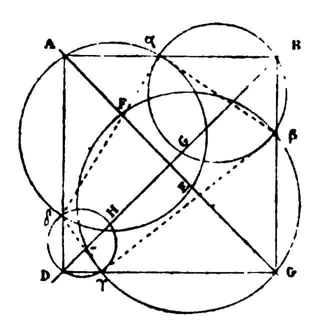
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Demaris, de Moulins ; Lannes, de Tarbes ; Hoc, de Sainte-Barbe ; Gelinet, d'Orléans ; Élie, de Stanislas ; Longueville, à Charleville ; Vermand, à Saint-Quentin ; Dupuy, à Grenoble ; Deslais, au Mans.

QUESTION 159.

Solution par M. Léopold Babu, élève au Lycée de Niort.

Construire un carré dont les côtés passent par quatre points donnés.

Soient α, β, γ, δ les points donnés et ABCD le carré répondant à la question. Circonscrivons des cercles aux triangles $\delta A\alpha$, $\alpha B\beta$, $\beta C\gamma$, $\gamma D\delta$. La diagonale AC du carré est bissectrice des angles droits DAB, BCD; elle passe donc par les points connus F et E, milieux des deux demi-circonférences $\gamma F\beta$, $\delta E\alpha$ décrites sur $\beta\delta$ et $\delta\alpha$ comme diamètres, et par suite cette droite AC peut être construite ainsi que les points A et C. Un raisonnement semblable montre que l'on peut déterminer facilement les points B et D. Pour avoir le carré on n'aura donc qu'à joindre ces quatre points.



La même construction s'applique encore au cas où 1, 2, 3 ou 4 des points doivent être situés sur les prolongements des côtés du carré.

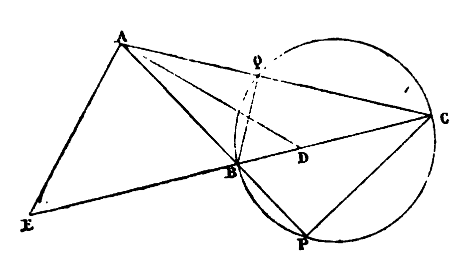
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Thual, à Lorient ; Pasquier, Institut Léopold, à Bruxelles ; Gélinet, à Orléans ; Henry, à Nice ; Deslais, au Mans ; Dupuy, à Grenoble ; Lannes, à Tarbes ; Fontaine, à Lille ; Jolly, au Collège de Vassy ; Coignard, au Lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 160.

Solution par M. Pecquery, élève du Lycée du Havre.

Soit ABC *un triangle dans lequel les deux bissectrices de l'angle* A *sont égales. Démontrer que le cercle décrit sur* BC *comme diamètre rencontre les côtés* AB, AC *en deux points* P *et* Q *tels que* CP = CQ.

Les triangles BCP, BCQ sont rectangles en P et Q; je dis qu'ils sont égaux. En effet, ils ont l'hypoténuse commune et de plus les angles PBC, QBC sont égaux. Car, le triangle EAD est rectangle et isoscèle; et en appelant α l'angle BAC du triangle donné, on a



$$PBC = ABE = \frac{a}{2} + 45^\circ;$$

de même $$BCQ = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Par suite le troisième angle QBC du triangle BCQ est égal à $45^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Donc $PBC = QBC$

et par suite $CP = CQ.$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Fontaine, à Lille; Gelinet, à Orléans; Libmann, Élie, à Stanislas; Barbieux, à Amiens; Combebiac, Chaulet, à Montauban; Schlesser, Corbeaux, à Saint-Quentin; Hugot, à Lyon; Henry, à Nice; Thual, à Lorient; Huet, à Orléans; Gondy, à Pontarlier; Deslais, au Mans; Peyrabon, Johannet, à Châteauroux; Objois, à Moulins; Marin, à Agen; Pasquier, Institut Léopold, à Bruxelles; Longueville à Charleville; Arthus et Vail, École Albert-le-Grand, à Arcueil.

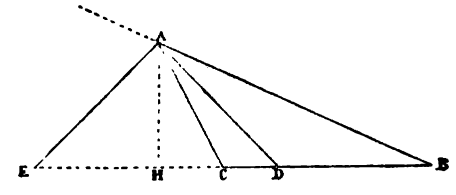
QUESTION 161.

Solution par M. Genin, Collège de Charleville.

Construire géométriquement un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent à ce côté, et sachant que les bissectrices de cet angle sont égales.

Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle dont on connaît le côté AB, l'angle BAC, et soient AD = AE les

bissectrices égales de l'angle A. Soit AH la perpendiculaire sur EC. Cette droite est bissectrice de l'angle EAD, le triangle ADE étant isoscèle. De là la construction suivante.



On construit l'angle BAC et l'on mène les bissectrices AE et AD de cet angle ainsi que la bissectrice AH de l'angle EAD. Comme AB est donné, du point B abaissons la perpendiculaire BH sur AH. Cette ligne coupe AC en C et détermine le triangle cherché ABC.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gélinet, Huet, à Orléans ; Lannes, à Tarbes ; Tupin et Jarron, à Beaume-les-Dames ; Barbieux, école primaire supérieure d'Amiens ; Combebiac, Chaulet, à Montauban ; Corbeaux, Vermand, Schlesser, à Saint-Quentin ; Hugot, à Lyon ; Thual, à Lorient ; Goudy, à Pontarlier ; Blessel, à Paris ; Deslais, au Mans ; Tessier, à Angers ; Renaud, à Bordeaux ; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier ; Peyrabon, Johannet, à Châteauroux ; Longueville, à Charleville ; Gino Loria, à Mantoue (Italie) ; Marin, à Agen ; Breuillé, à Sainte-Barbe ; Pecquery, au Havre ; Detraz, à Bourg ; Libman, Élie, Collège Stanislas ; Dupuy, à Grenoble ; Arthur et Vail, école Albert le Grand, à Arcueil ; Rondeau, lycée Fontanes, à Paris.

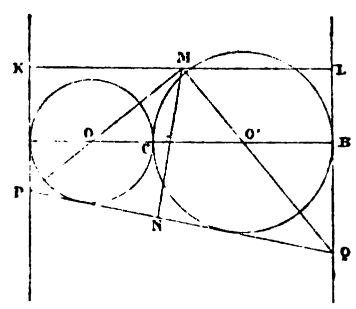
QUESTION 163.

Solution par M. Dupuy, du Lycée de Grenoble.

On donne une droite AB ; *un point* C *se déplace entre* A *et* B. *Sur* AC *et* BC *comme diamètres on décrit les circonférences* O *et* O′. *On mène une des tangentes communes extérieures qui rencontre en* P *et* Q *les tangentes en* A *et* B. *On mène* PO, QO′ ; *ces deux droites se coupent en un point* M *dont on demande le lieu géométrique.* (Julliard.)

Par M menons une perpendiculaire KML aux tangentes AP, BQ et abaissons MN perpendiculaire sur PQ. Les droites MQ, MP sont bissectrices des angles PQL, QPK ; il

suit que ML = MN et que MK = MN ; par suite MK = ML. Le point M se trouvant équidistant des tangentes PK, QL, son lieu géométrique est la perpendiculaire élevée au milieu de AB. On démontre facilement que la longueur de cette perpendiculaire ne dépasse pas le quart de AB de part et d'autre de cette droite, selon que l'on considère l'une ou l'autre des tangentes extérieures.



NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Elie, du Collège Stanislas ; Corbeaux, de Saint-Quentin ; Hugot, de Lyon ; Barbieux, École primaire supérieure d'Amiens ; Mallet, Petit Séminaire de Belley ; Vermand, de Saint-Quentin.

QUESTION 164.

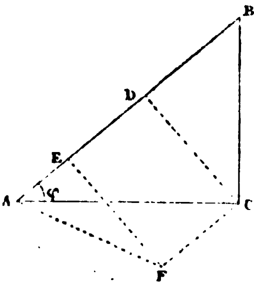
Solution par M. CADOT, élève du Lycée Saint-Louis.

Construire graphiquement l'angle x *donné par l'équation.*

$$tg\ x = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi}{3 \cos^2 \varphi - 1}$$

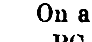
où φ *est un angle donné.* (Launoy.)

Prenons une droite AB de longueur 3 faisant avec une autre droite AC un angle φ, et formons le triangle rectangle ABC.



On a

$$BC = AB \sin \varphi = 3 \sin \varphi.$$



Soit CD perpendiculaire sur AB. On a

$$CD = BC \cos \varphi = 3 \sin \varphi \cos \varphi.$$

D'autre part

$$AC = 3 \cos \varphi ;$$

donc

$$AD = AC \cos \varphi = 3 \cos^2 \varphi.$$

Prenant sur DA une longueur $DE = 1 = \frac{1}{3}AB$,

on a $$AE = 3\cos^2\varphi - 1.$$

Élevons maintenant en E une perpendiculaire à AB et par le point C menons CF parallèle à AB; alors

$$EF = CD = 3\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$AE = 3\cos^2\varphi - 1;$$

dès lors $$\frac{EF}{AE} = \operatorname{tg} x = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{3\cos^2\varphi - 1};$$

or $$\frac{EF}{AE} = \operatorname{tg} BAF:$$

d'où $$BAF = x.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Bucheron, à Moulins ; Dupuy, à Grenoble ; Élie, collège Stanislas ; Landres, à La Flèche ; Gino Loria, à Mantoue, Italie ; Longueville, à Charleville.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

(Toutes ces questions ont été proposées en 1879 dans les examens de l'Université de Dublin.)

221. Si x, y, z sont les côtés d'un carré inscrit dans un triangle dont les côtés sont a, b, c, on a la relation

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} - 1\right)^2 = 4\left(\frac{bc}{yz} + \frac{ca}{zx} + \frac{ab}{xy}\right).$$

222. Mener par un point trois droites de longueurs données, telles que leurs extrémités soient les sommets d'un triangle équilatéral.

223. Les six axes radicaux des quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle pris deux à deux sont les bissectrices des angles du triangle formé en joignant les milieux des côtés.

224. Construire un triangle rectangle connaissant les côtés des deux carrés inscrits.

225. Trouver le plus grand des triangles inscrits dans un cercle donné pour lesquels la différence de deux angles est constante.

RECHERCHE DES FACTEURS COMMENSURABLES

DE DEGRÉ QUELCONQUE D'UNE ÉQUATION

Par M. **G. de Longchamps,** professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

(*Suite* et *fin*, voir page 41 et suiv.).

---

4. — Nous nous proposons maintenant d'appliquer les idées précédentes à la détermination des *facteurs commensurables du second degré*. On sait que si a et b désignent des nombres commensurables, *positifs* ou *négatifs*, $\sqrt{b}$, étant incommensurable, une équation n'admet pas la racine $(a + \sqrt{b})$ sans admettre par cela même la racine $(a - \sqrt{b}$. Dans ces conditions, qui sont très générales, puisqu'elles correspondent aux racines imaginaires $\alpha + \beta i$, quand α et β sont commensurables, ou même seulement α et β^2, l'équation admet des facteurs commensurables du second degré qu'on peut se proposer de déterminer *exactement*.

Posons $$y = x^2 - px;$$
on en tire successivement :

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} x^2 = y + px, \\ x^3 = py + (y + p^2)x, \\ x^4 = (y + p^2)y + (2py + p^3)x, \\ x^5 = (2py + p^3)y + (y^2 + 3p^2y + p^4)x, \\ x^6 = (y^2 + 3p^2y + p^4)y + (3py^2 + 4p^3y + p^5)x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Posons généralement
$$x^k = S_k y + T_k x \qquad (1)$$
S_k, T_k désignant des polynômes entiers en y et p, que nous nous proposons de déterminer. De l'égalité (1), on déduit
$$x^{k+1} = xyS_k + (y + px)T_k\,)$$
ou
$$x^{k+1} = yT_k + x(yS_k + pT_k\,);$$

par conséquent $S_{k+1} = T_k$; (2)

$T_{k+1} = yS_k + pT_k$; (3)

on en déduit $S_{k+2} - pS_{k+1} - yS_k = 0$ (4)

qui lie trois fonctions S consécutives et permet de les calculer *successivement*, quand on a déterminé les deux premières, qui sont d'ailleurs $S_2 = 1$; $S_3 = p$.

L'égalité (2) prouve de plus que la fonction T est connue quand on a calculé la fonction S d'indice immédiatement supérieur. On peut dire encore, si l'on préfère, que x^{k-1} est donné par la formule

$$x^{k-1} = yS_{k-1} + xS_k.$$

3. — Nous allons chercher l'expression algébrique de S_k. Posons, d'après l'observation à laquelle donnent lieu les formules (α),

$$S_k = p^{k-2} + A_k^1 p^{k-4}y + A_k^2 p^{k-6}y^2 + \ldots$$

le second membre représentant une suite nécessairement finie dont le dernier terme est

$$y^{\frac{k-2}{2}} \text{ quand } k \text{ est pair,}$$

$$A_k^{\frac{k-3}{2}} py^{\frac{k-3}{2}} \text{ quand } k \text{ est impair.}$$

Il s'agit de déterminer les coefficients.

L'égalité (4), qui est fondamentale dans ce calcul, donne $A_k^1, A_k^2, \ldots$

$$\left\{\begin{array}{l} A_{k+2}^1 = 1 + A_{k+1}^1 \\ A_{k+2}^2 = A_k^1 + A_{k+1}^2 \\ A_{k+2}^3 = A_k^2 + A_{k+1}^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \quad (5)$$

il suffit d'écrire qu les coefficients de $p^{k-2}y$, $p^{k-4}y^2$, $p^{k-6}y^3$, ... sont nuls, là comme dans toutes les identités.

Occupons-nous d'abord de la première, elle donne successivement

$$A_{k+2}^1 = 1 + A_{k+1}^1$$
$$A_{k+1}^1 = 1 + A_k^1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_5^1 = 1 + A_4^1$$

Ajoutons et remarquons que, d'après la troisième égalité (α)

$A_4^1 = 1$, et on aura $A_{k+2}^1 = K - 1$,

ou si l'on préfère, $A_k^1 = K - 3$ (6)

Considérons maintenant la seconde des égalités (5), elle donne $A_{k+2} = A_k^1 + A_{k-1} + \ldots + A_4^1 + A_5^2$,

ou, d'après (6) et en remarquant que $A_5^2 = 0$,

$$A_{k+2}^2 = \frac{(K-2)(K-3)}{2},$$

ou encore
$$A_k^2 = \frac{(K-4)(K-5)}{1.2}. \qquad (7)$$

6. — Pour terminer ce calcul nous nous servirons d'une identité due à M. *Haton* (*) ; nous devons dire d'ailleurs que la démonstration de cette identité est des plus élémentaires ; elle s'établit comme dans beaucoup d'autres cas analogues : 1° en vérifiant qu'elle est vraie pour $n = 1$; 2° en reconnaissant que, si elle est établie pour une certaine valeur de n, elle subsiste pour la valeur $(n + 1)$.

L'identité en question est

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n) + (m+1)(m+2)\ldots(m+n+1) + \ldots + (p-n)(p-n+1)\ldots(p-1)p$$
$$= \frac{(p+1)p\ldots(p-n) - (m+n)\ldots m(m-1)}{n+2} \qquad (8)$$

Se reportant à la troisième des égalités (5), se servant de l'identité précédente dans laquelle on supposera

$$m = 1 \quad n = 1 \quad p = k - 4,$$

on trouve, par un calcul identique à celui que nous venons de faire tout à l'heure et à deux reprises différentes,

$$A_{k+2}^3 = \frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{1.2.3},$$

ou,
$$A_k^3 = \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1.2.3};$$

et ainsi de suite; la loi des coefficients devient évidente et sa généralisation se fait sans peine, grâce à l'identité de M. Haton, et l'on peut écrire

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1872, p. 476.

$$S_k = p^{k-2} + (k-3)p^{k-4}y + \frac{(k-4)(k-5)}{1.2}p^{k-6}y^2$$
$$+ \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1.2.3}p^{k-8}y^3 + \ldots \qquad (9)$$

le second membre est une suite nécessairement finie renfermant $\frac{k}{2}$ termes si k est pair, et $\frac{k-1}{2}$ si k est impair.

7. — Nous ferons remarquer, en terminant, qu'on peut déduire des calculs précédents une conséquence qui est peut-être nouvelle et qui ne nous paraît pas sans intérêt. Nous voulons parler des *conditions de divisibilité d'un polynôme entier de degré quelconque,*

$$f(x) = x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

par un trinôme du second degré,

$$x^2 - px - q.$$

S_k désignant la fonction que nous avons calculée, la formule
$$x^{k-1} = yS_{k-1} + S_k$$
donne
$$x^m = yS_m + xS_{m+1}$$
$$x^{m-1} = yS_{m-1} + xS_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^2 = yS_2 + xS_3$$
on aura donc :
$$f(x) = [yS_m + A_1yS_{m-1} + \ldots + A_{m-2}yS_2 + A_m]$$
$$+ x[S_{m+1} + A_1S_m + \ldots + A_{m-2}S_3 + A_{m-1}] \quad (10)$$
$f(x)$ s'annule pour les deux racines de l'équation
$$x^2 - px - q = 0$$
et pour *l'une et l'autre de ces deux racines*, la fonction $(x^2 - px)$, ou y, prend la même valeur q, par conséquent les deux parenthèses de l'égalité (10), elles aussi, conservent dans ces deux cas la même valeur, et une équation du premier degré
$$Px + Q = 0$$
ne peut s'annuler pour *deux valeurs différentes de* x, si l'on n'a pas
$$P = 0 \quad Q = 0.$$
Concluons donc,

Théorème. — *Le polynôme*
$$x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$$
est divisible exactement par le trinôme
$$x^2 - px - q$$

quand on a,

$$S_m + A_1 S_{m-1} + \dots + A_{m-2} S_2 + \frac{A_m}{q} = 0$$

et, $S_{m+1} + A_1 S_m + \dots + A_{m-2} S_3 + A_{m-1} = 0,$
les fonctions S *étant données par la formule*

$$S_k = p^{k-2} + (k-3)\,p^{k-4}\,q + \frac{(k-4)(k-5)}{1.2}\,p^{k-6}\,q^2 + \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1.2.3}\,p^{k-8}\,q^3 + \dots$$

et satisfaisant aussi à l'égalité,

$$S_{k-2} - p\,S_{k-1} - q\,S_k = 0,$$

avec les conditions initiales

$$S_2 = 1 \quad S_3 = p.$$

RECHERCHES

SUR LES

COURBES PLANES DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **J. Collin**, ancien élève de l'Ecole polytechnique,
Professeur de Mathématiques.

Nous nous proposons de trouver un moyen pour construire facilement par points toutes les *courbes planes du troisième degré qui ont au moins une asymptote à distance finie.*

Dans ce but, nous considérerons successivement celles qui ont un point singulier et celles qui en sont dépourvues. Nous ferons d'ailleurs complète abstraction des cas particuliers où les équations générales ne représentent plus réellement une courbe du troisième degré, mais simplement l'ensemble d'une droite et d'une conique ou de trois droites.

Courbes à point singulier.

Rapportées au point singulier, ces courbes sont représentées par une équation de l'une des formes suivantes :

$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x) = Ay^2 + Bxy + Cx^2$ (1.). 0 Asympt. à l'infini.

$(y - mx)^2(y - m''x) = Ay^2 + Bxy + Cx^2$ (2.). 2 Asympt. à l'infini.

Du reste, dans les courbes (1_s), parmi les trois directions asymptotiques, il peut y en avoir soit 3 réelles, soit 2 imaginaires m et m', et 1 réelle m''.

Théorème I. — *Toute courbe, à point singulier, ayant au moins une asymptote à distance finie, peut être mise sous la forme mi-décomposée :*

$$1 = \frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{d''}{y - m''x}$$

où m′ = m, *s'il s'agit d'une courbe* (2_s).

Ce n'est qu'une application de la théorie de la décomposition des fractions rationnelles.

Remarque. — Si m et m' sont réels et inégaux, on pourra mettre la courbe sous la forme annoncée, de trois manières différentes; on pourra aussi continuer la décomposition et arriver à la forme la plus simple :

$$1 = \frac{d}{y - mx} + \frac{d'}{y - m'x} + \frac{d''}{y - m''x}.$$

Théorème II. — *Toute courbe, à point singulier, ayant au moins une asymptote à distance finie, peut se construire par points à l'aide d'une conique et d'une droite fixes.*

En effet, si nous supposons cette courbe mise sous la forme indiquée par le théorème précédent, que nous passions aux coordonnées polaires, et que nous posions

$$\rho_1 = \frac{a \cos \omega + b \sin \omega}{(\sin \omega - m.\cos \omega)(\sin \omega - m'.\cos \omega)}$$

et $$\rho_2 = \frac{d''}{\sin\omega - m''\cos\omega},$$

nous aurons

$$\rho = \rho_1 + \rho_2.$$

De là la construction suivante :

On construira d'abord les éléments nécessaires de la *conique directrice*

$$(y - mx)(y - m'x) = ax + by,$$

qui passe par l'origine et qui a pour asymptotes les asymptotes de direction m et m' de la courbe elle-même ; puis la droite *asymptote directrice* $y - m''x = d''$. Cela fait, par le point singulier O, on mènera autant de rayons OR que l'on voudra; on construira leurs points d'intersection respectifs M_1 et M_2 avec la conique et la droite directrices ; l'on prendra $OM = OM_1 + OM_2$.
Les points M ainsi obtenus seront des points de la courbe.

Remarque I. — Dans le cas où la conique directrice est une ellipse, comme cela a lieu pour le *Folium de Descartes*, on pourra, si on le veut, considérer la courbe à construire comme la projection d'une autre courbe dont la conique directrice serait un cercle.

Remarque II. — Si la conique directrice est une hyperbole, la courbe peut se mettre sous la forme décomposée

$$1 = \frac{d}{y - mx} + \frac{d'}{y - m'x} + \frac{d''}{y - m''x}$$

c.-à-d. $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$

et ainsi, le triangle des asymptotes étant tracé, il suffit, pour avoir un point M de la courbe, de mener un rayon quelconque OR, marquer ses points d'intersection respectifs M_1, M_2, M_3, avec les asymptotes, et prendre

$$OM = OM_1 + OM_2 + OM_3.$$

Théorème III. — *La sous-normale en un point* M *de la courbe est égale à la somme algébrique des sous-normales aux points correspondants* M_1 *et* M_2 *de la conique et de la droite directrices.*

En effet, de $\rho = \rho_1 + \rho_2$,
on déduit $\rho' = \rho'_1 + \rho'_2$.

Si la conique directrice est une hyperbole, on peut faire la même remarque que ci-dessus.

Sachant construire la sous-normale, on sait donc tracer la tangente.

Cette méthode, non seulement permet de déterminer graphiquement la courbe et d'une manière très simple ; mais

elle en rend aussi évidemment la discussion très rapide ; elle en fait apercevoir de suite la forme.

Le point où la courbe rencontre l'asymptote directrice se trouve sur la tangente en O à la conique directrice.

Les tangentes au point singulier O sont les rayons vecteurs nuls. Donc, pour les obtenir, on tracera la symétrique de l'asymptote directrice par rapport à O, et l'on déterminera les points d'intersection N_1 et N_2 de cette droite avec la conique ; les rayons ON_1 et ON_2 seront les tangentes cherchées. Donc, suivant que cette symétrique rencontre la conique en deux points N_1 et N_2 réels et distincts, réels et confondus, ou imaginaires, le point singulier est un point double réel, un point de rebroussement, ou un point double isolé.

Cela posé, si nous convenons d'appeler *elliptiques*, *hyperboliques* ou *paraboliques* les courbes que nous étudions, suivant qu'elles ont pour conique directrice une ellipse, une hyperbole, ou une parabole ; — et si nous désignons par DD l'asymptote directrice, SS sa symétrique par rapport à O, OT la tangente en O à la conique directrice (C), on peut établir la classification des courbes planes du troisième degré à point singulier, et ayant au moins une asymptote à distance finie, d'après les caractères suivants :

Courbes elliptiques.

I. DD n'est pas parallèle à OT ; alors 3 ou 1 point d'inflexion.	1° SS rencontre (C) en deux points distincts ; 2° SS rencontre (C) en deux points confondus ; 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires ;
II. DD est parallèle à OT ; alors 2 ou 0 point d'inflexion.	1° SS rencontre (C) en deux points distincts ; 2° SS rencontre (C) en deux points confondus ; 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.

Courbes hyperboliques.

- I. DD n'est pas parallèle à OT; alors 3 ou 1 point d'inflexion.
  - 1° SS rencontre (C) en deux points réels et distincts.
    - (α) Le point singulier O est à l'extérieur du triangle des asymptotes.
    - (β) Le point O est à l'intérieur du triangle des asymptotes.
  - 2° SS rencontre (C) en deux points réduits à un;
  - 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.
- II. DD est parallèle à OT; alors 2 ou 0 points d'inflexion.
  - 1° SS rencontre (C) en deux points réels et distincts.
    - (α) Le point O est à l'extérieur du triangle des asymptotes.
    - (β) Le point O est à l'intérieur du triangle des asymptotes.
  - 2° SS rencontre (C) en deux points réduits à un;
  - 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.

III. Le point O est centre de gravité du triangle des asymptotes.

On arrive du reste très facilement par l'analyse à cette même classification.

Courbes paraboliques.

I. DD n'est pas parallèle à OT. 1 ou 3 points d'inflexion.

- 1° SS rencontre (C) en deux points distincts;
- 2° SS rencontre (C) en deux points confondus;
- 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.

II. DD est parallèle à OT. 0 ou 2 points d'inflexion.

- 1° SS rencontre (C) en deux points distincts.
- 2° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.

Il y a donc en tout 18 espèces de courbes du troisième degré à point singulier et ayant au moins une asymptote à distance finie.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE,

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir p. 35 et suiv.)

Pour appliquer immédiatement le théorème que nous venons d'établir, soit la forme quadratique binaire (c'est-à-dire à deux variables) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, qui forme l'ensemble des termes du deuxième degré dans l'équation générale des coniques.

L'invariant de cette forme (qui en est en même temps le discriminant, car nous reconnaîtrons plus tard que les formes quadratiques n'ont d'autre invariant que leur discriminant) est le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Si l'on fait dans la forme proposée la substitution linéaire $\begin{cases} x = ax' + by' \\ y = a'x' + b'y' \end{cases}$, on obtiendra une autre forme qua-

dratique binaire $A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2$, dont l'invariant sera $A'C' - B'^2$.

Or, d'après le théorème établi pages 39, 40 et 41, on aura :

$$A'C' - B'^2 = (AC - B^2)(ab' - ba')^2.$$

Il en résulte que le signe du discriminant (ou invariant) nouveau est le même que celui du premier.

Or, on sait que le signe de la quantité $AC - B^2$ définit le genre de la courbe représentée par l'équation générale de deuxième degré à deux variables ; on retrouve donc ce résultat, évident *à priori* au point de vue géométrique, que le genre d'une conique est indépendant des axes auxquels elle est rapportée.

C'est là un premier exemple, remarquable en raison de sa simplicité même, de la connexité constante qui existe entre les propriétés purement algébriques des formes et les propriétés géométriques des figures dans les équations desquelles entrent ces formes.

— Soit de même la forme quadratrique ternaire (c.-à-d. à trois variables) $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$, qui forme l'ensemble des termes du second degré dans l'équation générale des surfaces du second ordre.

Son invariant (ou déterminant) est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

si l'on fait dans la forme proposée la substitution linéaire

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}$$

ce qui, au point de vue géométrique, signifie que l'on rapporte la surface dans l'équation de laquelle entre la forme proposée à d'autres axes de coordonnées, on obtiendra une autre forme quadratique ternaire

$$A_1x'^2 + A'_1y'^2 + A''_1z'^2 + 2B_1y'z' + 2B'_1z'x' + 2B''_1x'y',$$

dont l'invariant est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & B''_1 & B'_1 \\ B''_1 & A'_1 & B_1 \\ B'_1 & B_1 & A''_1 \end{vmatrix} = A_1A'_1A''_1 + 2B_1B'_1B''_1 - A_1B_1^2 - A'_1B'^2_1 - A''_1B''^2_1$$

et d'après le théorème fondamental, on a :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B''_1 & B'_1 \\ B''_1 & A'_1 & B_1 \\ B'_1 & B_1 & A''_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2$$

Le signe du nouveau discriminant est donc le même que celui du premier.

Or, on sait que ce signe fixe la variété à laquelle appartient le cône représenté par l'équation $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$, variété qui est d'ailleurs intimement liée à la nature même de la surface représentée par l'équation générale du second ordre à trois variables ; on retrouve donc encore ici l'explication purement algébrique d'un fait géométrique évident *à priori*.

— Reprenons la relation

$$A'C' - B'^2 = (AC - B^2)(ab' - ba')^2.$$

On sait que, dans un changement de coordonnées obliques, on a

$$a = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \; b = \frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}, \; a' = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}, \; b' = \frac{\sin\alpha'}{\sin\theta}$$

par suite

$$ab' - ba' = \frac{\sin(\theta - \alpha)\sin\alpha' - \sin(\theta - \alpha')\sin\alpha}{\sin^2\theta},$$

ou

$$ab' - ba' = \frac{\sin\alpha'\sin\theta\cos\alpha - \sin\theta\cos\alpha'\sin}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin\theta}.$$

Or $\alpha' - \alpha$ est l'angle θ' que font entre eux les nouveaux axes ; on a donc

$$A'C' - B'^2 = (AC - B^2)\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta},$$

d'où résulte la relation remarquable

$$\frac{A'C' - B'^2}{\sin^2\theta'} = \frac{AC - B^2}{\sin^2\theta}$$

qui exprime que la quantité $\frac{AC - B^2}{\sin^2\theta}$ est indépendante du choix des axes de coordonnées, c'est-à-dire conserve une valeur constante dans tous les systèmes.

— Si nous considérons la forme quadratique ternaire

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

obtenue en rétablissant l'homogénéité dans le polynôme général du deuxième degré à deux variables au moyen de la variable apparente $z = 1$, on obtiendra une autre forme analogue

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x'z' + 2E'y'z' + F'z'^2$$

au moyen de la substitution linéaire

$$\begin{cases} x = ax' + by' + cz' \\ y = a'x' + b'y' + c'z' \\ z = a''x' + b''y' + c''z' \end{cases}$$

et nous savons qu'on a, en vertu du théorème fondamental :

$$\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2$$

Or la substitution considérée revient à un changement général de coordonnées planes, si l'on pose

$a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 1$, et si l'on suppose $z' = 1$.

Dans ce cas, le déterminant de la substitution (auquel on donne aussi le nom de *module de la transformation*) se réduit à

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (ab' - ba') = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}.$$

D'où résulte la relation remarquable

$$\frac{F\ (AC - B^2) + 2BDE - AE^2 - CD^2}{\sin^2 \theta}$$
$$= \frac{F'\ (A'C' - B'^2) + 2B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2}{\sin^2 \theta'},$$

qui exprime que le quotient de la quantité connue en géométrie analytique sous le nom de Δ, par le carré du sinus de l'angle des coordonnées, a une valeur indépendante du choix des axes.

Or, on sait que le signe de la quantité Δ fixe la variété à laquelle appartient la conique représentée par l'équation générale du second ordre; au point de vue géométrique, on sait donc *à priori* que ce signe ne peut dépendre du choix des axes; mais nous avons en même temps reconnu

algébriquement quelque chose de plus, à savoir que non seulement le signe de Δ ne peut changer, mais que la valeur même de $\frac{\Delta}{\sin^2 \theta}$ est constante dans tous les systèmes.

— Nous pourrions rappeler ici les applications de l'important théorème démontré dans notre premier article, et nous en trouverions de nombreux exemples dans l'étude des coordonnées trilinéaires; mais nous sommes forcés d'abréger, pour passer en revue d'autres propriétés des formes quadratiques, et nous nous bornerons pour le moment à engager les lecteurs à pousser d'eux-mêmes plus avant dans cet ordre d'idées.

— Soit une forme quadratique à trois variables décomposée en somme de carrés.

$$F = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2$$

son invariant sera, d'après la définition donnée précédemment :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' & \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' & \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 \end{vmatrix}$$

On voit qu'il est égal au carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

formé avec les coefficients des fonctions linéaires entrant sous les carrés.

— Si l'on a, dans la décomposition, un ou plusieurs carrés précédés du signe —, on remplacera, dans le calcul précédent, les coefficients des variables sous ces carrés par leurs produits par $\sqrt{-1}$; c'est ainsi que l'invariant de la forme

$$F = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2$$

sera le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'\sqrt{-1} & \beta'\sqrt{-1} & \gamma'\sqrt{-1} \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

— Si la forme quadratique considérée est la somme de $n-p$ carrés dépendant de n variables, son invariant sera nul, comme ayant un certain nombre de lignes nulles.

Soit, par exemple, $F = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2$ son invariant sera, d'après ce qui précède, le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et sera, par suite, nul.

— D'une manière générale, il est facile de voir que *pour que le nombre des carrés obtenus en décomposant une forme quadratique en somme de carrés, soit précisément égal au nombre des variables, il faut et il suffit que l'invariant de cette forme soit différent de zéro.*

1° La condition est nécessaire; car si l'on considère n carrés de n fonctions linéaires distinctes, l'invariant est égal au carré du déterminant formé avec les coefficients des fonctions sous les carrés, et comme ces fonctions sont supposées distinctes, leur déterminant est différent de zéro: il en est donc de même de son carré;

2° Elle est suffisante; car si Δ est $\gtrless 0$, la décomposition donnera un nombre de carrés précisément égal au nombre des variables, puisque, si l'on pouvait obtenir moins de carrés que de variables, il faudrait que Δ fût nul, en vertu de la remarque faite plus haut.

— *Application à une question d'examen.* — *La condition pour qu'un polynôme homogène du deuxième degré à trois variables, ou, en d'autres termes, pour qu'une forme quadratique ternaire soit décomposable en un produit de deux facteurs linéaires est que l'invariant de cette forme soit nul.*

En effet, un produit de deux facteurs linéaires est une somme ou une différence de deux carrés, suivant que les coefficients de ces facteurs sont réels ou imaginaires; car

on a: $P^2 + Q^2 = (P + Q\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1})$
et $P^2 - Q^2 = (P + Q)(P - Q)$.

Or nous venons de démontrer que pour qu'une forme

quadratique se réduise à une somme d'un nombre de carrés moindre que le nombre des variables, il faut que l'invariant de cette forme soit nul.

— En rendant homogène le polynôme général du deuxième degré à deux variables, on voit par conséquent que pour que l'équation générale du deuxième degré à deux variables représente deux droites, il faut qu'on ait :

$$AE^2 + CD^2 - 2BDE + F(B^2 - AC) = 0.$$

En effet, le polynôme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

devient par le rétablissement de l'homogénéité ($t = 1$) :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2.$$

C'est là une forme quadratique ternaire dont l'invariant est :

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

et cet invariant développé donne la condition énoncée.

Il résulte également des mêmes considérations que, pour que la forme quadratique ternaire entrant dans l'équation générale des surfaces du deuxième ordre se décompose en un produit de deux facteurs linéaires, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire que les surfaces considérées n'aient pas un centre unique.

De la forme adjointe. (Gauss.) — Prenons encore pour exemple une forme ternaire, c'est-à-dire à trois variables, et soit :

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3$$

On aura $\quad \frac{1}{2} f'_{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$

$$\frac{1}{2} f'_{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3.$$

$$\frac{1}{2} f'_{x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Appelons X_1, X_2, X_3 ces trois fonctions linéaires; nous

aurons trois équations du premier degré d'où nous pouvons tirer, en supposant $\Delta \lessgtr o$, les valeurs de x_1, x_2, x_3, en fonction de X_1, X_2, X_3. Si nous reportons ces valeurs dans la fonction f, elle prendra la forme $\frac{F}{\Delta}$, F étant une fonction homogène et du deuxième degré dépendant de X_1, X_2, X_3; c'est cette fonction qu'on appelle la forme adjointe de la forme donnée f. Sa formation est simple; car, en vertu du théorème d'Euler, on a :

$$x_1 f'x_1 + x_2 f'x_2 + x_3 f'x_3 = 2f(x_1, x_2, x_3)$$

c.-à-d. $X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 = f$

et en remplaçant dans cette expression x_1, x_2, x_3 par leurs valeurs en X_1, X_2, X_3, on a bien $f = \frac{F}{\Delta}$.

— Il est facile de voir, et nous laisserons au lecteur le soin de le reconnaître lui-même, que cette définition s'applique sans modifications à une forme quadratique renfermant un nombre quelconque de variables. Il en est d'ailleurs de même des considérations qui vont suivre.

— *Propriété fondamentale de la forme adjointe.* — Soit, comme précédemment, la forme $f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} . x_2 x_3$. Considérons la forme $\varphi = \theta f - (x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3)^2$, où X_1, X_2, X_3 sont les fonctions définies plus haut; nous allons établir que, *si l'on prend l'invariant de* φ, *cet invariant contiendra* θ^2 *en facteur, et que ce facteur étant supprimé, si l'on égale ce qui reste à zéro, on aura la relation* $\theta = \frac{F}{\Delta}$, *dans laquelle* F *désigne la forme adjointe de* f, *et* Δ *l'invariant de* f.

En effet, nous avons vu qu'on a :

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = X_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = X_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = X_3 \end{cases}$$

Or posons $\theta = x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3$; le calcul dont il s'agit revient à l'élimination de x_1, x_2, x_3 entre cette dernière équation et les relations (1). Le résultat de cette élimination s'obtiendra en rendant les équations homogènes, et

égalant à zéro le déterminant des coefficients des indéterminées. Pour cela, multiplions les trois premières par la dernière ; il vient :

$$\theta(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) - X_1(x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3) = 0$$
$$\theta(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) - X_2(x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3) = 0$$
$$\theta(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) - X_3(x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3) = 0$$

Le déterminant des coefficients de x_1, x_2, x_3 égalé à zéro est le résultat de l'élimination. Or, ce déterminant est le suivant :

$$(P)\quad \begin{vmatrix} \theta a_{11} - X_1^2 & \theta a_{12} - X_1X_2 & \theta a_{13} - X_1X_3 \\ \theta a_{21} - X_1X_2 & \theta a_{22} - X_2^2 & \theta a_{23} - X_2X_3 \\ \theta a_{31} - X_1X_3 & \theta a_{32} - X_2X_3 & \theta a_{33} - X_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

Il est facile de voir que ce déterminant, qui n'est autre que l'invariant de φ, est décomposable en une somme de 2^3 déterminants obtenus en prenant les termes de toutes les manières possibles.

On a d'abord le déterminant formé des premiers termes des premières colonnes

$$\begin{vmatrix} \theta a_{11} & \theta a_{12} & \theta a_{13} \\ \theta a_{21} & \theta a_{22} & \theta a_{23} \\ \theta a_{31} & \theta a_{32} & \theta a_{33} \end{vmatrix}$$

qui contient θ^3 en facteur devant l'invariant Δ de la forme f elle-même.

On a ensuite le déterminant formé avec les seconds termes de la première colonne et les premiers termes des autres

$$\begin{vmatrix} X_1^2 & \theta a_{12} & \theta a_{13} \\ X_1X_2 & \theta a_{22} & \theta a_{23} \\ X_1X_3 & \theta a_{32} & \theta a_{33} \end{vmatrix}$$

lequel contient θ^2 en facteur.

Il y a deux autres déterminants analogues à celui-là ; quant aux quatre autres, ils sont nuls, comme contenant chacun deux colonnes identiques.

En effet, prenons par exemple le déterminant formé par les seconds termes des deux premières colonnes et les premiers de la troisième ; il sera

$$\begin{vmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & \theta a_{13} \\ X_1X_2 & X_2^2 & \theta a_{23} \\ X_1X_3 & X_2X_3 & \theta a_{33} \end{vmatrix} = X_1X_2 \begin{vmatrix} X_1 & X_1 & \theta a_{13} \\ X_2 & X_2 & \theta a_{23} \\ X_3 & X_3 & \theta a_{33} \end{vmatrix} = 0. \ldots$$

L'équation (P) = o se réduit donc à la suivante :

$$\theta^2(\theta\Delta - F) = 0 \qquad \text{d'où } \theta = \frac{F}{\Delta}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

(A suivre.)

NOTE SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Par M. H. Laurent, répétiteur à l'École Polytechnique.

Il est souvent difficile en analyse de s'affranchir des considérations géométriques ; au point de vue philosophique il y a un vice de forme : on conçoit en effet que les vérités de l'algèbre soient indépendantes des propriétés de l'étendue.

La trigonométrie, telle qu'on l'enseigne, et telle qu'elle doit être enseignée (car on ne doit jamais cacher les méthodes d'invention), a l'inconvénient de reposer sur tous les postulata de la géométrie, et en particulier sur le postulatum d'Euclide. Il est facile de refaire la trigonométrie à un point de vue purement algébrique et de l'affranchir de toute considération géométrique ; c'est ce que nous allons faire.

1° *De l'exponentielle.* — Nous poserons

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \quad (1)$$

la fonction e^x sera alors finie et continue pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires, de x. On aura d'ailleurs

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} \quad (2)$$

en multipliant les formules (1) et (2) membre à membre on a :

$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} \ldots\ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{x^n}{1.2\ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{y}{1} + \ldots\right) + \ldots$$

ou bien. $$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} \dots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\dots n}\left[x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}y^2 \dots\right] + \dots$$
ou enfin
$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} + \dots \frac{(x+y)^n}{1\,.\,2\,.\,3\dots n} + \dots = e^{x+y}$$
Ainsi se trouve établie la propriété fondamentale de l'exponentielle, et au besoin sa continuité ; car si y est très petit, e^y est voisin de l'unité, et $e^{x+y} = e^x e^y$ est très voisin de e^x. Les autres propriétés de l'exponentielle se déduisent de là.

2° *Sinus et cosinus.* — On posera comme définition :
$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \qquad (3)$$
ou ce qui revient au même
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \dots \qquad (4)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{2^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \dots \qquad (5)$$
et on en conclura d'ailleurs
$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x \qquad (6)$$
3° *Formules d'addition.* — Si dans les formules
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad (7)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad (8)$$
on remplace $\sin(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$, $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ par leurs valeurs tirées de (3), on constate qu'elles se réduisent à des identités, ces formules (7) et (8) sont donc exactes.

4° *Autres formules fondamentales.* — Les formules (4) et (5) donnent $\sin 0 = 0$, $Lim \frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$ et $\cos 0 = 1$, $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = +\cos x$; si donc on fait $x = y$ dans la formule (8) on a :
$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x. \qquad (9)$$

5° *Racines réelles de sin* x = o, *cos* x = o. Soient $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi'}{2}$ deux racines de cos $x = 0$ comprises entre 1 et 2; s'il peut en exister plus d'une, il y aura nécessairement entre ces limites un nombre fini de racines; sans quoi il y aurait des racines de cos $x = 0$ infiniment voisines l'une de l'autre. Supposons donc $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi'}{2}$ très petit; d'après la formule (7) on aura : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi'}{2}\right) = 0$ et $\frac{\pi - \pi'}{2}$ sera racine de $\sin x = 0$; appelons cette quantité α : en vertu de (7), si l'on fait $x = \alpha$, $y = \alpha$, on aura $\sin 2\alpha = 0$, on aurait de même $\sin 3\alpha = 0$ . . . or ceci est absurde; car

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

or la quantité entre parenthèses ne s'annule pas pour des valeurs de x moindres que l'unité, car pour $x < 1$ la série

$$\frac{x^2}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2\ldots7} - \ldots$$

est moindre que $\frac{1}{6}$; sin x ne saurait donc l'annuler pour de très petites valeurs α, 2α, . . . de x; donc enfin cos x n'a qu'un nombre limité de racines comprises entre 1 et 2; $\frac{\pi}{2}$ sera la plus petite de toutes; on voit aussi que la différence de deux racines est au moins égale à un.

6° *Périodicité, suite de la recherche des racines.* — Les formules (7), (8) donnent :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad (10)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x \quad (11)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (12)$$

Donc sin x et cos x ont pour période 2π. Les formules (11) montrent que sin x s'annule pour $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$, etc., et cos x pour $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$, etc ;

sin $x = 0$, cos $x = 0$ n'ont pas d'autres racines, car si

cos = o avait une racine comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π, à savoir $\frac{\pi'}{2}$, $\pi - \frac{\pi'}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi'}{2}$ seraient racines de $\sin x = 0$; or l'une de ces différences est au plus égale à 1, puisque $\frac{\pi}{2} < 2$, et nous avons vu que $\sin x$ n'a pas de racines entre o et 1.

7° *Racines imaginaires.* — $e^{x + y\sqrt{-1}}$ est égal à e^x (cos y + $\sqrt{-1}$ sin y), donc $e^z = 0$ n'a pas de racines finies, car cos y et sin y ne peuvent être nuls à la fois en vertu de (9). Pour que $\cos z = 0$, il faut que en vertu de (3) on ait

$$e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{2z\sqrt{-1}} + 1 = 0$$

ou en remplaçant z par $x + y\sqrt{-1}$

$$e^{2x\sqrt{-1} - 2y} = -1$$

ou enfin $\cos 2x + \sqrt{-1} \sin 2x = -e^{2y}$.

Cette équation exige que $\sin 2x = 0$; donc $\cos 2x = \pm 1 = -e^{2y}$; donc $y = 0$, donc z ne saurait être imaginaire si $\cos x = 0$; on verrait de même que $\sin x = 0$ n'a pas de racines imaginaires.

8° *Variations de sin* x *et cos* x. — Si l'on suppose y très petit, les formules (7), (8) montrent que $\sin x$ croît ou décroît suivant que $\cos x$ est positif ou négatif; en effet la formule (7) peut s'écrire

$$\sin(x + y) = \sin x \left(1 - \frac{y^2}{2} \ldots\right) + \cos x \left(y - \frac{y^3}{1.2.3} \ldots\right)$$

le terme qui donne son signe à la partie qui dépend de y, c'est-à-dire à l'accroissement de $\sin x$, est $y \cos x$; donc, etc... On verrait de même que $\cos x$ croît ou décroît suivant que $\sin x$ est négatif ou positif; donc, etc.

9° *Calcul de* π. — $\frac{\pi}{2}$ est compris entre 1 et 2 d'après ce que l'on a vu ; en substituant entre 1 et 2 des moyens, on conçoit que l'étude des signes que prendra $\cos x$ permettra de resserrer les limites entre lesquelles reste compris $\frac{\pi}{2}$.

10° *Conclusion.* — Toutes les formules de la trigonométrie analytique se déduisent des propriétés que nous venons d'établir; ces propriétés sont donc indépendantes du postulatum d'Euclide et même de toute notion sur les propriétés de la ligne droite. Une construction de tables de sinus et de cosinus conduira d'ailleurs au calcul de $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est 1. La théorie que nous venons de faire était utile pour la perfection même de la science; malheureusement elle ne dispense pas de refaire la théorie géométrique du sinus et du cosinus : car il reste à calculer les lignes qui sont les coordonnées d'un point quelconque du cercle, ce que l'on ne peut faire qu'en démontrant que les propriétés de ces lignes sont précisément celles du sinus et du cosinus.

SUR LA SOMME

DES PUISSANCES SEMBLABLES DES *n* PREMIERS NOMBRES

Par M. **de Longchamps**

M. G. Dostor a donné récemment dans ce journal une méthode élémentaire pour calculer la somme des carrés, des cubes, ... des *n* premiers nombres. Le procédé employé par ce géomètre est certainement ingénieux; mais, peut-être, peut-on lui reprocher d'exiger pour le calcul des quantités S_2, S_3, ... un artifice qui varie avec chacune d'elles. On peut, comme nous allons le montrer ici, et comme nous l'enseignons depuis plusieurs années, lier par une relation simple la somme des puissances *p* des *n* premiers nombres, somme que nous représenterons par S_n^p aux quantités de *même espèce*, mais qu'on pourrait nommer d'*ordre inférieur*; nous entendons par là les fonctions

$$S_{n-1}^p,\ S_{n-1}^p \dots$$

ou encore

$$S_p^{n-1},\ S_p^{n-1}$$

Nous montrerons ensuite comment de cette relation on peut déduire de proche en proche S_n^2, S_n^3 . . . . comme on le fait dans les cours de mathématiques spéciales, lorsqu'on a établi la formule qui donne la somme des puissances p des termes d'une progression arithmétique en fonction des quantités de même espèce mais d'ordre inférieur. Cette dernière formule exige, comme l'on sait, la connaissance du binôme de Newton; la méthode que nous allons donner est au contraire intuitive; elle n'a d'autre base que l'évidence même.

1. — Disposons dans un carré dont les côtés ont été partagés en n parties égales, et comme nous l'avons fait ailleurs (*), les nombres,

$$1^p, 2^p, \dots\dots n^p$$

Ce qui donne le tableau suivant:

1^p	2^p	3^p	. . . .	n^p	A
1^p	2^p	3^p		.	
1^p	2^p	3^p	. . . .	n^p	
C 1^p	2^p	. . . .	. . . .	n^p	B

La somme totale des nombres renfermés dans ce tableau est évidemment: $n\, S_n^p$. Comptons maintenant ces mêmes nombres en suivant l'ordre indiqué par le trait ABC; la colonne AB donne $n \,.\, n^p = n^{p+1}$, puis dans la ligne BC on trouve encore:

$$1^p + 2^p + \dots + (n-1)^p = S^p_{n-1}.$$

La tranche brisée ABC renferme donc finalement $n^{p+1} + S^p_{n-1}$; appliquant cette remarque aux tranches brisées successives, jusqu'à la dernière qui est formée par 1^p, qu'on peut écrire 1^{p+1}, on a l'*identité:*

(A) $\quad n\,.\,S_n^p = S_n^p + \; + S_{n-1}^p + S_{n-2}^p + \dots + S_1^p;$

c'est la relation annoncée.

2. — Nous allons maintenant montrer comment de cette

(*) Mémoire sur les nombres de Bernouilli (*Annales de l'école normale supérieure, 1879*).

relation on peut tirer successivement S_n^2, S_n^3, ... ; dans ce but nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *La somme* S_n^p, *est une fonction entière et de degré* (p + 1), *en* n; *mais ne renfermant pas de constante.*

On sait que $S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$

Ce qui vérifie la proposition pour $p = 1$. Nous allons, conformément au procédé connu, supposer que cette loi est vraie pour les quantités

$$S_n^1, S_n^2, \ldots S_n^p,$$

et nous ferons voir qu'elle subsiste pour la fonction supérieure S_n^{p+1}.

Posons donc $S_n^p = An^{p+1} + Bn^p + \ldots + Kn,$

on en tire $S_{n-1}^p = A(n-1)^{p+1} + B(n-1)^p \ldots + K(n-1)$

. . . .

$$S_1^p = A.1^{p+1} + B.1^p + \ldots + K.1;$$

d'où

$$S_1^p + S_2^p \ldots + S_n^p = AS_n^{p+1} + BS_n^p \ldots + KS_n^1.$$

D'autre part, la formule (A) peut s'écrire :

$$(n+1)S_n^p = S_n^{p+1} + [S_n^p + \ldots + S_1^p.$$

Par conséquent

$$\text{(B)}\ (1+A)S_n^{p+1} = (n+1-B)S_n^p - CS_n^{p-1} + \ldots - KS_n^1.$$

3. — De cette identité on peut déduire plusieurs conséquences; et d'abord le théorème énoncé plus haut: car cette expression de S_n^{p+1}, et l'hypothèse qu'on a faite sur les fonctions S_n^p, $S_n^p \ldots S_1^n$, prouvent que S_n^{p+1} est bien : 1° une fonction entière de n; 2° une fonction de degré $(p+2)$; 3° qu'elle est dépourvue de constante. On peut aussi en déduire le théorème suivant.

Théorème. — *Dans le développement de* S_n^p, *suivant les puissances de* n, *le coefficient de* n^{p+1}, *est égal à* $\frac{1}{p+1}$.

La loi est vraie pour S_n^1; posons

$$S_n^p = A_n^{p+1} + \ldots$$

$$S_n^{p+1} = A'_n{}^{p+2} + B'_n{}^{p+1} + \ldots$$

on suppose, $A = \dfrac{1}{p+1}$;

il faut démontrer que $A' = \dfrac{1}{p+2}$.

Or l'identité (B) donne, en égalant les coefficients de n^{p+2},

$$A' = \frac{A}{1+A} \text{ d'où } A' = \frac{1}{p+2}.$$

4. — Nous chercherons encore à déterminer le second coefficient du développement, celui de n^p.

Théorème. — *Dans le développement de* S_n^p, *le second coefficient, celui de* n^p, *est toujours égal à* $\dfrac{1}{2}$.

L'identité (B) peut s'écrire

$$\text{(C)} \quad \frac{p+2}{p+1} S_n^{p+1} = (n+1-B)\left(\frac{n^{p+1}}{p+1} + B n^p + \dots\right)$$
$$- C S_n^{p-1} = \dots - K S_n^1.$$

en égalant les coefficients de n^{p+1},

$$B' \frac{p+2}{p+1} = B + \frac{1-B}{p+1};$$

d'où, $B' = \dfrac{Bp+1}{p+2}$.

Si $B = \dfrac{1}{2}$ on a $B' = \dfrac{1}{2}$.

Or dans S_1 $B = \dfrac{1}{2}$; donc la loi est générale.

5. — La détermination des coefficients suivants ne peut se faire que par des considérations que nous avons développées dans le mémoire cité, mais qui sortiraient du cadre élémentaire de cette note. Nous donnerons seulement en terminant le calcul des premières formules S_n^2, S_n^3.

La relation (C), si l'on y fait $p = 1$, donne :

$$\frac{3}{2} S_n^2 = \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right) S_n^1$$

ou, $3S_n^2 = (2n+1)\, S_n^2$

ou,

$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

L'hypothèse $p = 2$ donne :

$$\frac{4}{3}\,S_n^2 = \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right)S_n^2 - \frac{1}{6}\,S_n^1,$$

et par des réductions évidentes

$$S_n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (S_n^1)^2;$$

et ainsi de suite. Nous croyons, en résumé, avoir résolu par une méthode simple et élémentaire le problème qui consiste à calculer de proche en proche les quantités S_n^2, S_n^3.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques spéciales.

(Toutes ces questions ont été proposées en 1879 dans les examens de l'Université de Dublin.)

226. Si l'on a la relation

$$(fl)^{\frac{1}{3}} + (gm)^{\frac{1}{3}} + (hn)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

les coniques

$$fyz + gzx + hxy = 0$$

$$\sqrt{lx} + \sqrt{my} + \sqrt{xz} = 0$$

sont tangentes. Déterminer leur point de contact.

227. Trouver les racines communes aux équations du système

$$(\beta - \gamma)^2 (x - \alpha)^2 = (\gamma - \alpha)^2 (x - \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 (x - \gamma)^2.$$

228. Lieu du centre d'un triangle équilatéral dont les côtés passent par trois points donnés.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KOEHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 622-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE

ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 49 et suiv.)

XI. **Théorème.** — *Le cercle qui passe par les deux foyers et par le point de rencontre d'une tangente à l'ellipse et d'une parallèle au grand axe menée par l'une des extrémités du petit a pour tangente en ce dernier point la tangente considérée de l'ellipse.*

Soit (*fig. 6*) β l'angle que fait la tangente au point M avec l'axe focal de la courbe ; on a

$$PP' = NN' \cos \beta$$

or $$NN' = NM + MN' = \frac{MF + MF'}{\sin \alpha} = \frac{2a}{\sin \alpha}$$

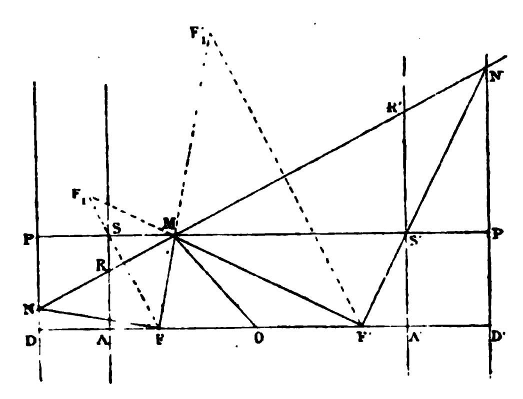


Fig. 6.

et comme $$PP' = \frac{2a^2}{c}$$

il en résulte que $$c \cos \beta = a \sin \alpha \qquad (1)$$

Ceci posé, soit (*fig. 7*) T le point où la tangente en un point M d'une ellipse rencontre le grand axe, OM le demi-

diamètre du point M; le triangle OMT donne

$$\frac{OM}{OT} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

γ étant toujours l'angle OMT; d'où

$$OT \sin\beta = OM \sin\gamma$$

et comme (VII) $OM \sin\gamma = a \cos\alpha$

$$OT \sin\beta = a \cos\alpha \qquad (2)$$

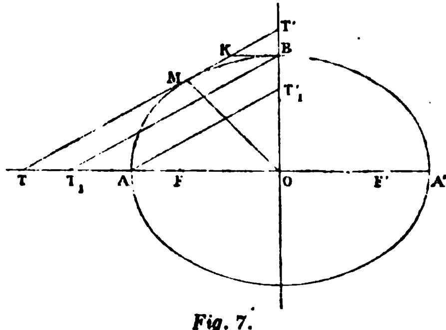


Fig. 7.

En additionnant membre à membre les égalités (1) et (2), après les avoir élevées au carré, il vient

$$\overline{OT}^2 \sin^2\beta + c^2 \cos^2\beta = a^2$$

ou en remplaçant $\cos^2\beta$ par $1 - \sin^2\beta$

$$(\overline{OT}^2 - c^2) \sin^2\beta = a^2 - c^2 = b^2$$

ou enfin $$(OT - c)(OT + c) = \frac{b^2}{\sin^2\beta}$$

Soit BT_1 parallèle à MT et BK parallèle au grand axe, il est facile de voir que $TK = BT_1 = \frac{b}{\sin\beta}$

et par suite $$\overline{TK}^2 = TF \times TF'$$

ce qui donne le théorème énoncé.

Remarque. — A l'autre extrémité B' correspond un second point K' et partant un second cercle tangent en K' à MT.

XII. **Théorème**. — *La puissance du point* T (fig. 7) *par rapport au cercle décrit du point* O *comme centre avec* OT_1 *pour rayon, est constante et égale au carré du demi-grand axe, quel que soit le point* M.

On vient de voir (XI) que

$$\overline{OT}^2 = c^2 + \frac{b^2}{\sin^2 \beta}$$

ou en remplaçant c^2 par $a^2 - b^2$

$$\overline{OT}^2 = a^2 - b^2 + \frac{b^2}{\sin^2 \beta} = a^2 + b^2 \cot g^2 \beta;$$

d'où l'on déduit

$$(OT - b \cot g \beta)(OT + b \cot g \beta) = a^2;$$

d'après la figure $OT_1 = b \cot g \beta$

donc $(OT - OT_1)(OT + OT_1) = a^2.$ c. q. f. d.

XIII. **Théorème.** — *La droite qui joint un foyer d'une ellipse au point où une tangente rencontre le petit axe, est égale à la portion comprise entre les deux axes de la parallèle à cette tangente menée par une extrémité du grand axe.*

Le triangle OMT' *(fig. 7)* donne

$$\frac{OT'}{\sin \gamma} = \frac{OM}{\cos \beta};$$

d'où $OT' \cos \beta = OM \sin \gamma = a \cos \alpha$

et comme (XI) $c \cos \beta = a \sin \alpha,$

il vient en ajoutant les deux dernières expressions après les avoir élevées au carré,

$$\overline{OT'}^2 + c^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \beta}.$$

Soit AT'_1 une parallèle à MT, il est évident que

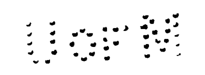
$$AT'_1 = \frac{a}{\cos \beta};$$

de plus $\overline{FT'}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OT'}^2 = c^2 + \overline{OT'}^2;$

donc $FT' = AT'_1$

Remarque. — De ce théorème résulte une construction de la tangente parallèlement à une direction donnée ; par le sommet A on mènera AT'_1 parallèle à cette direction, on prendra $FT' = AT'_1$ et par le point T' on mènera une nouvelle parallèle à la direction donnée.

XIV. **Théorème.** — *La puissance du point* T' (fig. 7) *par rapport au cercle décrit du point* O *comme centre avec* OT'_1 *pour rayon est constante et égale au carré du demi-petit axe.*



On a, d'après le théorème précédent

$$\overline{\mathrm{OT}'}^2 = \frac{a^2}{\cos^2\beta} - c^2$$

ou, comme $c^2 = a^2 - b^2$,

$$\overline{\mathrm{OT}'}^2 = \frac{a^2}{\cos^2\beta} - a^2 + b^2 = b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2\beta$$

et comme, d'après la figure,

$$\mathrm{OT}'_1 = a \operatorname{tg}\beta$$

on en conclut

$$(\mathrm{OT}' - \mathrm{OT}'_1)(\mathrm{OT}' + \mathrm{OT}'_1) = b^2. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

XV. **Théorème.** — *Le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une ellipse est un cercle,*

Soient OQ et OQ′ les distances du centre à deux tangentes rectangulaires, on a (XI)

$$\sin\alpha = \frac{c\cos\beta}{a};$$

d'où

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{c^2\cos^2\beta}{a^2}},$$

et par suite

$$\mathrm{OQ} = a\cos\alpha = a\sqrt{1 - \frac{c^2\cos^2\beta}{a^2}}$$

β étant l'angle de la tangente correspondante avec le grand axe; l'angle de l'autre tangente avec la même direction sera complémentaire du premier et l'on aura

$$\mathrm{OQ}' = a\sqrt{1 - \frac{c^2\sin^2\beta}{a^2}};$$

d'où, en additionnant après avoir élevé au carré

$$\overline{\mathrm{OQ}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}'}^2 = a^2 + b^2$$

M étant le point considéré du lieu, on peut voir sans figure que

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = \overline{\mathrm{OQ}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}'}^2 = a^2 + b^2$$

et que par suite le lieu cherché est un cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

XVI. — *Minimum de la portion d'une tangente comprise entre les axes.*

On a obtenu (XII et XIV) et en se reportant à la figure 8

$$\overline{OT}^2 = a^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta$$
$$\overline{OT'}^2 = b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \beta$$

et en ajoutant

$$\overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 = a^2 + b^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta + a^2 \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Le premier membre de cette égalité représente $\overline{TT'}^2$ et le second sera minimum en même temps que la somme

$$b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta + a^2 \operatorname{tg}^2 \beta;$$

or le produit $\quad b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta \times a^2 \operatorname{tg}^2 \beta$

est constant et égal à a^2b^2; donc le minimum aura lieu

lorsque $\quad a^2 \operatorname{tg}^2 \beta = b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta$

ou lorsque $\quad \operatorname{tg}^4 \beta = \dfrac{b^2}{a^2},$

et comme tg β est une quantité réelle, on devra prendre

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{b}{a}, \operatorname{cotg}^2 \beta = \frac{a}{b}.$$

Alors la valeur de TT'^2 sera

$$a^2 + b^2 + ab + ab = (a + b)^2$$

d'où $\quad TT' = a + b.$

Remarque. — De cette valeur de $\operatorname{tg}^2 \beta$, on déduit

$$\frac{\sin^2 \beta}{b} = \frac{\cos^2 \beta}{a} = \frac{1}{a + b},$$

d'où pour la distance du centre à cette tangente minima, en vertu de (XV),

$$OQ = a\sqrt{1 - \frac{c^2 \cos^2 \beta}{a^2}} = \sqrt{ab}.$$

XVII. **Théorème.** — *Le carré construit sur une tangente est équivalent à la somme des carrés construits sur les parallèles à cette tangente menées par les extrémités des axes, ces trois droites étant limitées aux axes.*

En effet, de ce que (XI et XIII)

$$\overline{OT}^2 - c^2 = \frac{b^2}{\sin^2 \beta}$$
$$\overline{OT'}^2 + c^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \beta},$$

il vient, par addition

$$\overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \beta} + \frac{b^2}{\sin^2 \beta};$$

or, d'après la figure 8, on voit facilement que cette expression n'est autre que la suivante

$$\overline{TT'}^2 = \overline{AT'_1}^2 + \overline{BT_1}^2$$

qui donne l'énoncé.

Remarque. — Soient OQ' perpendiculaire à AT'_1 (*fig. 7*), OQ" perpendiculaire à BT_1 on a, d'après la figure

$$OQ' = a \sin \beta$$
$$OQ'' = b \cos \beta,$$

d'où $\overline{OQ'}^2 + \overline{OQ''}^2 = a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta = a^2 - c^2 \cos^2\beta$;
or (XV) OQ désignant la distance du centre à la tangente TT', on a $\overline{OQ}^2 = a^2 - c^2 \cos^2 \beta$;
donc $\overline{OQ}^2 = \overline{OQ'}^2 + \overline{OQ''}^2$

2° Propriétés de la normale.

La construction graphique de la normale dans les différents cas qui peuvent se présenter ayant été donnée dans le Journal (voir 3e année, p. 197), il est inutile d'y revenir.

XVIII. **Théorème.** — b *et* c *étant deux côtés d'un triangle faisant entre eux l'angle* A, *et* l *la longueur de la bissectrice intérieure de cet angle, on a*

$$l = \frac{2\,bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

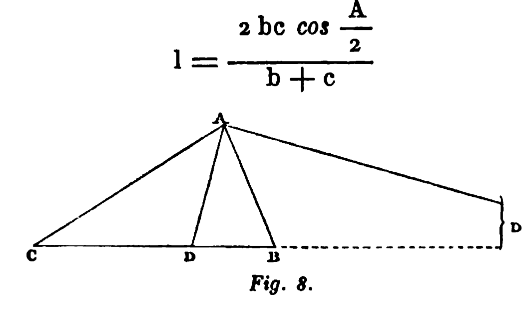


Fig. 8.

Soit (*fig. 8*) ABC le triangle considéré, AD la bissectrice intérieure de l'angle A ; la surface du triangle a pour expression d'une part $\frac{1}{2}\, bc \sin A$

et d'autre part, en considérant le triangle comme formé des deux triangles partiels ADC et ADB,

$$\frac{bl \sin \frac{A}{2}}{2} + \frac{cl \sin \frac{A}{2}}{2} = \frac{l(b+c) \sin \frac{A}{2}}{2};$$

en égalant ces deux expressions, il vient

$$bc \sin A = l(b+c) \sin \frac{A}{2},$$

et, si l'on remplace sin A par $2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, on trouve

$$l = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

Remarque. — Une méthode analogue conduirait à l'expression suivante de la bissectrice extérieure :

$$l' = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b-c}$$

XIX. — *Longueur, limitée au grand axe, de la normale en un point d'une ellipse.*

Si l'on suppose que le triangle ABC représente celui des rayons vecteurs d'un point d'une ellipse dont les foyers seraient les points C et B, on voit que

$$bc = MF \times MF' = b'^2$$
$$b + c = MF + MF' = 2a$$

et si l'on désigne par N la longueur définie dans l'énoncé, on trouve en vertu du théorème précédent :

$$N = \frac{b'^2 \cos \alpha}{a},$$

et comme (VIII, *Remarque*)

$$\cos \alpha = \frac{b}{b'}$$

on a aussi

$$N = \frac{bb'}{a}.$$

XX. **Théorème.** — *La projection de* N *sur les rayons vecteurs du point* M *est constante, quel que soit le point* M.

Si dans la première valeur de N (XIX) on élimine b' au lieu de $\cos \alpha$, on obtient $N = \dfrac{b^2}{a \cos \alpha}$

ou $$N \cos \alpha = \frac{b^2}{a}$$

expression qui montre que cette projection est égale à $\frac{b^2}{a}$.

XXI. **Théorème.** — *Le produit de la longueur* N *de la normale par la distance du centre à la tangente correspondante est constant et égal à* b^2 *pour tout point de l'ellipse.*

En effet, OQ désignant la distance du centre à une tangente, on sait (VI, *Remarque*) que
$$OQ = a \cos \alpha,$$
d'où $$N \times OQ = \frac{b^2}{a \cos \alpha} \times a \cos \alpha = b^2.$$

XXII. **Théorème.** — *D'un point pris dans le plan d'une ellipse, on peut, en général, mener quatre normales à la courbe.*

Soit (*fig.* 9) M point d'une ellipse de foyers F et F′ où aboutit une normale issue du point P, RP une perpendiculaire sur FF′, MH une seconde perpendiculaire sur FF′ et enfin D le point où la normale PM rencontre FF′.

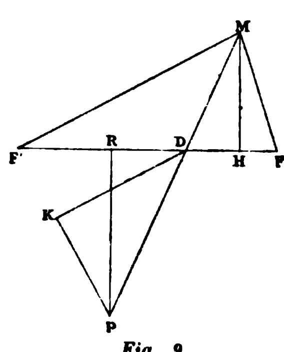


Fig. 9.

MD étant bissectrice de l'angle FMF′, on a la suite des rapports
$$\frac{F'D}{MF'} = \frac{FD}{MF} = \frac{F'D + FD}{MF' + MF} = \frac{c}{a};$$
d'où l'on tire
$$MF' = \frac{a}{c} F'D.$$

De plus, le triangle MDF′ permet d'écrire la relation
$$\overline{F'D}^2 = \overline{MF'}^2 + \overline{MD}^2 - 2MF' \times MD \cos \alpha$$
et en y remplaçant MF′ par sa valeur trouvée ci-dessus et MD par $\frac{b^2}{a \cos \alpha}$ (XX), on trouve, après réductions,
$$\overline{F'D}^2 - 2cF'D + \frac{b^2c^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

Le point P étant donné par sa distance PR, la normale PM sera déterminée par la longueur RD qui sera l'inconnue

du problème ; si l'on pose $F'R = l$, on a

$$F'D = l + RD$$

et en remplaçant F'D par cette valeur dans la relation précédente, il vient

$$(l + RD)^2 - 2c\,(l + RD) + \frac{b^2c^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 0;$$

d'où l'on tire

$$a^2 \cos^2 \alpha = \frac{b^2c^2}{(l + RD)\,[2c - (l + RD)]}.$$

Cela étant, les triangles semblables PRD et MDH donnent

$$\frac{PR}{RD} = \frac{MH}{DH};$$

d'où

$$RD = PR.\frac{DH}{MH},$$

et si l'on remarque que, dans le triangle rectangle MDH

$$\overline{DH}^2 = \overline{MD}^2 - \overline{MH}^2$$

ou

$$\frac{DH}{MH} = \sqrt{\frac{\overline{MD}^2}{\overline{MH}^2} - 1},$$

et si l'on pose $PR = d$, il vient

$$RD = d\sqrt{\frac{\overline{MD}^2}{\overline{MH}^2} - 1}.$$

En se reportant aux valeurs de MD (XX) et MH (V) on trouve que

$$\frac{MD}{MH} = \frac{c}{a \sin \alpha},$$

d'où

$$RD = d\sqrt{\frac{c^2}{a^2 \sin^2 \alpha} - 1}.$$

Remplaçant dans cette expression $\sin^2 \alpha$ par $1 - \cos^2 \alpha$, élevant au carré, et résolvant par rapport à $\cos^2 \alpha$, on trouve facilement

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2\overline{RD}^2 + b^2d^2}{a^2(\overline{RD}^2 + d^2)},$$

et en égalant les deux valeurs de $\cos^2 \alpha$ ainsi obtenues, puis ordonnant par rapport à l'inconnue RD, on a l'équation

$$a^2\overline{RD}^4 + 2a^2\,(l - c)\,\overline{RD}^3 + [b^2(d^2 + c^2) - a^2l\,(2c - l)]\,\overline{RD}^2 + 2b^2d^2(l - c)\,RD + b^2d^2(l - c)^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré ; elle admet donc en général quatre racines ; on peut donc en conclure que du

point P on peut mener, en général, quatre normales à l'ellipse. Il est évident que les valeurs l et d, qui déterminent le point P, peuvent être telles que l'équation admette ou des racines égales ou des racines imaginaires, auquel cas le nombre des normales est inférieur à quatre. *(A suivre.)*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par **L. Guéroult**, élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Lorsque deux plans se coupent et qu'un cercle est situé dans l'un d'eux, l'angle formé par les droites qui joignent le centre de ce cercle aux deux foyers de l'ellipse qui en est la projection sur l'autre plan, est indépendant de l'angle des deux plans. Il ne varie qu'avec la distance du centre du cercle à l'intersection des deux plans.

Considérons deux plans AP, AQ, coupés perpendiculairement par le plan du tableau (*fig. 1*), et le centre O d'un cercle situé dans le plan AP; un diamètre BC de ce cercle se confond avec la ligne de plus grande pente passant par le point O. On sait que la projection de BC est le petit axe de l'ellipse, et que le grand axe est égal au diamètre. Soient $OB = a$, $BG = b$, $AO = a + d$, et menons OO′ perpendiculaire et BG parallèle à AQ,

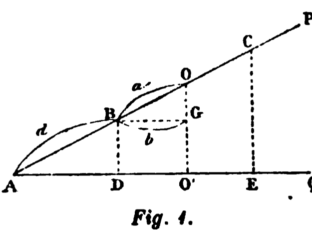


Fig. 1.

J'exprime la distance OO′ en fonction de a, b, d, à l'aide des données suivantes :

Dans le triangle OGB, on a $OG = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Dans les deux triangles semblables BAD, OGB, on a la relation :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BG}{BO},$$

ou bien

$$\frac{AD}{d} = \frac{b}{a}.$$

D'où enfin $\mathrm{AD} = \frac{bd}{a}$.

Mais dans le triangle rectangle BAD,

$$\mathrm{BD} = \sqrt{d^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2} = \sqrt{d^2 - \frac{b^2d^2}{a^2}} = \frac{d}{a}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Posons $\sqrt{a^2 - b^2} = c$; la longueur OO′ se compose de OG et de O′G, égal lui-même à BD;

donc $\mathrm{OO'} = c + \frac{dc}{a} = \frac{(a+d)c}{a}$.

Imaginons le point O joint aux deux foyers F, F′ de l'ellipse ainsi qu'au point O′ (*fig. 2*) et soit x la moitié de l'angle cherché; dans le triangle rectangle OO′F′, O′F′ = c et nous avons trouvé $\mathrm{OO'} = \frac{(a+d)c}{a}$;

on a donc en simplifiant :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\mathrm{O'F'}}{\mathrm{OO'}} = \frac{a}{a+d} \qquad (1)$$

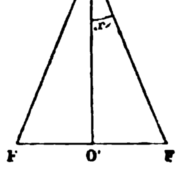


Fig. 2.

Cette valeur de tg x est indépendante de l'angle des deux plans et ne se compose que des facteurs constants a et d; par conséquent le théorème est démontré.

Il y a lieu de considérer le cas où, dans leur mouvement de rotation, les deux plans deviennent perpendiculaires l'un à l'autre (*fig. 3*); on sait qu'alors la projection du cercle est une ligne droite égale au diamètre. Or, toute droite DC peut être considérée comme la limite vers laquelle tend une ellipse lorsque ses deux foyers s'écartent respectivement jusqu'aux extrémités C et D du grand axe. Si donc nous trouvons pour l'angle AOC la même valeur que précédemment (1), le théorème sera encore vrai.

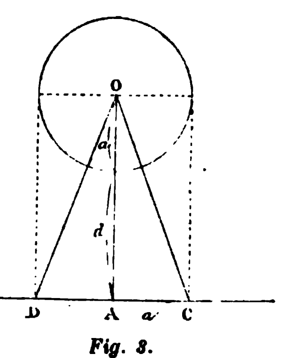


Fig. 3.

Or $\mathrm{OA} = a + d$, $\mathrm{AC} = a$.

Donc $$\operatorname{tg} x = \frac{a}{a+d}.$$

Si enfin dans la formule générale $\operatorname{tg} x = \frac{a}{a+d}$ on fait $d = 0$, le cercle sera tangent à l'intersection des deux plans ; on aura $$\operatorname{tg} x = 1$$
et $$2x = 90°.$$

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Solution du problème donné pour l'admission en 1877.

Par M. **B. Malloizel**, ancien élève de l'École polytechnique, professeur à Sainte-Barbe.

On donne un triangle ABC *rectangle en* A*; on considère toutes les coniques circonscrites à ce triangle et telles que les tangentes en* B *et* C *concourent sur la hauteur du triangle. On demande :*

1° *Le lieu des points de rencontre des normales en* B *et* C*;*

2° *Le lieu des centres de ces coniques ; on séparera la partie du lieu qui correspond aux ellipses et aux hyperboles;*

3° *Le lieu des pôles d'une droite quelconque* D. *Ce lieu est une conique; la droite* D *étant telle que cette conique soit une parabole, trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur cette droite.*

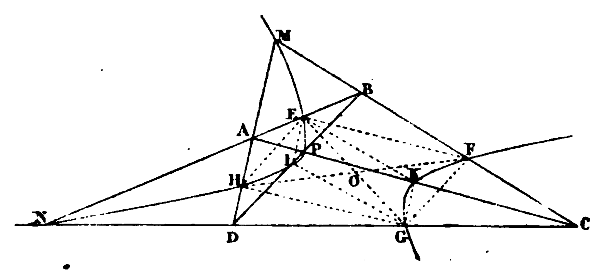
Je rappellerai tout d'abord les théorèmes suivants sur lesquels je m'appuierai plus loin :

Théorème I. — *Le lieu des centres des coniques passant par quatre points* A, B, C, D, *est une conique qu'on appelle la conique des neuf points.*

Ces neuf points sont les centres M, N, P des trois couples de droites passant par les quatre points et les points E, F, G, H, I, K, milieux des droites AB, BC, CD, DA, BD, AC. Les trois droites EG, HF, IK se coupent en un même point O qui est leur milieu. Ce point O est le centre de la conique.

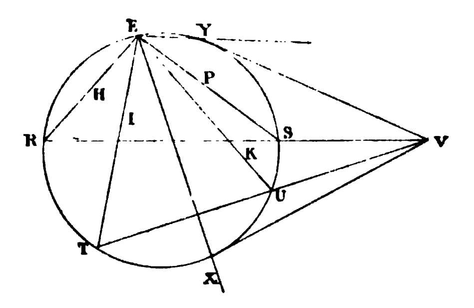
Cette conique est une ellipse, si on ne peut pas former

avec les quatre points un quadrilatère convexe. Elle est une hyperbole dans le cas contraire, comme dans la figure ci-contre. Je ferai remarquer que l'on peut déterminer facilement les asymptotes de cette hyperbole, ainsi qu'il suit :

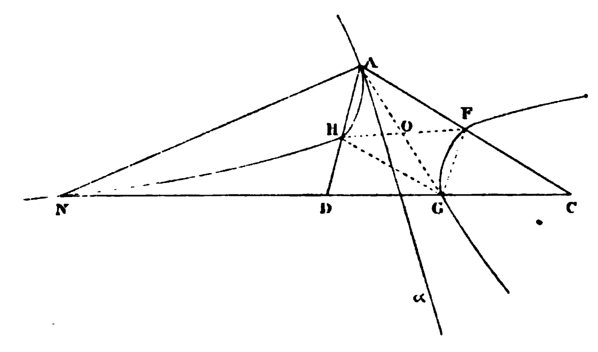


HF est un diamètre, donc les cordes supplémentaires HE, EF sont parallèles à deux diamètres conjugués; il en est de même de IE et EK. Les systèmes de diamètres conjugués forment un faisceau en involution dont les asymptotes sont les droites doubles.

Si donc je décris un cercle quelconque passant par le point E, et si je prolonge les quatre droites EH, EF, EI, EK jusqu'à ce cercle, les deux droites RS, TU se coupent en un point fixe V. En menant les tangentes VX, VY, les lignes EX, EY sont les directions asymptotiques. On obtient les asymptotes en menant par le point O des parallèles à ces directions. Remarquons encore que la ligne ME est la droite conjuguée de la parallèle MZ à AB par rapport aux deux droites MA et MB. Si les deux points A et B viennent à se confondre, on a des coniques tangentes en A à la droite AN; le lieu des centres est une hyperbole dont les points M et E sont venus se confondre en A, et la limite de ME, où la tangente en A est la droite $A\alpha$ conjuguée de AN par rapport aux deux droites AD et AC.



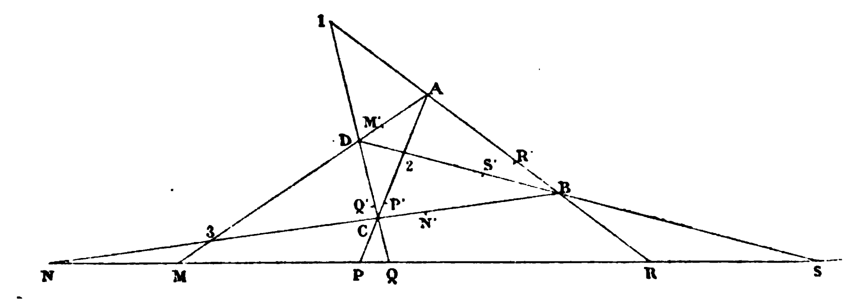
Nota. — En revenant à notre première figure, ou en considérant celle-ci, on voit immédiatement que les points de la branche GF sont des centres d'ellipses, tandis que les points de la branche NH sont des centres d'hyperboles. Car les points M, N, P de la première figure sont les centres de



couples de droites passant par les quatre points, c'est-à-dire d'hyperboles. Il en sera de même pour les points voisins et par suite pour toute la branche. D'ailleurs, en prenant un de ses points comme centre et joignant à trois des quatre points donnés, pour avoir leurs symétriques, on a un hexagone non convexe. Le contraire a lieu pour l'autre branche.

Théorème II. — *Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques qui passent par quatre points, est une conique.*

Par les quatre points donnés A, B, C, D, on peut mener trois couples de droites qui coupent la droite fixe X aux



points N, M, P, Q, R, S. Je prends le point M′ conjugué harmonique du point M par rapport aux points A et D; de même N′, P′, Q′, R′, S′. La conique, lieu des pôles, passe par ces six points, ainsi que par les points 1, 2, 3 de concours des trois couples de droites.

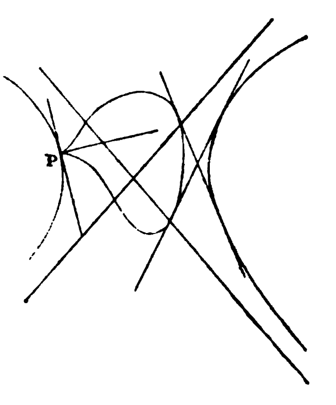
On déduit d'ailleurs le lieu précédent de celui-ci, en supposant que la droite X s'éloigne à l'infini.

Théorème III. — *La podaire d'un point par rapport à une courbe du second degré, est une courbe du quatrième degré, ayant pour point double ce point.*

En particulier, si ce point est sur la courbe, le point double devient un point de rebroussement dont la tangente est la normale à la conique en ce point. De plus si la conique est une hyperbole, la podaire est une courbe fermée ayant la forme ci-contre, quel que soit le point P pris sur l'hyperbole.

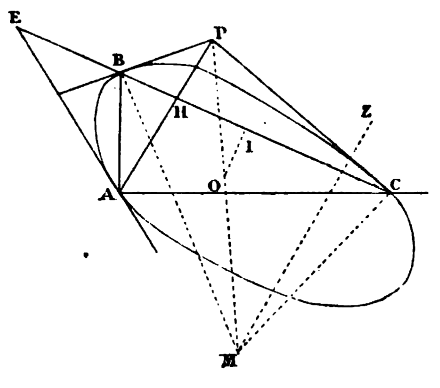
Je reviens maintenant à la question que je me suis proposé de traiter.

1re Partie. — Si je prends un point P sur la hauteur AH et que je joigne BP et CP, la conique tangente à ces deux droites en B et C et passant en A est une des coniques de l'énoncé; les deux normales en B et C se coupent au point M dont on demande le lieu quand P varie sur la hauteur AH. Le quadrilatère MCPB est inscriptible, puisque les angles en B et C sont droits; PM est un diamètre du cercle circonscrit et son milieu O est le centre qui se trouve aussi sur la perpendiculaire élevée à BC en son milieu I qui est fixe. Comme OM = OP, le lieu du point M est donc la perpendiculaire à BC, symétrique de la hauteur AH par rapport au point I.

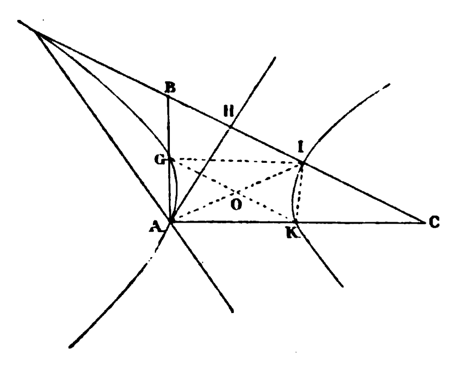


2e Partie. — Considérons une conique remplissant les conditions données et menons sa tangente AE en A. Le point

E de rencontre de cette tangente avec BC a évidemment pour polaire la droite AP, c'est-à-dire la hauteur du triangle, et les quatre points E, B, H, C sont conjugués harmoniques. J'en conclus que le faisceau ACHBE est harmonique et, comme l'angle BAC est droit, la droite AB est bissectrice de l'angle EAH. La droite AE est donc une droite fixe, faisant avec AB un angle égal à BAH, quelle que soit la conique de l'énoncé. On peut donc considérer ces coniques comme tangentes en A à une droite fixe AE et passant par deux points fixes B et C.



Nous savons que le lieu des centres de ces coniques est une hyperbole passant par les points I, K, G milieux de BC, CA, AB, et par les points E et A. La tangente en A est d'ailleurs la ligne conjuguée de AE par rapport aux droites AB et AC, c'est-à-dire la hauteur AH du triangle ABC. Le centre de l'hyperbole est d'ailleurs le centre ω du rectangle AKIH et les axes sont les parallèles aux côtés menées par le point ω.



D'ailleurs, la branche EGA correspond à des centres d'hyperboles et la branche IK à des centres d'ellipses, comme nous l'avons dit précédemment.

3e Partie. — Considérons une droite quelconque D fixe.

Cette droite a un pôle par rapport à chaque conique de l'énoncé.

Le lieu de ce pôle est une conique, d'après le théorème 2. Ce pôle est à distance finie tant que la droite D ne passe pas par le centre de la conique. Le lieu des centres des coniques étant l'hyperbole précédente, la droite D coupe cette hyperbole en deux points; il y a donc deux coniques ayant leurs centres sur la droite D et par suite deux pôles rejetés à l'infini. Le lieu des pôles est donc une ellipse si la droite D ne coupe pas l'hyperbole lieu des centres en des points réels. C'est une hyperbole si D coupe le lieu des centres en des points réels.

Enfin le lieu des centres sera une parabole si la droite D est tangente à l'hyperbole. — Les différentes positions de la droite D qui correspondent à une parabole sont donc les tangentes à l'hyperbole du lieu précédent.

Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point A sur ces droites n'est donc autre que la podaire de cette hyperbole par rapport au point A.

Ce lieu est une courbe du quatrième degré, fermée, ayant un point de rebroussement au point A. La tangente en ce point est la normale à l'hyperbole, c'est-à-dire la perpendiculaire à AH ou la parallèle à BC.

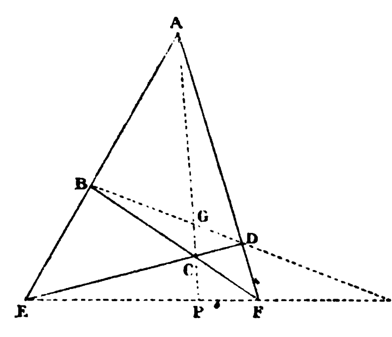
NOTE RELATIVE AU THÉORÈME DE PAPPUS
SUR LE QUADRILATÈRE COMPLET

Par **P.-A.-G. Colombier.**

Théorème de Pappus. — *Dans un quadrilatère complet chaque diagonale est divisée harmoniquement par les points où elle est rencontrée par les autres.*

Démonstration. — Dans un quadrilatère complet, il y a trois diagonales. Pour chaque diagonale il y a quatre manières de présenter la démonstration. Chaque manière comporte

un certain choix à faire, ce qui peut causer quelque embarras. Voici une règle générale et simple, qui permet d'arriver au but sans hésitation, *quelle que soit la diagonale que l'on considère.*



Supposons que l'on ait écrit, dans un ordre quelconque, sur une même ligne horizontale, les six lettres qui désignent les six sommets du quadrilatère complet: A, B, C, D, E, F.

Supposons qu'on demande de démontrer le théorème pour une diagonale déterminée: AC par exemple. Je joins aux deux lettres A et C *une quelconque des quatre lettres restantes;* soit la lettre B. Les trois lettres A, C, B déterminent le *triangle* ABC. Des trois lettres restantes D, E, F, il y en a deux, et deux seulement, qui déterminent une des deux autres diagonales. C'est la *diagonale* EF. Enfin il reste la lettre D qui désigne le sixième sommet du polygone, c'est-à-dire *un point.*

Cela posé j'applique le théorème de Jean de Céva au *triangle* ABC et au *point* D; il vient:

$$\frac{GA}{GC} \cdot \frac{EB}{EA} \cdot \frac{FC}{FB} = -1.$$

J'applique le théorème de Ménélaüs au *même triangle* ABC, et à la *diagonale transversale* EF. Il vient :

$$\frac{PA}{PC} \cdot \frac{EB}{EA} \cdot \frac{FC}{FB} = +1.$$

Si l'on divise l'avant-dernière égalité par la dernière, on trouve:

$$\frac{GA}{GC} : \frac{PA}{PC} = -1. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

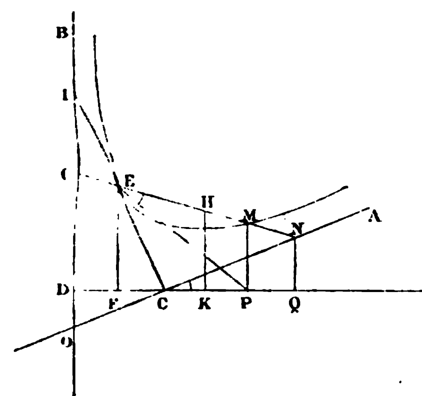
PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLE

Par M. J. Cernesson, professeur au Lycée de Bourges.

Théorème. — *Soient une hyperbole et ses deux asymptotes* OA, OB. *On mène la tangente* CEI *perpendiculairement à* OA. *Du pied* C *de cette perpendiculaire, on abaisse une perpendiculaire* CD *sur* OB. — *Toute ordonnée* MP *de la courbe, relative à* CD, *sera vue du point de contact* E *sous un angle constant.*

Démonstration. — Je prolonge CE jusqu'à sa rencontre en I avec OB et EM jusqu'à ses rencontres respectives en N et en G avec OA et OB. Des points E, M, N, et du point H, milieu de EM, j'abaisse les perpendiculaires EF, MP, NQ, HK sur DC. En vertu d'une propriété connue de l'hyperbole, EI = EC, et par suite DF = FC. De même EG = MN, et par suite DF = PQ. Par conséquent FC = PQ, et le point K, milieu de FQ, est aussi le milieu de CP. Le point H est donc également distant des points C et P; d'autre part, il est le centre d'une circonférence passant par E, N, C, puisqu'il est le milieu de EN et que l'angle ECN est droit. Donc les quatre points E, N, P, C sont sur une même circonférence. Il en résulte que NEP est égal à l'angle ACP, qui est constant,

c. q. f. d.



NOTE SUR L'INTERSECTION

DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND ORDRE DONT LES AXES SONT DANS UN MÊME PLAN

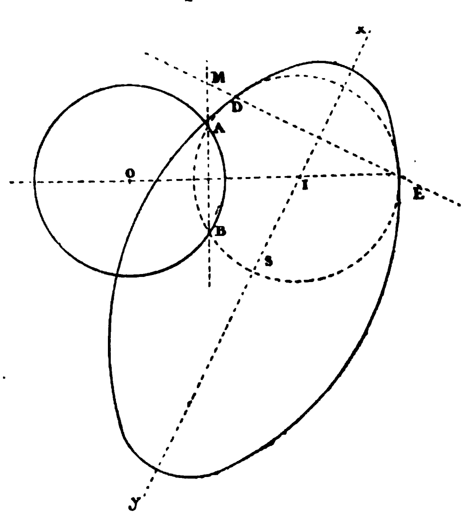
Par **A. Janin**, élève de Mathématiques spéciales à Sainte-Barbe.

Théorème. — *La projection de l'intersection de deux surfaces de révolution du second ordre dont les axes sont parallèles sur un plan parallèle au plan des axes est une parabole.*

Il est d'abord évident que cette projection est une conique.

Nous démontrerons le théorème d'abord dans le cas où l'une des surfaces de révolution est une sphère.

Soient O la sphère donnée, S la surface de révolution. Par le point O je mène une droite OI rencontrant l'axe xy de la surface S, et je considère la sphère O et la surface S comme des surfaces de révolution dont les axes se rencontrent en I.



Pour construire un point de la projection de l'intersection j'applique la méthode indiquée en géométrie descriptive en coupant les deux surfaces par des sphères ayant leur centre au point I.

Je considère en particulier la sphère inscrite dans la surface S. Cette sphère coupe cette surface suivant un parallèle double qui se projette suivant la droite DE, et cette sphère coupe la sphère O suivant des parallèles; l'un se

projette suivant AB, l'autre est le cercle de l'infini commun a toutes les sphères : il se projette suivant la droite de l'infini du plan de projection.

On a démontré que la projection de l'intersection des deux surfaces est tangente aux projections des parallèles suivant lesquels la sphère limite coupe la surface pour laquelle elle est sécante.

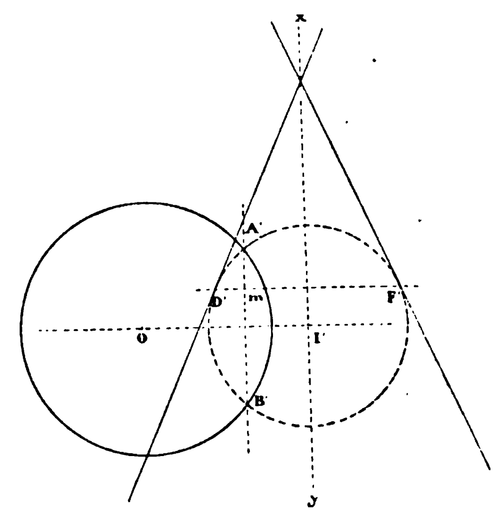
La projection de l'intersection est donc tangente à la droite AB et à la droite de l'infini de son plan. Cette projection est d'ailleurs une conique. Nous avons démontré le théorème énoncé.

Construction de l'axe de la parabole.

Remarquons d'abord que la droite DE qui rencontre la parabole en un point M et en un point à l'infini est un diamètre et que les cordes qui lui sont conjuguées sont parallèles à la tangente AB menée au point M, extrémité du diamètre.

Remarquons en outre que DE est perpendiculaire à l'axe xy et que AB est perpendiculaire à la droite arbitraire OI.

Si nous voulons obtenir l'axe de la parabole, nous remarquerons que l'axe est un diamètre perpendiculaire à ses cordes; il faudra donc déterminer sur l'axe un point I tel qu'en appliquant la construction précédente on obtienne des droites A′B′, D′E′ perpendiculaires l'une sur l'autre.



Or D′E′ a une direction fixe, cette droite est perpendiculaire à l'axe xy; A′B′ est perpendiculaire à OI′; pour qu'il soit également per-

pendiculaire sur D'E', il faut que OI' soit parallèle à D'E', c'est-à-dire soit perpendiculaire à l'axe xy.

De là résulte la construction suivante :

On projette le centre de la sphère sur l'axe xy. Soit I' cette projection. On mène la sphère inscrite dans la surface S et ayant son centre au point I' ; cette sphère coupe la surface S suivant un parallèle double dont la projection D'E' est l'axe de la parabole projection de l'intersection.

En construisant par la méthode indiquée un autre point de la parabole et sa tangente, on aura tous les éléments nécessaires à la construction de cette courbe.

« Considérons maintenant le cas de deux surfaces de révolution à axes parallèles.

» Le théorème sera démontré si l'on fait voir que l'on peut faire passer une sphère par l'intersection de ces deux surfaces.

» Remarquons d'abord que deux surfaces de révolution à axes parallèles sont deux surfaces ayant leurs *deux* directions de plans cycliques parallèles.

» Je dis maintenant que par l'intersection de deux surfaces du second ordre S, S', ayant leurs deux directions de plans cycliques parallèles, on peut toujours faire passer une sphère.

» Soient en effet C, C' les sections de ces deux surfaces par le plan de l'infini, et soit T le cercle de l'infini.

» Pour obtenir les plans cycliques de la surface S, je ferai passer des plans par un point I de l'espace situé à distance finie et par les sécantes communes à la conique C et au cercle T, soient D, D_1 les sécantes communes réelles.

» Pour obtenir les plans cycliques de la surface S', je fais passer des plans par le point I et par les sécantes communes à la conique C' et au cercle T, soient D' et D_1' les sécantes communes réelles.

» Les deux surfaces ayant mêmes plans cycliques, les plans que nous avons menés coïncident ; il en est de même des droites DD' et $D_1D'_1$.

» Les coniques C et C' ont leurs quatre points d'intersection

sur le cercle T; en effet, chacune d'elles passe par les points d'intersection du cercle T et du couple de sécantes DD_1. Soient *abcd* les points d'intersection des coniques et du cercle.

» Cela posé, je fais passer une sphère par quatre points de l'intersection des deux surfaces S, S'; cette sphère passera par le cercle T, et, par suite, par les points *a*, *b*, *c*, *d*. Elle contiendra donc huit points de l'intersection des surfaces S, S' (les quatre points considérés à distance finie et les quatre points *a*, *b*. *c*, *d*). Par suite elle passera par l'intersection tout entière des surfaces S, S'. » (*) c. q. f. d.

Remarque. — La projection de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent sur un plan parallèle au plan des axes est une conique.

Lorsque cette conique est une hyperbole on peut en déterminer géométriquement les asymptotes.

Nous effectuerons cette détermination en deux fois:

1° Direction des asymptotes (c'est-à-dire détermination du point à l'infini sur ces droites);

2° Détermination d'un point de l'asymptote (à distance finie).

1° *Direction des asymptotes.* — Soient S, S' les deux surfaces de révolution.

Soient en outre C, C' les coniques d'intersection des surfaces S, S' par le plan de l'infini.

Ces coniques C, C' se coupent aux quatre points *ab*, *cd*, qui sont deux à deux sur une même perpendiculaire au plan de projection, et les asymptotes de la projection de l'intersection des deux surfaces passeront par les projections des points *ab*, *cd*.

La détermination de la direction des asymptotes revient donc à la détermination des projections des points *ab*, *cd*, c'est-à-dire à la détermination des points d'intersection des coniques C, C'.

Soient S_1, S_1' deux surfaces homothétiques aux surfaces

(*) Cette généralisation a été indiquée par M. J. Réveille, élève à l'École polytechnique.

S, S'; ces deux surfaces passeront par les coniques C, C', et par suite la projection de leur intersection passera par les projections des points *ab*, *cd*. Nous pourrons donc pour la détermination de ces points, remplacer les surfaces S, S' par les surfaces S_1, S_1'.

Nous pouvons en outre disposer des surfaces S_1, S_1' de manière qu'elles soient circonscrites à une même sphère, puisqu'elles sont toutes deux de révolution. Leur intersection se composera alors de deux courbes planes dont les plans seront perpendiculaires au plan de projection. La projection de l'intersection des deux surfaces S_1, S_1' se composera alors de deux droites A, A' passant par les points *ab*, *cd*, ces droites seront parallèles aux asymptotes de la projection de l'intersection des surfaces S, S'.

Pour appliquer cette méthode dans la pratique nous distinguerons trois cas :

1° Aucune des surfaces S, S' n'est un ellipsoïde. On tracera alors dans un coin de l'épure un cercle O et l'on mènera à ce cercle des couples de tangentes S_1S_1' parallèles aux génératrices de contour apparent des cônes asymptotes des surfaces S, S'. On fera en sorte que les cônes S_1, S_1' soient circonscrits à la sphère O, ce qu'on reconnaîtra facilement en remarquant qu'alors les cordes de contact sont perpendiculaires aux axes de révolution.

Les sécantes communes A, A' des coniques S_1, S_1' qui passent par le point de concours des cordes de contact seront les directions des asymptotes.

2° Une seule des surfaces est un ellipsoïde. Soit S l'ellipsoïde. Pour éviter le tracé de nouvelles courbes on conservera l'ellipse S, on construira un cercle O bitangent à l'ellipse et pour simplifier on pourra le prendre concentrique à l'ellipse.

On fera en sorte, comme précédemment, que la sphère O soit circonscrite à l'ellipsoïde S, ce qu'on obtiendra en prenant pour diamètre du cercle O l'axe de l'ellipse qui n'est pas l'axe de révolution; on mènera alors au cercle O un couple de tangentes S'_1 parallèles aux génératrices de contour apparent, d'où une asymptote de S', etc.

Remarque. — Si l'une des surfaces S' était un paraboloïde de révolution, le couple de tangentes S_1' correspondant à ce paraboloïde se composerait de deux droites parallèles à l'axe de la parabole S'.

3° Enfin les deux surfaces sont deux ellipsoïdes. On effectue alors la construction comme précédemment; seulement on prend pour surface S'_1, un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde S' et circonscrit à la sphère suivant un grand cercle.

Cette discussion va nous permettre d'énoncer dans quel cas la projection de l'intersection sera une hyperbole, dans quel cas cette projection sera une ellipse.

1° Lorsque aucune des surfaces n'est un ellipsoïde aplati, les coniques S_1, S'_1 sont toutes deux extérieures au cercle O et se coupent en quatre points réels, ce qui donne deux asymptotes A, A' réelles.

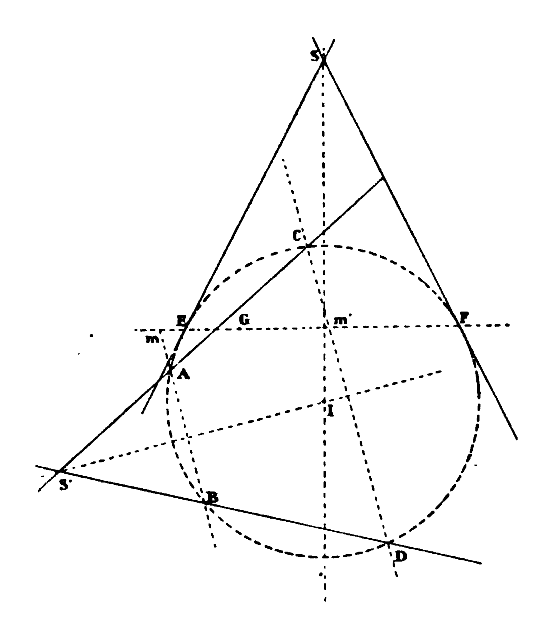
Il en est de même lorsque les deux surfaces sont des ellipsoïdes aplatis, car alors les deux surfaces sont toutes deux intérieures au cercle O, etc.

2° Lorsqu'une seule des surfaces S est un ellipsoïde aplati, les coniques S_1, S'_1 sont l'une intérieure, l'autre extérieure au cercle O, et ne se coupent pas en des points réels. Le couple AA' est alors imaginaire et la projection de l'intersection des surfaces S, S' est une ellipse.

2° *Détermination d'un point de l'asymptote.* — Nous connaissons la direction des asymptotes; pour achever de déterminer ces asymptotes, il suffira de construire un point de chacune de ces asymptotes. Pour simplifier, nous construirons le point de concours de ces asymptotes, c'est-à-dire le centre de la conique projection de l'intersection des deux surfaces.

Soient S, S', les deux surfaces, I le point de concours des axes de révolution des deux surfaces S, S'; soit O la sphère inscrite à la surface S et qui a son centre au point I; cette sphère coupe la surface S suivant la parallèle double EF et la surface S' suivant les deux parallèles AB, CD, et l'intersection est tangente aux deux parallèles CD, AB; soient m, m_1 les points de l'intersection situés sur la droite EF; les tangentes aux points m, m_1 sont précisément les droites AB,

CD; ces tangentes sont parallèles; donc mm_1 est un diamètre en grandeur et en position.



La construction du centre de la conique projection de l'intersection est maintenant évidente.

Remarque. — Le diamètre EF et ses cordes AB sont respectivement perpendiculaires aux axes des surfaces. On pourra donc dans le cas de l'ellipse, en appliquant deux fois la construction précédente, construire un système de deux diamètres conjugués de la projection de l'intersection.

La construction précédente est en défaut lorsque le cercle décrit du point I comme centre n'a pas un double contact réel avec la conique S.

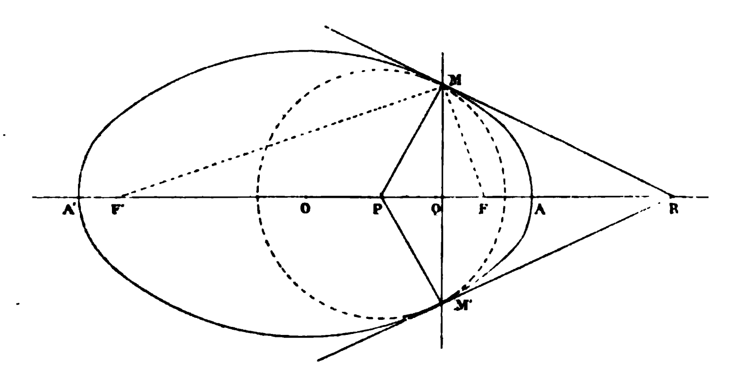
Nous appliquerons alors la construction indiquée ci-dessous et qui permet de construire, avec la règle et le compas, la corde de contact d'un cercle bitangent à une ellipse ou une hyperbole déterminée par ses axes, ou bitangent à une parabole dont on donne l'axe et le paramètre.

Lemme I. — Si d'un point pris sur l'axe d'une conique à centre, on mène les normales, les points d'incidence des deux normales (autres que l'axe) se trouvent sur une perpendiculaire à l'axe.

Si l'on désigne par ξ, ξ_1 les distances du centre de la courbe à la droite qui joint les points d'incidence des normales et au point d'où partent les normales, si l'on désigne en outre par α, γ les distances du centre de la courbe aux sommets et aux foyers situés sur l'axe considéré, on a la relation

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}.$$

Soit en effet P le point d'où sont issues les normales, MM les points d'incidence. Menons la tangente au point M, cette tangente rencontre l'axe au point R qui est évidemment le



pôle de la droite MM', les points R et Q sont donc conjugués harmoniques par rapport au segment AA'; on a donc

$$OQ \,.\, OR = \overline{OA}^2$$

c'est-à-dire $$\xi \,.\, OR = \alpha^2, \qquad (1)$$

Soient maintenant F et F' les foyers situés sur l'axe considéré; les droites MP, MR sont l'une normale, l'autre tangente au point P, et le faisceau (M,RFPF') est harmonique, les points P et R sont donc conjugués harmoniques par rapport au segment FF' et l'on a

$$OP \,.\, OP = \overline{OF}^2$$

c'est-à-dire $$\xi_1 \,.\, OR = \gamma^2. \qquad (2)$$

Divisant l'égalité (1) par l'égalité (2) il vient enfin

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}.$$

Pour étendre cette propriété au cas de l'axe non focal, nous remarquerons qu'il existe sur cet axe deux foyers imaginaires F_1, F_1' et qu'on démontre que la somme ou la différence des distances de chaque point de la courbe à ces deux points est constante.

Cela posé, lorsqu'on a démontré que la tangente et la normale en un point d'une conique sont bissectrices de l'angle des rayons vecteurs, on s'est appuyé uniquement sur ce que la somme ou la différence des rayons vecteurs est constante.

Le raisonnement précédent subsiste entièrement et la formule est générale.

Cette formule permet de construire la corde qui joint les points d'incidence de deux normales issues d'un point situé sur l'un des axes sans qu'il soit besoin de construire ces normales.

Lorsque la courbe est une parabole, la droite qui joint les points d'incidence de deux normales issues d'un point situé sur l'axe, s'obtient immédiatement lorsqu'on remarque que la sous-normale est constante et égale au paramètre.

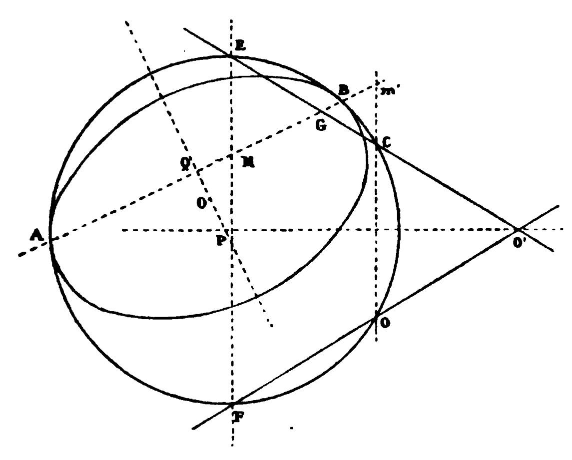
Lemme II. — Cela posé, considérons deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent en P. La projection de leur intersection sur un plan parallèle au plan des axes est une conique.

Proposons-nous de déterminer le centre de cette conique.

Pour résoudre ce problème, nous allons construire deux diamètres de cette courbe, et pour cela je considère la sphère inscrite dans la surface O par exemple et ayant son centre au point de rencontre des axes; cette sphère se projette suivant un cercle bitangent à la courbe méridienne de la surface O, le cercle de contact se projettera suivant la droite AB qui joint les points d'incidence des normales à la conique O issues du point P.

Je dis que cette droite est un diamètre de la projection de

l'intersection. En effet, on a démontré en géométrie descriptive que les tangentes aux points situés sur le cercle de contact



d'une des sphères circonscrites sont les tangentes aux cercles d'intersection de cette sphère limite avec la surface pour laquelle elle est sécante; il est aisé de voir que les tangentes aux points M, M', situés sur la droite AB, sont les cordes communes au cercle PQ et à la conique O' (cordes perpendiculaires à l'axe PO'); ces deux tangentes étant parallèles, il en résulte que la droite AB est un diamètre.

Mais d'après le lemme démontré précédemment, il suffit pour construire la droite AB, d'appliquer la formule

$$\xi = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \xi'$$

dans laquelle ξ désigne la distance du centre O de la courbe

à la droite AB, ξ' la distance OI, et α et γ les distances de ce même point O aux sommets et aux foyers de la courbe (réels ou imaginaires) situés sur l'axe OP.

Cette construction appliquée successivement aux surfaces O et O′ fera connaître le centre de la conique projection de l'intersection des surfaces O et O′.

Cette construction n'exige nullement le tracé du cercle P.

Lorsque le cercle P aura été tracé, on obtiendra le centre plus simplement en prenant le milieu du segment MM′ lorsqu'on saura construire les points MM′.

Remarque. — Si l'une des surfaces était un paraboloïde, pour construire le diamètre correspondant, on prendrait

$$PQ = p,$$

et l'on mènerait AB perpendiculaire à l'axe de la parabole, puisque, dans la parabole, la sous-normale est constante et égale au paramètre.

Supposons maintenant que les axes de révolution deviennent parallèles ; les constructions précédentes s'appliquent encore et la conique intersection qui a *deux* diamètres parallèles, puisqu'ils sont respectivement perpendiculaires aux droites parallèles OI, OI′, est une parabole.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La projection de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles, sur un plan parallèle au plan des axes, est une parabole.*

Corollaire. — La projection de l'intersection d'une surface de révolution et d'une sphère, sur un plan parallèle au plan déterminé par l'axe de la surface et le centre de la sphère, est une parabole.

Car on peut considérer la sphère comme une surface de révolution ayant son axe parallèle à l'axe de la surface proposée.

Remarque. — L'axe de la parabole est perpendiculaire aux axes de révolution, puisque ces axes sont perpendiculaires au diamètre AB, et que, dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles à l'axe.

On pouvait démontrer le théorème que nous avons énoncé en commençant, par des considérations *à priori* et purement géométriques.

Lemme. — Il est évident que l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant un plan principal commun se projette sur ce plan suivant une conique.

Les asymptotes de cette conique sont parallèles aux traces des plans qui déterminent dans ces deux surfaces des sections homothétiques.

Soit en effet D la trace d'un plan déterminant dans les deux surfaces des sections homothétiques. Pour obtenir les points de la projection de l'intersection situés sur cette droite D, je considère les coniques C, C′, intersections du plan D et des surfaces S et S′; ces coniques C, C′ se coupent en quatre points A, A′, B, B′ situés deux à deux symétriquement par rapport à la droite D; la droite D rencontre donc la conique T projection de l'intersection des surfaces S, S′ en deux points *a*, *b* projections des points AA′ et BB′. Mais les deux coniques C, C′ *étant* homothétiques, les points B, B′ sont rejetés à l'infini et aussi le point *b*. La droite D rencontre donc la conique T en deux points dont l'un est rejeté à l'infini; la droite D est donc parallèle à une asymptote de la conique T.

De là résulte le théorème de la page 126.

En effet, les asymptotes de la conique T sont parallèles aux deux directions des plans qui déterminent dans les surfaces S, S′ des sections homothétiques.

Or ces deux directions se confondent alors avec la direction double des plans cycliques.

L'intersection T des deux surfaces S, S′ se projette donc suivant une parabole dont l'axe est perpendiculaire aux axes des surfaces S, S′.

Remarque. — Du lemme précédent on peut déduire immédiatement la construction des asymptotes de la projection de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878

Mathématiques spéciales.

Solution par M. G. Kœnigs, élève à l'École normale supérieure.

On donne trois axes rectangulaires OA, OB, OC : *de part et d'autre du point* O *on porte :* OA = OA′ = a, OB = OB′ = b, OC = OC′ = c. *On demande :*

1° *Le lieu des axes de révolution des surfaces de second ordre de révolution qui passent par les six points* A, A′, B, B′, C, C′ ;

2° *Le lieu des points D où ces axes percent respectivement chacune des surfaces qui leur correspondent ;*

3° *La projection de ce lieu sur le plan* AOB. *On discutera cette projection en supposant,* a > b > c.

Par le point O passent trois cordes de chaque surface de révolution, et chacune y a son milieu : comme ces cordes ne sont pas dans un même plan, on en conclut que toutes les surfaces de révolution du système ont leur centre à l'origine. Prenons OA, OB, OC pour axes ox, oy et oz. Soit OR un axe d'une surface de révolution Σ du système. Si par les six points A, B, etc., on mène des plans perpendiculaires à la droite OR et la coupant aux points α, β, γ, α', β', γ' respectivement, ces plans coupent la surface Σ suivant six cercles de centres α, β, etc., et de rayons αA, βB, γC, α'A′, β'B′, γ'C′.

Un plan quelconque P menée par OR coupe les cercles suivant douze points (α_1, α_2), (β_1, β_2), (γ_1, γ_2), (α'_1, α'_2), (β'_1, β'_2), (γ'_1, γ'_2), et la surface Σ suivant une conique S. Les axes de cette conique sont OR et la perpendiculaire OR′ à OR dans le plan P : en posant OD = ρ, on aura 2ρ pour longueur d'un axe, j'appellerai 2σ l'axe confondu avec OR′. L'équation de la conique S dans son plan sera donc :

$$\frac{X^2}{\rho^2} + \frac{Y^2}{\sigma^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Mais la conique S passe par les douze points, α_1, α_2 etc. Et de

plus la symétrie de ces points relativement au point O, et aux droites OR, OR′ montre qu'il suffit d'exprimer que les points α_1, β_1 et γ_1 sont situés sur la conique : ainsi pour le point α_1 on aura

$$\frac{\overline{O\alpha}^2}{\rho^2} + \frac{\overline{\alpha\alpha_1}^2}{\sigma^2} - 1 = 0.$$

Mais on voit que $\alpha\alpha_1 = \alpha A$, et d'autre part le triangle $O\alpha A$ donne :

$$O\alpha = a \cos\lambda$$
$$\alpha A = a \sin\lambda$$

(λ, μ, ν) désignant les angles faits par OR avec OA, OB, OC.

Ainsi l'équation précédente devient

$$\frac{a^2 \cos^2\lambda}{\rho^2} + \frac{a^2 \sin^2\lambda}{\sigma^2} - 1 = 0.$$

Les points β_1 et γ_1 donneront deux relations analogues, ce qui conduit aux trois relations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos^2\lambda}{\rho^2} + \frac{\sin^2\lambda}{\sigma^2} &= \frac{1}{a^2} \\ \frac{\cos^2\mu}{\rho^2} + \frac{\sin^2\mu}{\sigma^2} &= \frac{1}{b^2} \\ \frac{\cos^2\nu}{\rho^2} + \frac{\sin^2\nu}{\sigma^2} &= \frac{1}{c^2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En éliminant $\frac{1}{\rho^2}$ et $\frac{1}{\sigma^2}$ entre ces trois équations, on a le déterminant nul :

$$\begin{vmatrix} \cos^2\lambda & \sin^2\lambda & \frac{1}{a^2} \\ \cos^2\mu & \sin^2\mu & \frac{1}{b^2} \\ \cos^2\nu & \sin^2\nu & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} \cos^2\lambda & 1 & \frac{1}{a^2} \\ \cos^2\mu & 1 & \frac{1}{b^2} \\ \cos^2\nu & 1 & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = 0$$

Les équations de OR sont du reste

$$\frac{x}{\cos\lambda} = \frac{y}{\cos\mu} = \frac{z}{\cos\nu}$$

et l'élimination des cosinus entre ces équations et la précédente donne le cône lieu des axes de révolution :

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 & \frac{1}{a^2} \\ y^2 & 1 & \frac{1}{b^2} \\ z^2 & 1 & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant

$$x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0 \quad (3)$$

Les équations (2) peuvent être écrites comme il suit :

$$\frac{\cos^2\lambda}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\lambda}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\lambda}$$
$$=\frac{\cos^2\mu}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\mu}-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\mu}$$
$$=\frac{\cos^2\nu}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\nu}-\frac{1}{c^2\sin^2\nu}=-\frac{1}{\sigma^2} \quad (2')$$

Du reste, en appelant (x, y, z) les coordonnées du point D, on a les relations suivantes :

$$x=\rho\cos\lambda,\quad y=\rho\cos\mu,\quad z=\rho\cos\nu,\quad \rho^2=x^2+y^2+z^2$$

d'où on tire :

$$\rho^2\sin^2\lambda=y^2+z^2,\ \rho^2\sin^2\mu=z^2+x^2,\ \rho^2\sin^2\nu=x^2+y^2.$$

Les équations (2') deviennent ainsi :

$$\frac{x^2}{y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}-\frac{\rho^2}{a^2}\cdot\frac{1}{y^2+z^2}$$
$$=\frac{y^2}{z^2+x^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}-\frac{\rho^2}{b^2}\cdot\frac{1}{z^2+x^2}$$
$$=\frac{z^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}-\frac{\rho^2}{c^2}\,\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{1}{\sigma^2} \quad (3)$$

Mais on peut les simplifier. Les équations (2') s'écrivent :

$$\frac{a^2\cos^2\lambda-\rho^2}{a^2\sin^2\lambda}=\frac{b^2\cos^2\mu-\rho^2}{b^2\sin^2\mu}$$
$$=\frac{c^2\cos^2\nu-\rho^2}{c^2\sin^2\nu}=-\frac{\rho^2}{\sigma^2} \quad (e)$$

ou :

$$\frac{a^2\cos^2\lambda-\rho^2}{\rho^2-a^2}=\frac{b^2\cos^2\mu-\rho^2}{\rho^2-b^2}$$
$$=\frac{c^2\cos^2\nu-\rho^2}{\rho^2-c^2}=\frac{\rho^2}{\sigma^2-\rho^2}$$

ou enfin :

$$\frac{a^2 \sin^2 \lambda}{\rho^2 - a^2} = \frac{b^2 \sin^2 \mu}{\rho^2 - b^2} = \frac{c^2 \sin^2 \nu}{\rho^2 - c^2} = \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}$$

et par suite en multipliant par ρ^2 :

$$\frac{a^2 (y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} = \frac{b^2 (z^2 + x^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2}$$
$$= \frac{c^2 (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = \frac{\rho^2\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \qquad (3')$$

Les équations (3) (où $\rho = x^2 + y^2 + z^2$) représentent dans l'espace le lieu du point D aussi bien que les équations (3'); mais c'est à ces dernières évidemment qu'il est préférable de s'arrêter, vu leur simplicité.

En éliminant z^2 entre ces équations, on arrivera à l'équation de la projection du lieu sur le plan xy. Le calcul est sans difficultés. On pose

$A = (a^2 - b^2)c^2 + (c^2 - b^2)a^2$, $\quad B = (a^2 - b^2)c^2 + (a^2 - c^2)b^2$,
$C = (a^2 - c^2)b^2 + a^2c^2$, $\quad E = (a^2 - b^2)a^2b^2c^4$
$D = (b^2 - c^2)a^2 + b^2c^2$

Les hypothèses $a > c > b$ entraînent des inégalités

$$A > 0,\ B > 0,\ C > 0,\ E > 0.$$

On trouve $(Ax^2 + By^2)(Cx^2 - Dy^2) = E(y^2 - x^2)$.

On discutera la courbe en posant $x = uy$

On aura $y^2 = -\dfrac{\frac{E}{C} u^2 - 1)}{(Au^2 + B)\left(u^2 - \frac{D}{C}\right)}$

On distinguera trois cas : 1° $D > 0$ (2 asymptotes réelles); 2° $D = 0$ ($x = 0$ est asymptote double); 3° $D < 0$ (pas d'asymptote réelle); du reste, dans tous les cas, on a $\frac{D}{C} < 1$. On obtient ainsi trois formes de courbes représentées ci-dessous.

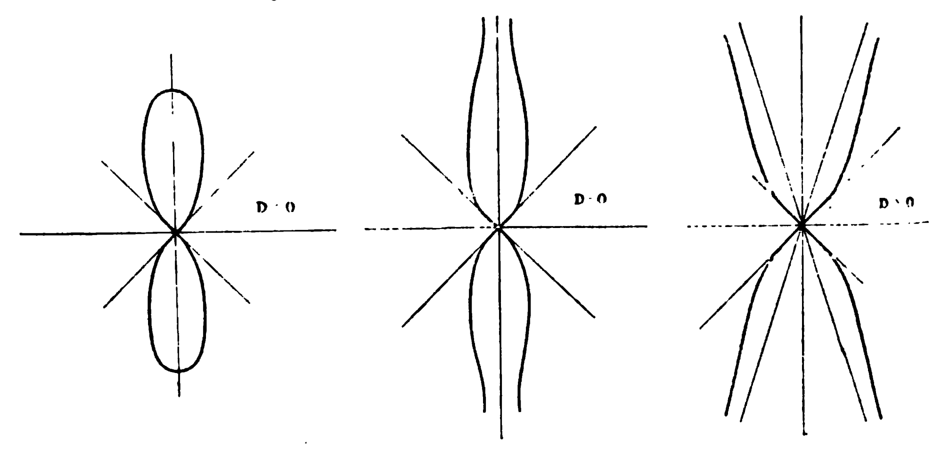
Il est facile de distinguer les points de la courbe qui correspondent à des ellipsoïdes de révolution, de ceux qui correspondent à des hyperboloïdes.

Reportons-nous aux équations (e), elles s'écrivent :

$$\frac{\cos^2\lambda - \frac{\rho^2}{a^2}}{\sin^2\lambda} = \frac{\cos^2\mu - \frac{\rho^2}{b^2}}{\sin^2\mu} = \frac{\cos^2\nu - \frac{b^2}{c^2}}{\sin^2\nu} = \frac{\rho^2}{\sigma^2}$$

on en déduit, en faisant la somme des numérateurs et des dénominateurs :

$$\frac{\rho^2}{\sigma^2} = \frac{\rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 1}{2}$$



Les points D extérieurs à la sphère

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 1 = 0$$

sont des sommets d'ellipsoïdes, car alors $\frac{\rho^2}{\sigma^2} > 0$.

Les points D intérieurs à la même sphère sont des sommets d'hyperboloïdes, car alors $\frac{\rho^2}{\sigma^2} < 0$.

Tout dépend donc du signe de la fonction des coordonnées du point D,

$$V = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 1.$$

Ces coordonnées satisfont à l'équation (3), on en tirera z^2, ce qui donnera :

$$V = \frac{Ax^2 + By^2}{E}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - 1$$

et tirant $\frac{Ax^2 + By^2}{E} = \frac{y^2 - x^2}{Cx^2 - Dy^2}$, de l'équation de la courbe en projection, on trouvera :

$$V = \frac{y^2 - x^2}{Cx^2 - Dy^2}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 1,$$

ou en réduisant

$$V = \frac{(a^2 + c^2)\,b^2y^2 - (b^2 + c^2)\,a^2x^2}{Cx^2 - Dy^2}.$$
$$= -\frac{a^2\,(b^2 + c^2)\;x^2 - b^2\,(a^2 + c^2)\;y^2}{Cx^2 - Dy^2}.$$

Considérons donc la branche de courbe située par exemple dans l'angle yox : elle est comprise entre la bissectrice OT des axes, qui lui est tangente à l'origine, et l'asymptote PM : $V = o$ représente deux droites, l'une d'elles ON est située dans l'angle yox ; on peut même voir qu'elle est comprise dans l'angle MOT : elle divise donc l'arc de courbe en deux parties, l'une donnant des ellipsoïdes, et l'autre des hyperboloïdes : la branche indéfinie correspondra à la première variété : la branche finie comprise entre OT et ON correspondra à la seconde : les points à l'infini correspondent à des ellipsoïdes dégénérés en cylindres. Enfin les points où les droites $V = o$ rencontrent la courbe correspondent à des systèmes de plans parallèles (ABC et A'B'C). (A'BC et AB'C'), etc. Les points de la courbe à l'origine correspondent aux cônes de révolution du système.

VARIÉTÉS

ESSAIS POUR LES CONIQUES DE PASCAL

AVEC

Des notes par M. **Ch. Laurens**, professeur honoraire.

Introduction. — Les manuscrits que Pascal avait préparés pour rédiger un traité complet sur les coniques dans le style géométrique des anciens, ont été perdus, à l'exception de quelques pages que nous reproduisons, d'après l'édition

des œuvres de Pascal publiée en 1865 par la maison Hachette.

Ces pages que Pascal a intitulées : *Essais pour les coniques*, ne contiennent que des énoncés sans démonstration. Nous croyons être utile aux élèves studieux de mathématiques élémentaires, en rétablissant les démonstrations des énoncés de Pascal, sous la forme géométrique qu'il aurait employée lui-même, et ajoutant quelques applications qui leur permettront de comprendre ce qu'aurait pu être un ouvrage que la science regrette à bon droit.

Aujourd'hui nous possédons le premier volume du *Traité des coniques* de M. Chasles. C'est un des derniers mots de la géométrie moderne sur la théorie des coniques; mais les efforts de Pascal, à la suite de ceux de Désargues, pour dépasser les travaux d'Apollonius ne sont pas seulement remarquables au point de vue historique ; ils ont une valeur intrinsèque que l'on ne peut négliger. Nous engageons vivement nos lecteurs à parcourir les pages de l'aperçu historique que M. Chasles a consacré à l'histoire de la géométrie du commencement du XVIIe siècle.

Les élèves trouveront dans ce qui suit d'utiles exercices, les familiarisant avec la méthode si féconde des transversales; ils comprendront mieux la théorie des coniques que le programme leur impose, mais malheureusement sous une forme étroite, sans aucun avantage de simplicité ou de rigueur, et se prépareront efficacement à l'étude analytique de ces courbes, partie importante du cours de mathématiques spéciales.

Avant de reproduire l'opuscule de Pascal, nous croyons devoir résumer la lettre que Leibnitz a écrite en 1676 sur la mise en ordre des manuscrits de notre auteur.

En première ligne, il a placé un écrit intitulé : *Generatio coni sectionum, tangentium et secantium ; seu projectio peripheriæ, tangentium et secantium circuli, in quibuscumque oculi, plani ac tabellæ positionibus.*

Le manuscrit placé à la suite porte d'après Pascal le nom d'*Hexagramme mystique* ; il contenait la propriété remarquable de l'hexagone inscrit dans une conique, dont les côtés opposés se rencontrent en trois points en ligne droite. Au

dire du père Mersenne, Pascal en avait déduit quatre cents corollaires.

En troisième ligne Leibnitz a mis un opuscule portant le titre suivant : *De quatuor tangentibus et rectis puncta tactuum jungentibus, unde rectarum harmonice sectarum et diametrórum proprietates oriantur.* Pascal, dans cet écrit, faisait une appplication continuelle de l'hexagramme mystique.

Leibnitz place à la suite de cet écrit un manuscrit intitulé : *De proportionibus segmentorum et tangentium ;* auquel il adjoignait une feuille séparée qui avait pour titre : *De correspondentibus diametrorum;* la troisième page de cette feuille traitait *de summâ et differentiâ laterum seu de focis.*

Le cinquième traité portait le titre : *De tactionibus conicis;* c'est-à-dire (dit Leibnitz), pour que le titre ne trompe pas, *de punctis et rectis quos sectio conica attingit.*

Au dire de Leibnitz, ces cinq écrits formaient un traité complet des coniques ; mais il avait encore sous les yeux d'autres écrits renfermant différents problèmes et aussi les quelques pages que nous reproduisons et qui ont été publiés pour la première fois en 1779 par Bossut dans son édition des œuvres de Pascal. La publication de ce petit travail confirmera le dire de Leibnitz.

§ 1er. — « *Définition 1re.* — Quand plusieurs lignes concourent au même point, ou sont toutes parallèles entre elles, toutes ces lignes sont dites de *même ordre* ou de *même ordonnance,* et la multitude de ces lignes est dite *ordre de lignes* ou *ordonnance de lignes.* »

« *Définition 2.* — Par le mot de *section de cône,* nous entendons la circonférence de cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole et l'angle rectiligne, d'autant qu'un cône coupé parallèlement à sa base ou par son sommet, ou des trois autres sens qui engendrent l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, donne dans sa superficie, ou la circonférence d'un cercle, ou un angle, ou l'ellipse, ou l'hyperbole, ou la parabole. »

« *Définition 3.* — Par le mot de *droite* mis seul, nous entendons la ligne droite. »

« Lemme I. — Si dans le plan MSQ *(fig. 1),* du point M par-

tent les deux droites MK, MV, et du point S partent les deux droites SK, SV ; que K soit le concours des droites MK, SK ; V le point de concours des droites MT, SV ; A le concours des droites MK, SV ; M le point de concours des droites MV, SK, et que par deux des quatre points A, K, M, V, qui ne

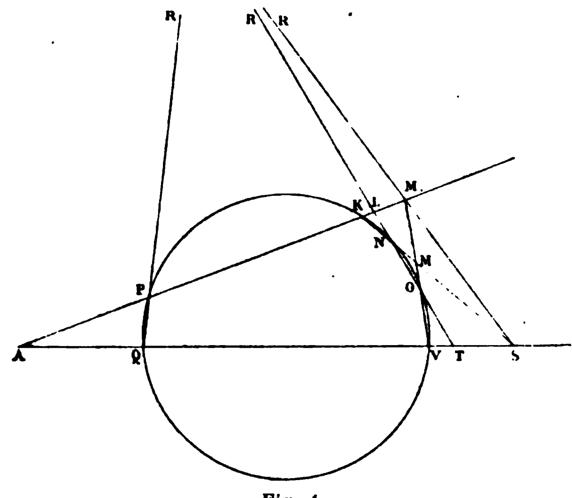


Fig. 1.

sont pas en ligne droite avec les points M, S, comme par K et V, passe la circonférence d'un cercle coupant les droites MV, MA, SV, SK, aux points O, P, Q, N, je dis que les droites MS, NO, PQ sont de même ordre. »

Note 1. — Ce lemme n'est autre que le théorème sur l'hexagone inscrit qui porte le nom de Pascal et qu'il avait appelé hexagramme mystique à cause des nombreuses conséquences que l'on peut en déduire. Considérons en effet *(fig. 1)* l'hexagone KNOVQPK ; les côtés opposés KN et VQ se rencontrent en S ; les côtés VO, PK en M ; NO et PQ en R ; le théorème de Pascal, tel qu'on l'énonce habituellement, consiste en ceci, que les trois points R, M, S, sont en ligne droite ; c'est-à-dire que les droites PQ, NO, MS se rencontrent en un même point ou sont parallèles, c'est-à-dire, d'après l'énoncé de Pascal, sont de même ordre.

Nous ne sommes pas éloigné de croire que Pascal a obtenu cet important théorème en considérant un hexagone inscrit dans un cercle ayant deux couples de côtés opposés parallèles, ce qui entraîne le parallélisme des deux autres côtés ; mais la place de ce théorème dans l'ordre des énoncés de Pascal paraît exclure dans la démonstration que l'auteur avait adoptée, l'emploi de la méthode des projections que lui et Désargues employaient cependant fréquemment, et que dans l'un des lemmes suivants, Pascal emploie pour étendre aux coniques le théorème établi pour le cercle.

Nous croyons que la démonstration de l'hexagramme mystique relatif au cercle devait être fondée sur la théorie des transversales ; nous reproduisons la démonstration connue.

Dans l'hexagone PKNOVQP, considérons le triangle LTA formé par trois côtés non consécutifs PK, NO, VQ. Il est coupé par les trois autres côtés KN, OV, PQ ; le théorème des transversales appliqué à ces trois droites donne les trois égalités :

$$\frac{LK}{AK}\cdot\frac{TN}{LN}\cdot\frac{AS}{TS}=1;\ \frac{AV}{TV}\cdot\frac{TO}{LO}\cdot\frac{LM}{AM}=1;\ \frac{AQ}{TQ}\cdot\frac{LP}{AP}\cdot\frac{TR}{LR}=1.$$

Si nous concevons qu'on ait multiplié membre à membre ces trois égalités, et simplifié le résultat en remarquant que :

$$LK.LP = LN.LO;\ TN.TO = TV.TQ;\ HQ.AV = AP.AK;$$

on obtient : $$\frac{AS}{TS}\cdot\frac{TR}{LR}\cdot\frac{LM}{AM}=1,$$

identité qui exprime que les trois points S, M, R, sont en ligne droite, ce qui démontre le théorème.

§ 2. — « Lemme II. — Si par la même droite passent plusieurs plans qui soient coupés par un autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de même ordre avec la droite par laquelle passent lesdits plans. »

« Ces deux lemmes posés et quelques faciles conséquences tirées d'iceux, nous démontrerons que les mêmes choses étant posées qu'au premier lemme, si par les points K, V, de la figure du lemme I passe une section quelconque du cône

qui coupe les droites MK, MV, SK, SV, aux points P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ, seront de même ordre. Cela sera un troisième lemme. »

« Ensuite de ces trois lemmes et de quelques conséquences d'iceux, nous donnerons des éléments coniques complets : à savoir toutes les propriétés des diamètres et des côtés droits, des tangentes et la restitution du cône presque sur toutes les données, la description des sections du cône par points. »

Note 2. — Le second lemme est le point de départ de la théorie des projections centrales; on peut l'énoncer ainsi : Les perspectives d'un système quelconque de droites parallèles ou concourantes sont parallèles ou concourantes. Nous n'insisterons pas sur la démonstration. On sait que les projections centrales ont été surtout étudiées par Poncelet, dans son bel ouvrage des propriétés projectives des figures, et on peut voir dans ce livre toute la fécondité de cette théorie.

Le troisième lemme est une conséquence immédiate des deux premiers. Concevons un cône ayant pour base la circonférence de la figure 1, et des plans passant par le sommet du cône et les côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle; si nous coupons le cône et les plans par un nouveau plan arbitraire, nous obtiendrons une conique dans laquelle sera inscrit un nouvel hexagone; les points de rencontre des côtés opposés du nouvel hexagone seront évidemment en ligne droite. Ainsi se trouve étendu à toutes les coniques l'hexagone mystique de Pascal, fondement du traité qu'a préparé Pascal.

Nous indiquerons rapidement quelques applications importantes de ce théorème.

1° Construire une conique par points.

Soient BAFED cinq points d'une conique (*fig. 2*); menons par D une droite quelconque, et proposons-nous de trouver sur cette droite le point C inconnu appartenant à la conique. Ce point C forme avec les points donnés un hexagone inscrit dans la conique. AB et ED se rencontrent en M; AF et DC, dont les directions sont connues, se rencontrent en N;

donc le côté EF, et le côté BC dont la direction est inconnue, doivent se rencontrer en un point P situé sur MN ; or, EF rencontre MN au point P, donc la direction PBC sera celle du côté BC, et le point C où PB rencontre DC sera le point cherché.

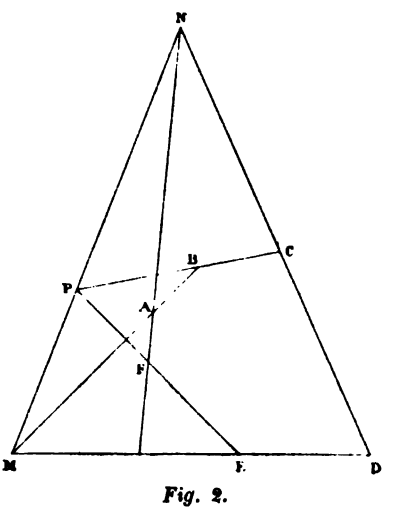


Fig. 2.

2° Mener une tangente à une conique par un point pris sur la courbe.

A, C, D, E, F étant cinq points d'une conique, proposons-nous de mener par A une tangente à la courbe ; on peut regarder *(fig. 3)* la tangente au point A comme étant le sixième côté infiniment petit d'un hexagone inscrit dans la conique que déterminent les cinq points, les côtés opposés de cet hexagone, à savoir AF et CD, AC et FE, se

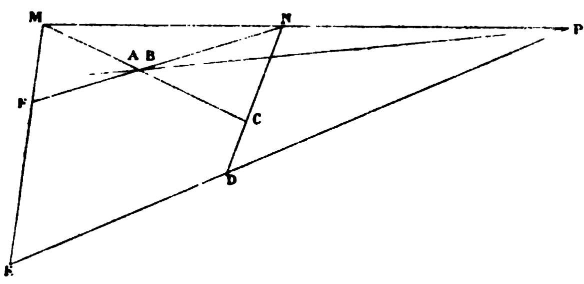


Fig. 3.

rencontrent en N et M, donc le point de concours de la tangente en A et du côté ED doit se trouver sur MN ; ED rencontre MN au point P, donc AP sera la tangente.

3° La propriété du centre des coniques découle de l'hexagramme mystique.

Considérons *(fig. 4)* une des coniques, ellipse ou hyperbole,

à laquelle on peut mener deux tangentes parallèles ; soient B et F les deux points de de contact et O le milieu BF ; O est le centre de la conique, qui divise en deux parties égales les cordes passant par ce point. Soit pris en effet un point A quelconque sur la courbe que nous joignons au point B. Par F menons une parallèle AF à BD ; joignons AF, BD ; le quadrilatère ABDF peut être regardé comme un hexagone ABCDEFA ayant deux côtés BC, FE infiniment petits se confondant avec les tangentes en ces points.

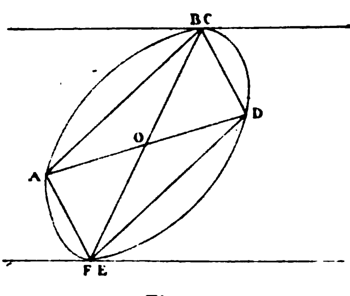


Fig. 4.

Les côtés AB, FD parallèles ont leur point de concours à l'infini, il en est de même des tangentes BC, FE ; la droite qui joint ces deux points étant à l'infini, les côtés BD, AF se rencontreront sur une droite à l'infini, et par suite sont parallèles. La figure ABDF est un parallélogramme, et la corde AD passant par le milieu O de BF est partagée en ce point en deux parties égales.

4° Les milieux d'un système de cordes parallèles dans une conique sont en ligne droite.

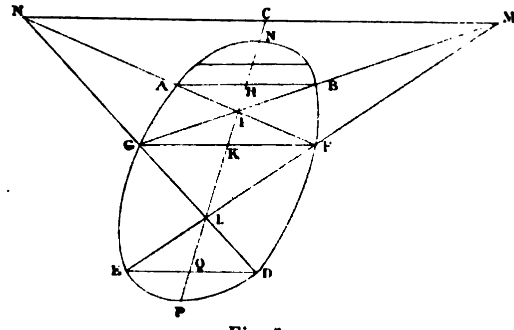


Fig. 5.

Soient (*fig.* 5) AB, CF, AD trois cordes parallèles quelconques. Considérons l'hexagone ABCDEFA. Les côtés op-

posés AB, DE sont parallèles et se rencontrent à l'infini ; BC et EF concourent en M ; AF et CD en N ; donc MN est parallèle aux droites AB, ED, par suite à CF.

La droite HK qui joint le milieu de AB au milieu de CF passe par le point I intersection des diagonales du trapèze ABCF et par suite par le milieu G de MN parallèle à AB.

La droite KQ, qui joint le milieu de CF au milieu de ED passe par le point de concours des diagonales CD, EF du trapèze CFED et par suite par le milieu G de MN parallèle à ED. Donc les trois points H, K, N des trois cordes parallèles sont sur une ligne droite NP, diamètre de la courbe.

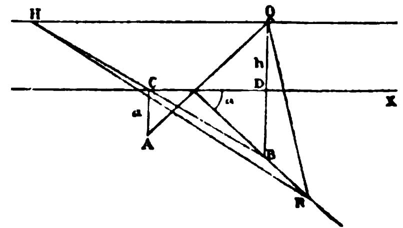
On prévoit qu'il n'est pas difficile de conclure que les tangentes aux extrémités NP du diamètre sont paralèlles aux cordes divisées par le diamètre en deux parties égales, qu'il existe une infinité de diamètres conjugués, et un système d'axes ou diamètres conjugués rectangulaires. Nous ne croyons pas devoir insister. *(A suivre.)*

QUESTION 143.

Solution par M. Henrique, élève du Lycée de Bordeaux.

Par un point fixe A *on mène une droite coupant deux parallèles données en* P *et* Q. *Par les points* P *et* Q *on mène des droites respectivement parallèles à des droites données et le coupant en* R. *Prouver que le lieu de* R *est une droite.*

Posons AC $= a$ et soit QD $= h$ la distance des deux parallèles. La droite QD prolongée rencontre PR en B.



Soit α l'angle constant RPX.

A cause des triangles semblables ACP et PQD

on a : $\dfrac{PD}{CD} = \dfrac{h}{a+h}$.

Or $$PD = DB \cot g\alpha$$

donc $$\frac{DB}{CD} = \frac{h}{a+h} \operatorname{tg}\alpha.$$

Le rapport $\frac{DB}{CD}$ étant constant et l'angle CDB étant droit, le triangle CDB est toujours semblable à lui-même et par suite l'angle DCB est constant. Donc le lieu du point B est la droite CB.

Le triangle QBR a ses côtés parallèles respectivement à des directions constantes, et deux de ses sommets Q et B se meuvent respectivement sur les droites HQ et HB ; donc le troisième sommet se meut sur la droite HR.

QUESTION 165.

Solution par M. Bucheron, élève du Lycée de Moulins.

---

b *et* c *sont deux côtés d'un triangle,* l *et* l' *les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle compris. Il existe entre ces quatre longueurs la relation*

$$b^2c^2\,4 = l^2(b+c)^2 + l'^2(b-c)^2. \quad \text{(Launoy.)}$$

On a $$l^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

et $$l'^2 = \frac{a^2bc}{(c-b)^2} - bc.$$

Éliminant a^2bc entre ces formules, on a :

$$bc\,(b+c)^2 - l^2\,(b+c)^2 = l'^2\,(c-b)^2 + bc\,(c-b)^2;$$

effectuant et réduisant on a :

$$4b^2c^2 = l^2\,(b+c)^2 + l'^2\,(b-c)^2.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, à Grenoble; Objois, à Moulins; Girod, à Belley; Deslais, au Mans; Elie, Collège Stanislas; Cadot, Lycée Saint-Louis; Longueville, à Charleville; Ferber, à Lyon; Gino Loria, à Mantoue (Italie); Schlesser, à Saint-Quentin; Blessel, piqueur au service des ponts et chaussées, à Paris; Boulogne, à Saint-Quentin.

QUESTION 168.

Solution par M. MARIN, élève du Lycée d'Agen.

Étant donné un trapèze isoscèle trouver par la géométrie une relation entre sa hauteur, sa surface, le rayon du cercle circonscrit et l'un des côtés non parallèles.

Soit ABCD un trapèze isoscèle inscrit dans un cercle O ; et soient HK $= h$ sa hauteur, DC $= a$ et r le rayon du cercle O.

On a $S = 2\text{NN}.\ h.$

Mais les triangles semblables NNO et EDC donnent

$$\frac{\text{NN}}{\text{NO}} = \frac{h}{a}.$$

Or $\overline{\text{NO}}^2 = r^2 - \frac{4}{a^2}$,

d'où $$\text{NO} = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}.$$

Alors $$\frac{\text{NN}}{h} = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2a};$$

d'où $$\text{NN} = \frac{h}{2a}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

et par suite $$S = \frac{h^2}{a}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Deslais, du Mans ; Longueville, de Charleville.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

229. — Construire un triangle ABC connaissant les points M, N, P, milieux des arcs sous-tendus par les côtés BC, AC, AB dans le cercle circonscrit au triangle.

230. — Construire un triangle, connaissant les points de rencontre du cercle circonscrit avec les hauteurs du triangle.

231. — Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on construit les carrés ABED, ACGF, BCHI. Connaissant les points de rencontre des droites ED, FG, HI, construire le triangle.

232. — Construire un triangle, connaissant les points de rencontre α, β, γ du cercle circonscrit avec la bissectrice, la médiane et la hauteur issues d'un même sommet.

Mathématiques spéciales.

233. — Du centre d'un cercle, on abaisse des perpendiculaires OT sur les tangentes à un autre cercle, et sur chacune d'elles on prend, à partir du point T et de part et d'autre de la tangente, des longueurs égales $TP = TP'$, telles que l'on ait $OP, OP' = K^2$. Trouver le lieu des points P et P'.

234. — Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position. Son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers.

235. — Connaissant un foyer d'une ellipse, l'excentricité et un point, trouver l'enveloppe des directrices.

236. — Lieu du sommet d'un triangle dont les deux côtés issus du sommet touchent une conique donnée, tandis que les deux autres sommets parcourent une seconde conique donnée.

237. — Étant donnée une conique à centre rapportée à un foyer, trouver l'expression de la longueur de l'axe non focal. Applications au lieu des sommets des ellipses qui ont un foyer et un point communs, et pour lesquelles la longueur du petit axe est la même.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KOEHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 2528-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE

ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. Launoy, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 97 et suiv.)

XXIII. **Problème.** — *Construire les normales à l'ellipse issues d'un point donné du petit axe.*

Si dans l'équation du théorème précédent, on fait $l = c$, le point R se confond avec le centre de l'ellipse et le point P se trouve sur le petit axe; on a pour RP deux valeurs nulles auxquelles correspondent deux normales qui coïncident avec le petit axe et deux autres valeurs données par l'équation $a^2\,\overline{RD}^2 - a^2c^2 + b^2(d^2 + c^2) = o.$

Le point R du théorème précédent coïncidant avec le point O, on a (*fig. 10*) dans le triangle OPD

$$\overline{PD}^4 = d^2 + \overline{OD}^2,$$

et en substituant dans l'équation la valeur de $\overline{OD}^2$ tirée de cette relation, on a

$$a^2(\overline{PD}^2 - d^2) - a^2c^2 + b^2(d^2 + c^2) = o$$

ou

$$a^2\overline{PD}^2 = c^2(d^2 + c^2) = c^2\overline{PF}^2$$

ce qui donne la proportion

$$\frac{PD}{c} = \frac{PF}{a}.$$

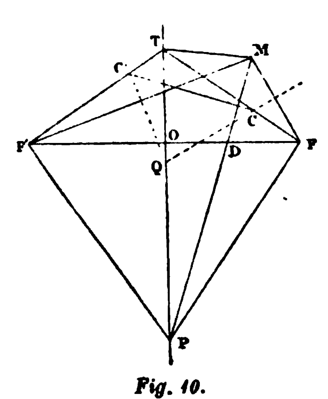


Fig. 10.

Le point P étant donné, on construit les normales issues de ce point de la manière suivante : on prend sur PF et PF' une longueur égale à a par un arc de cercle de centre P, on joint les points obtenus, et la ligne qui joint ces deux points est coupée par le cercle décrit du point P comme centre avec c pour rayon

en deux points qu'il suffit de joindre au point P pour avoir deux normales répondant à la question.

Remarque. — Cette construction peut s'appliquer seule lorsque l'ellipse est tracée, à la place du cercle circonscrit au triangle PFF′ qui donne également le point M; mais si l'ellipse n'est pas tracée, les deux constructions simultanées sont nécessaires et donnent le point M avec sa normale et sa tangente.

XXIV. **Théorème.** — *Le cercle qui passe par les trois points* M, D, F (fig. 10) *est tangent à la droite* PF.

On a démontré (*Journal de Math. élém.*, 3e année, p. 199, III) la relation

$$\frac{\text{PF}}{\text{PM}} = \frac{c}{a}$$

et on vient de trouver par le problème XXIII

$$\frac{\text{PF}}{\text{PD}} = \frac{a}{c};$$

on en déduit, en multipliant membre à membre,

$$\overline{\text{PF}}^2 = \text{PD} \times \text{PM};$$

donc la droite PF est bien tangente au cercle PDM. Le centre de ce cercle est évidemment sur FT′ perpendiculaire à PF; il se trouve donc au point C où la perpendiculaire élevée sur le milieu de MF vient rencontrer FT′.

Corollaire I. — Le cercle qui passe par les trois points M, D, F′ est aussi tangent à PF′, puisque PF′ = PF, et son centre C′ est à l'intersection de F′T′ et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de MF′.

Corollaire II. — La ligne CC′ que l'on vient de définir est perpendiculaire à la normale MD, car elle forme la ligne des centres de deux cercles qui ont la ligne MD pour corde commune; de plus, CC′ partage la longueur MD en deux parties égales.

Corollaire III. — Soit O′ le point où se coupent les perpendiculaires élevées sur les milieux des rayons vecteurs; O′ se trouve évidemment sur le petit axe de la courbe, puisque c'est le centre du cercle qui passe par les points F′, P, F, M, T′.

L'angle COC' est supplémentaire de FMF' et par suite de son égal CT'C ; le quadrilatère CO'C'T' est inscriptible dans un cercle.

XXV. **Théorème.** — *Si par les points où les normales issues d'un point* P *et menées à une ellipse rencontrent le grand axe, on mène des parallèles aux rayons vecteurs du point correspondant et qu'on abaisse des perpendiculaires du point P sur ces parallèles, les points obtenus sont sur un cercle de centre P.*

Pour le démontrer, il faut se reporter à la figure 9; les triangles PRD et MDH, étant semblables, donnent la proportion

$$\frac{PR}{PD} = \frac{MH}{MD};$$

on a posé $PR = d$, et on a trouvé (XXII) pour le rapport $\frac{MH}{MD}$ la valeur $\frac{a \sin \alpha}{c}$, ce qui donne

$$\frac{PR}{PD} = \frac{a \sin \alpha}{c};$$

d'où

$$PD \sin \alpha = \frac{dc}{a}.$$

Soit DK parallèle à MF' et PK perpendiculaire sur cette parallèle, l'angle PDK étant égal à α, on a

$$PK = PD \sin \alpha = \frac{dc}{a}.$$

La longueur PK ne dépend donc que de la distance d; or, on sait que, dans le cas général, on peut du point P mener quatre normales à l'ellipse; à chacune de ces normales correspondent deux parallèles analogues à DK, et par suite huit points tels que K dont la distance au point P est la même, c'est-à-dire qu'ils sont tous sur un cercle décrit du point P comme centre avec $\frac{dc}{a}$ pour rayon, et ce rayon sera le même pour tous les cercles pareils dont les centres seront sur une parallèle au grand axe menée à la distance d.

XXVI. **Théorème.** — *Si deux normales issues d'un point du plan d'une ellipse ont même longueur,* d *désignant la distance de ce point au grand axe,* 2α *et* $2\alpha'$ *les angles des rayons*

vecteurs des points où aboutissent les normales, on a la relation

$$tg\,\alpha\; tg\,\alpha'\; tg\,\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{dc}{b^2}.$$

En se reportant à la figure 9, théorème XXII, on voit que

$$PM = PD + DM;$$

or (XX) $$DM = \frac{b^2}{a\cos\alpha}$$

et (XXV) $$PD = \frac{dc}{a\sin\alpha};$$

d'où $$PM = \frac{dc}{a\sin\alpha} + \frac{b^2}{a\cos\alpha}.$$

De même, PM′ étant une seconde normale,

$$PM' = \frac{dc}{a\sin\alpha'} + \frac{b^2}{a\cos\alpha'}$$

et la condition PM = PM′ donnée dans l'énoncé conduit à la suivante :

$$\frac{dc}{a}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha'}\right) = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\alpha'} - \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

ou $$\frac{dc\,(\sin\alpha' - \sin\alpha)}{\sin\alpha\sin\alpha'} = \frac{b^2\,(\cos\alpha - \cos\alpha')}{\cos\alpha\cos\alpha'};$$

or $$\sin\alpha' - \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -2\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}.$$

En substituant ces valeurs dans la relation précédente et divisant les deux membres de cette relation par le facteur $\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}$, on trouve

$$\frac{dc\cos\frac{\alpha+\alpha'}{2}}{\sin\alpha\sin\alpha'} = \frac{b^2\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\alpha'}.$$

d'où l'on déduit la relation cherchée

$$tg\,\alpha\; tg\,\alpha'\; tg\,\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{dc}{b^2}$$

XXVII. *Rayon et centre du cercle osculateur en un point d'une ellipse.*

Si du point P défini dans le théorème précédent par cette condition que deux des normales issues de ce point sont égales, on décrit un cercle de rayon égal à leur longueur commune, ce cercle sera tangent à l'ellipse aux deux points où aboutissent les normales; il sera alors doublement tangent à l'ellipse.

Cela étant, soient PM et PM′ ces deux normales; si la première reste fixe et si l'on suppose que le point P se meut sur elle de telle sorte que les normales qui partent de ce point soient toujours égales, il arrivera un moment où le point P occupera sur PM une position telle que les deux normales PM et PM′ n'en formeront plus qu'une; comme elles n'auront point cessé d'être égales, la relation du théorème précédent sera encore vraie et la position du point P sur la normale PM sera définie par cette même relation dans laquelle $\alpha' = \alpha$, c'est-à-dire par

$$\operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{dc}{b^2}. \qquad (1)$$

La parallèle au grand axe menée à la distance d ainsi définie rencontrera la normale PM au point P.

Le cercle considéré ci-dessus sera devenu le *cercle osculateur* à l'ellipse au point M, et le point P que l'on vient de construire sera son centre.

Comme à la valeur de α ne correspond qu'une seule valeur pour d, on en conclut que la normale PM ne contient qu'un seul point jouissant de cette propriété que deux des normales issues de ce point et menées à l'ellipse sont confondues. Chaque normale à l'ellipse contient un pareil point et le lieu de tous ces points constitue la *développée* de l'ellipse.

Quant à la valeur R du rayon du cercle osculateur au point M, elle sera donnée par l'expression

$$R = \frac{dc}{a \sin \alpha} + \frac{b^2}{a \cos \alpha},$$

d ayant la valeur donnée par la relation (1).

On a $$R a \sin \alpha = dc + b^2 \operatorname{tg} \alpha$$

et comme en vertu de (1)

$$dc = b^2 \operatorname{tg}^3 \alpha,$$

il vient $$R a \sin \alpha = b^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{b^2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha};$$

d'où $$R = \frac{b^2}{a \cos^3 \alpha}.$$

Si l'on remarque que

$$N = \frac{b^2}{a \cos \alpha} \text{ (XX)},$$

on obtient une seconde expression de R, savoir

$$R = \frac{N}{\cos^2 \alpha},$$

d'où la construction suivante de R : MD (*fig. 11*) étant la normale en M, en D on élève une perpendiculaire à MD, qui rencontre le rayon vecteur MF' au point I; en ce point on élève une perpendiculaire à F'M; cette perpendiculaire coupe la normale MD au point R tel que

$$MR = \frac{N}{\cos^2 \alpha}.$$

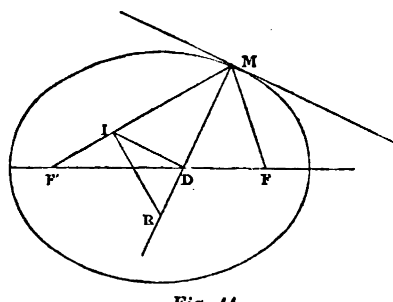


Fig. 11.

Enfin, on a obtenu (VIII, remarque)

$$\cos \alpha = \frac{b}{b'},$$

on en déduit $$R = \frac{b'^3}{ab}.$$

On trouvera la construction de R, partant de cette expression, dans le *Journal*, 3e année, p. 165 et suivantes.

XXVIII. **Théorème.** — *Il existe entre les rayons vecteurs* MF *et* MF' *d'un point* M *d'une ellipse, le rayon* R *du cercle osculateur en ce point et* α *le demi-angle des rayons secteurs, la relation*

$$\frac{1}{MF} + \frac{1}{MF'} = \frac{2}{R \cos \alpha}.$$

En effet, si dans la première expression de R que l'on vient d'obtenir, on remplace $\frac{b^2}{\cos^2 \alpha}$ par le produit MF × MF′ (V) et si l'on remarque que

$$a = \frac{MF + MF'}{2},$$

on peut écrire $$R = \frac{2MF \times MF'}{\cos \alpha \,(MF \times MF')}$$

ou $$\frac{MF + MF'}{MF \times MF'} = \frac{2}{R \cos \alpha},$$

relation qui conduit immédiatement à celle de l'énoncé.

Remarque. — Soit *(fig. 12)* un cercle de centre O, PAB un diamètre, PM une tangente et MQ la corde des contacts;

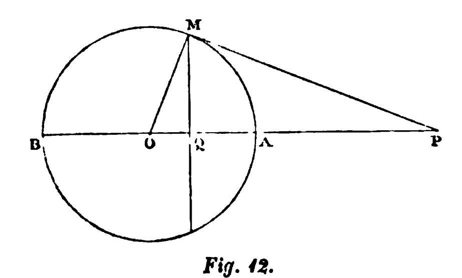


Fig. 12.

le triangle rectangle PMO donne

$$\overline{PM}^2 \text{ ou } PA \times PB = PQ \times PO;$$

or $$PO = \frac{PA + PB}{2},$$

donc $$PA \times PB = PQ \times \frac{PA + PB}{2};$$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = \frac{2}{PQ}.$$

Cela étant, soient *(fig. 13)* MF et MF′ les rayons vecteurs du point M d'une ellipse; sur MF′ on prend une longueur $MF_1 = MF$ et si I est le milieu de $F'F_1$

$$MI = \frac{MF' + MF_1}{2} = a.$$

Si TQ est la corde des contacts des tangentes issues du point M et menées au cercle décrit du point I comme centre avec IF′ pour rayon, on a, comme on vient de le voir,

$$\frac{1}{MF} + \frac{1}{MF_1} = \frac{2}{MQ}$$

et par suite $$\frac{2}{MQ} = \frac{2}{R \cos \alpha};$$

d'où $$R = \frac{MQ}{\cos \alpha}.$$

La polaire TQ prolongée rencontre précisément la normale en M au point R tel que MR = R, c'est-à-dire au centre du cercle osculateur en M.

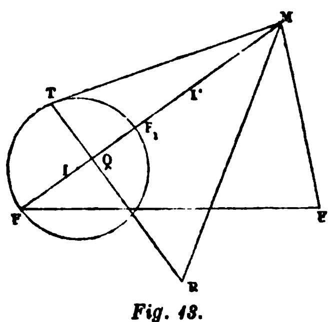


Fig. 18.

On déduit alors la construction suivante du rayon MR: sur l'un des rayons vecteurs MF′ on prend une longueur $MI = a$; avec IF′ pour rayon on décrit un cercle de centre I; on prend $MI' = \frac{a}{2}$ et du point I′ comme centre avec I′M pour rayon on décrit un nouveau cercle; la corde TQ commune à ces deux cercles rencontre la normale en M au point R tel que MR = R. *(A suivre.)*

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Pajon**, Professeur au Lycée de Cahors.

Loi des variations de la fraction du premier degré

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'},$$

x *croissant d'une manière continue depuis* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$.

Les variations de la fraction du premier degré sont soumises à une loi générale très simple dont l'application est

utile dans la discussion de toute une classe de formules. Cette loi n'étant ni établie, ni énoncée dans les ouvrages classiques d'algèbre, nous croyons devoir traiter cette question dans l'intérêt des élèves.

Nous supposons évidemment qu'entre les coefficients a, b, a', b' on n'a pas la relation $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. On sait que dans ce cas la fraction est constante et égale à $\frac{a}{a'}$.

I. *Continuité de la fonction.* — On démontre d'abord que le binôme $Mx + N$ est continu et croît depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ou décroît depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, selon que M est positif ou négatif.

De la continuité des deux termes on déduit aisément celle de la fraction. Soit $\frac{A}{B}$ la valeur déterminée que prend y lorsqu'on donne à x une valeur quelconque autre que $-\frac{b'}{a'}$; α, β, k, les accroissements positifs ou négatifs de A, de B et de $\frac{A}{B}$ lorsque x augmente d'une quantité positive h aussi petite qu'on voudra. On a :

$$k = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B^2 + B\beta},$$

d'où il est facile de conclure que k tend vers zéro.

Lorsque la variable x passe par la valeur $-\frac{b'}{a'}$, le dénominateur d'y s'annule en changeant de signe, le numérateur conservant le sien ; la fraction passe alors par l'infini en changeant de signe à ce passage.

II. *La fraction du premier degré varie dans le même sens que la variable* x *ou en sens contraire selon que* $ab' - ba'$ *est positif ou négatif.* — La fonction y, étant continue et ne passant qu'une seule fois par chaque valeur, puisque à une valeur d'y ne répond qu'une seule valeur d'x, est toujours croissante ou toujours décroissante. Il suffit donc de déterminer le sens de sa variation lorsque x passe par deux valeurs quelconques.

Or pour $x = \pm \infty$ on a $y = \frac{a}{a'}$. Soit k l'accroissement d'y lorsque x croît de n à $+\infty$, n étant aussi grand qu'on voudra. On a :

$$k = \frac{a}{a'} - \frac{an + b}{a'n + b'} = \frac{ab' - ba'}{a'^2n + a'b'},$$

le dénominateur étant positif; si n est suffisamment grand, le signe de k est le même que celui de $ab' - ba'$.

Donc selon que $ab' - ba'$ est positif ou négatif, la fonction varie dans le même sens que la variable ou en sens contraire.

III. *Loi générale des variations de la fraction.* — Nous avons supposé que x croît depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Si $ab' - ba'$ est positif, y croît depuis $\frac{a}{a'}$ jusqu'à $+\infty$, passe brusquement à $-\infty$ et croît depuis $-\infty$ jusqu'à $\frac{a}{a'}$. Si $ab' - ba'$ est négatif, y décroît depuis $\frac{a}{a'}$ jusqu'à $-\infty$, passe brusquement à $+\infty$ et décroît depuis $+\infty$ jusqu'à $\frac{a}{a'}$.

IV. *Applications.* — 1° *Discuter la formule des miroirs concaves* $\quad p' = \frac{fp}{p - f}$.

On a : $ab' - ba' = -f^2$; donc p' varie en sens inverse de p. Supposons que p décroisse depuis $+\infty$ jusqu'à zéro, la formule donne les valeurs correspondantes :

$$\begin{cases} p = +\infty & p = 2f & p = f & p = 0 \\ p' = f & p' = 2f & p' = \pm\infty & p' = 0 \end{cases}$$

et l'on conclut immédiatement les sept cas donnés dans les traités de physique.

2° *Étant donné* $\sin x = \frac{m + 10}{2m + 1}$, *déterminer les limites de* m, *l'angle* x *restant compris entre* 0° *et* 180°.

On a : $ab' - ba' = -19$; donc m varie en sens inverse de $\sin x$. La formule donne les valeurs correspondantes :

$$\begin{cases} \sin x = 0 & \sin x = 1 \\ m = -10 & m = 9 \end{cases}$$

Donc sin x croissant depuis zéro jusqu'à 1, m décroît de -10 à $-\infty$, passe brusquement à $+\infty$ et décroît ensuite jusqu'à 9.

3° *Couper une sphère par un plan de manière que le volume de l'un des segments ainsi obtenus soit une fraction donnée* k *du volume du cylindre qui aurait même base et même hauteur que le segment sphérique.*

Entre quelles limites peut varier k ?

(Baccalauréat ès sciences, Montpellier, 14 juillet 1879.)

La hauteur du segment sphérique étant représentée par x, on trouve la formule :

$$x = \frac{3R(2K-1)}{3K-1};$$

3R étant constante, x varie dans le même sens que la fraction $\frac{2K-1}{3K-1}$, et comme cette fraction donne : $ab' - ba' = 1$, x et K varient dans le même sens. Or, la formule donne :

$$\begin{cases} x = 0 & x = 2R \\ K = \frac{1}{2} & K = \infty \end{cases}$$

Donc x croissant de 0 à 2R, K croît depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à $+\infty$.

4° *Dans quelle direction faut-il lancer une bille élastique pour qu'après trois réflexions sur un billard circulaire elle revienne au point de départ? Examiner le cas où la bille placée en dehors pourrait pénétrer librement dans l'intérieur du cercle et revenir librement au point de départ.*

Il suffit évidemment de déterminer le premier point d'incidence, le second point étant à l'extrémité du diamètre passant par la position initiale de la bille, et le troisième étant symétrique du premier par rapport à ce diamètre.

R étant le rayon donné du billard, d la distance donnée de la bille au centre, x la projection du rayon mené au premier point d'incidence sur le diamètre qui passe par la bille, on obtient la formule :

$$x = \frac{R(R-d)}{2d}.$$

La fraction $\frac{-d+R}{2d}$ donnant $ab'-ba'=-2R$, a et x varient en sens inverse l'un de l'autre. Or, d'après la formule, si $x=R$, on a $d=\frac{R}{3}$, et si $d=\infty$, on a $x=-\frac{R}{2}$. Donc si d croît depuis son minimum $\frac{R}{3}$ jusqu'à $+\infty$, x décroît depuis son maximum R jusqu'à $-\frac{R}{2}$ son minimum, et l'on a le tableau des valeurs principales :

$$\left\{\begin{array}{llll} d=\frac{R}{3} & d=\frac{R}{2} & d=R & d=+\infty \\ x=R & x=\frac{R}{2} & x=0 & x=-\frac{R}{2} \end{array}\right.$$

Remarque générale.

Lorsqu'il s'agit de déterminer par les méthodes élémentaires les limites d'une fonction ou de sa variable dans des conditions particulières, la loi des variations de cette fonction fournit, en général, un moyen plus simple et plus sûr que l'emploi des inégalités. La question suivante posée aux examens oraux pour Saint-Cyr (1879) en offre un exemple assez remarquable.

Trouver le maximum et le minimum de la surface du trapèze formé dans une ellipse par la distance focale, deux rayons vecteurs parallèles et de même sens et la droite qui joint leurs extrémités.

α désignant l'angle des rayons vecteurs cherchés avec le grand axe $2a$, $2b$ le petit axe et $2c$ la distance focale, l'expression de la surface de ce trapèze est

$$S=\frac{2ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha},$$

et à cause de la quantité constante $2ab^2c$, il s'agit de trouver le maximum et le minimum de la fraction

$$y=\frac{\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}$$

lorsque $\sin\alpha$ croît depuis 0 jusqu'à 1. Dans ces limites, y

est toujours positif et l'on a les valeurs correspondantes:

$$\begin{cases} \sin\alpha = 0 & \sin\alpha = 1 \\ y = 0 & y = \dfrac{1}{b^2 + c^2} \end{cases}$$

Le minimum cherché est donc zéro, et le maximum serait $\frac{1}{b^2 + c^2}$ si pendant que $\sin\alpha$ croît de 0 à 1, y croissait constamment.

Or, si l'on cherche les variations d'y en remplaçant $\sin\alpha$ par une variable indépendante z, croissant depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on trouve que la fonction y croît depuis 0 jusqu'à son maximum algébrique $\frac{1}{2bc}$ lorsque z croît depuis 0 jusqu'à $\frac{b}{c}$. Il faut donc distinguer trois cas :

1° $\frac{b}{c} < 1$. On a les valeurs correspondantes :

$$\begin{cases} z = 0 & z = \dfrac{b}{c} & z = 1 \\ y = 0 & y = \dfrac{1}{2bc} \text{ maximum}; & y = \dfrac{1}{b^2 + c^2} \end{cases}$$

Dans ce cas, $\sin\alpha$ croissant depuis 0 jusqu'à 1, y croît depuis 0 jusqu'à son maximum $\frac{1}{2bc}$ et décroît ensuite jusqu'à $\frac{1}{b^2 + c^2}$. Donc le maximum du trapèze a lieu lorsque $\sin\alpha = \frac{b}{c}$. Sa surface est alors égale à ab, et les rayons vecteurs qui forment ses bases sont parallèles à la corde qui joint les extrémités des deux axes.

2° $\frac{b}{c} > 1$. On a les valeurs correspondantes :

$$\begin{cases} z = 0 & z = 1 & z = \dfrac{b}{c} \\ y = 0 & y = \dfrac{1}{b^2 + c^2} & y = \dfrac{1}{2bc} \end{cases}$$

Dans ce cas, $\sin\alpha$ croissant depuis 0 jusqu'à 1, y croît depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{b^2 + c^2}$, valeur qui devient ainsi son maxi-

mum. Le trapèze maximum est alors un rectangle dont la surface est égale à $\frac{2b^2c}{a}$.

3° $\frac{b}{c} = 1$. On a, dans ce cas :

$$z = 0 \qquad z = \frac{b}{c} = 1$$

$$y = 0 \qquad y = \frac{1}{2bc} = \frac{1}{b^2 + c^2} = \frac{1}{2b^2}$$

Le trapèze maximum est encore un rectangle, et sa surface est égale à ab.

ÉTUDE SUR UNE LIGNE REMARQUABLE DU TRIANGLE

ANTIBISSECTRICE

Par **Maurice d'Ocagne,** élève en Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.

Définition. — Cette note a pour but l'exposé des principales propriétés d'un élément nouveau que je propose d'introduire dans l'étude du triangle.

Cet élément est *la droite qui joint un sommet d'un triangle au symétrique, sur le côté opposé, du pied de la bissectrice correspondante, par rapport au milieu de ce côté.*

Je dois ajouter que, dans ce qui suit, je donne à cette ligne le nom d'*antibissectrice* relative au sommet considéré.

Propriétés de l'antibissectrice. — Je me contenterai d'énoncer les propriétés suivantes dont les démonstrations sont assez simples pour que j'aie cru pouvoir me dispenser de les donner ici.

I. — *Les distances d'un point quelconque d'une antibissectrice aux côtés adjacents du triangle, sont inversement proportionnelles aux carrés de ces côtés.*

Il suffit pour le démontrer d'abaisser, du pied de l'antibissectrice et du pied de la bissectrice sur l'un des côtés, des

perpendiculaires sur les deux autres côtés. On a des triangles semblables qui donnent la propriété énoncée.

II. — *Les distances du pied d'une antibissectrice aux côtés adjacents du triangle sont proportionnelles aux carrés des segments déterminés sur la base par ce point.*

III. — *Les trois antibissectrices d'un triangle concourent en un même point, dont les distances* d', d'', d''' *aux côtés* a, b, c *sont liées par la relation* $a^2d' = b^2d'' = c^2d'''$.

IV. — *Le point de concours des antibissectrices est le barycentre des sommets du triangle affectés des coefficients* coséc A, coséc B, coséc C.

Relations métriques. — 1° *Longueur de l'antibissectrice.* Si on considère, dans le triangle ABC la hauteur AH, la bissectrice AD, la médiane AM et l'antibissectrice AI, on remarque que AM est médiane, dans le triangle DAI.

Donc $$\overline{AI}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AM}^2 + \frac{\overline{DI}^2}{2}$$

et $$\overline{AI}^2 - \overline{AD}^2 = 2DI \times HM.$$

Ajoutant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$2\overline{AI}^2 = 2\overline{AM}^2 + \frac{\overline{DI}^2}{2} + 2\,HM \times DI.$$

Remplaçant AM, DI, HM par leurs valeurs que l'on sait calculer, on trouve en posant $AI = l$

$$l = \frac{\sqrt{b^4 + c^4 - bc(a^2 + b^2 + c^2)}}{b + c}. \qquad (I)$$

2° *Angles de la bissectrice avec les côtés adjacents.* En posant $IAB = \beta$, $IAC = \gamma$, on voit facilement que

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b^2}{c^2}. \qquad (1)$$

De plus $$\beta + \gamma = A$$

ou $$\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma = \cos A. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit

$$\sin \beta = \frac{b^2 \sin A}{\sqrt{b^4 + c^4 + 2b^2c^2 \cos A}}$$

$$\sin \gamma = \frac{c^2 \sin A}{\sqrt{b^4 + c^4 + 2b^2c^2 \cos A}} \qquad (II)$$

3° *Distances du point de concours des antibissectrices aux côtés du triangle.* La formule de la propriété (II) jointe à la relation évidente $ad' + bd'' + cd''' = 2S$ (S étant la surface du triangle) donne

$$d' = \frac{2Sbc}{a(ab + ac + bc)}. \qquad \text{(III)}$$

De même pour d'' et d'''.

Remarque. — On peut considérer l'*antibissectrice extérieure* correspondant à la bissectrice extérieure comme l'*antibissectrice intérieure* correspond à la bissectrice intérieure.

Les deux antibissectrices sont conjuguées harmoniques par rapport aux côtés du triangle.

L'antibissectrice extérieure donne lieu à une étude analogue à celle que nous venons de résumer pour l'antibissectrice intérieure.

Applications. — Nous allons maintenant donner quelques applications des théorèmes contenus dans cette note, de manière à faire ressortir leur utilité.

Problème I. — *Deux points* A *et* B *se meuvent respectivement sur deux droites fixes* Ox *et* Oy, *de façon que la somme* OA + OB *reste constante.*

Déterminer l'enveloppe de la droite AB.

Nous allons d'abord établir une relation dont nous ferons plusieurs fois usage au cours de la question.

Considérons deux positions quelconques AB, A'B', de la droite mobile, qui se coupent en M. Nous avons

$$OA + OB = OA' + OB'$$

ou

$$OB - OB' = OA' - OA$$

c'est-à-dire

$$BB' = A'A.$$

Les triangles MAA', MBB ayant, par suite, même base sont entre eux comme leurs hauteurs

$$\frac{MAA'}{MBB'} = \frac{MH}{MI}.$$

Mais ces triangles ayant aussi même angle au sommet,

on a $$\frac{MAA'}{MBB'} = \frac{MA \times MA'}{MB \times MB'}.$$

Donc $$\frac{MH}{MI} = \frac{MA \times MA'}{MB \times MB'}.$$

Cela posé, nous allons diviser la solution du problème en deux parties.

1° Déterminons le point où la droite AB touche son enveloppe.

Pour cela, considérons la position très voisine A'B', qui coupe AB en M, et cherchons le point m vers lequel M tend sur AB, lorsque A'B' vient se confondre avec cette droite.

D'après la relation précédemment établie, on a, si MH et MI sont les perpendiculaires abaissées de M sur oy et ox,

$$\frac{MH}{MI} = \frac{MA \times MA'}{MB \times MB'}.$$

De plus, $$\text{Lim MA} = \text{Lim MA}' = mA$$
$$\text{Lim MB} = \text{Lim MB}' = mB.$$

Par suite, si mh et mi sont les distances du point m à oy

et ox, $$\frac{mh}{mi} = \frac{\overline{mA}^2}{\overline{mB}^2}.$$

D'après la propriété II, le point m est donc le pied de l'antibissectrice du triangle OAB issue de O.

Conséquemment, si on mène la bissectrice de l'angle xoy, oz, qui rencontre AB en P, on a, d'après la définition même de l'antibissectrice, $AP = Bm$.

2° Cherchons maintenant l'enveloppe de la droite AB.

Pour cela, considérons la position particulière CD de la droite mobile perpendiculaire à OZ, c'est-à-dire telle que OC = OD. D'après ce qui vient d'être dit, on voit que l'enveloppe est tangente à cette droite en son point d'intersection S avec OZ. Comme d'ailleurs cette enveloppe a évidemment OZ pour axe, le point S est sommet de la courbe.

Si N est le point où CD coupe AB et si de ce point nous abaissons les perpendiculaires NR et NQ sur OY et OX, nous avons, toujours d'après la relation fondamentale,

$$\frac{NR}{NQ} = \frac{ND \times NA}{NC \times NB}.$$

Mais $RND = SOY$
comme ayant leurs côtés perpendiculaires,
et $QNC = SOX$
pour la même raison.

Donc $RND = QNC$

et on a $$\frac{ND}{NC} = \frac{NR}{NQ}.$$

Par suite, $$\frac{NA}{NB} = 1$$

ou $NA = NB.$

Mais nous avons vu que $mB = PA,$
donc $Nm = NP.$

Par conséquent, si L est le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur OZ,
on a $SL = SP,$
c'est-à-dire que la sous-tangente à la courbe enveloppe est divisée en deux parties égales par le sommet de la courbe; cette enveloppe est donc une parabole. On voit, de plus, immédiatement que cette parabole est tangente à OX et à OY.

Problème II. — *On prend à l'intérieur du triangle* ABC *un point* M, *et sur les triangles* MAB, MAC, MBC, *on construit des prismes ayant des hauteurs proportionnelles à* AB, AC, BC. *Déterminer la position du point* M *de façon que ces trois prismes soient équivalents.*

J'appellerai Mc, Mb, Ma, les perpendiculaires abaissées de M respectivement sur AB, AC, BC. Si alors je représente par V, V', V'' les volumes des trois prismes, par H, H', H'' leurs hauteurs, j'ai,

$$V = \frac{AB \times Mc}{2} . H; V' = \frac{AC \times Mb}{2} . H'; V'' = \frac{BC \times Ma}{2} . H''$$

Il faut donc que :

$$AB \times Mc \times H = AC \times Mb \times H' = BC \times Ma \times H''$$

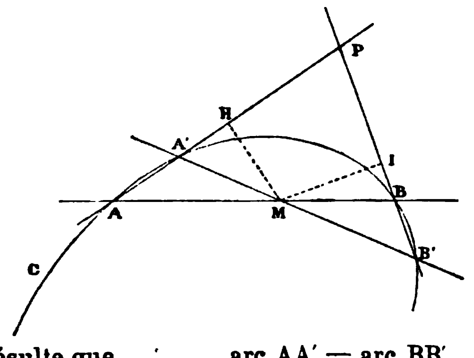
ou, comme H, H', H'', sont proportionnelles à AB, AC, BC,

$$Mc \times \overline{AB}^2 = Mb \times \overline{AC}^2 = Ma \times \overline{BC}^2.$$

Par suite, d'après la propriété III, la position cherchée pour le point M est le point de concours des antibissectrices du triangle ABC.

Théorème. — *Si on considère une droite* AB *découpant sur une courbe* C *quelconque un arc de grandeur constante, le point où* AB *touche son enveloppe est le pied de l'antibissectrice du triangle formé par la droite* AB *et les tangentes à la courbe* C *aux points* A *et* B *où elle est coupée par* AB.

Prenons la position AB de la droite mobile et la position infiniment voisine A'B' qui coupe la première en M. Du point M abaissons les perpendiculaires MH et MJ sur les sécantes AA' et BB'.



Les arcs AB et A'B' étant égaux, par hypothèse, il en résulte que arc AA' = arc BB'.

Mais ces arcs, étant infiniment petits, se confondent sensiblement avec leurs cordes et celles-ci sont égales, à moins d'un infiniment petit du second ordre.

Dès lors, les triangles MAA', MBB' ayant même base sont entre eux comme leurs hauteurs. Mais, ayant même angle au sommet, ils sont aussi entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.

Donc,
$$\frac{MH}{MI} = \frac{MA \times MA'}{MB \times MA'}.$$

A la limite, lorsque A'B' vient se confondre avec AB, on a

$$MA' = MA \quad MB' = MB.$$

Par suite,
$$\text{Lim}\ \frac{MH}{MI} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}$$

C'est-à-dire que la limite cherchée de la position du point M, sur AB, est le pied de l'antibissectrice du triangle avec lequel se confond alors le triangle PAB ; mais, à la limite, les sécantes PA et PB viennent coïncider avec les tangentes à la courbe C aux points A et B ; le théorème est donc démontré.

La première partie du problème I est un cas particulier de ce théorème; mais cette particularité entraînant des conséquences intéressantes qui ne sont pas réalisées dans les autres cas, j'ai voulu traiter le problème à part, avant d'en faire connaître la généralisation.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

Par M. **E.-J. Boquel.**

(*Suite*, voir p. 79).

Le théorème précédent conduit immédiatement à la propriété fondamentale de la forme adjointe.

Si l'on fait dans f la substitution suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \ldots + \alpha_{1n}x'_n \\ x_2 = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \ldots + \alpha_{2n}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x'_1 + \alpha_{n2}x'_2 + \ldots + \alpha_{nn}x'_n \end{array}\right.$$

la forme f sera transformée en une autre forme f'.

Soit F' la forme adjointe de cette nouvelle forme f', F désignant toujours la forme adjointe de la première forme f.

Je dis qu'on aura identiquement :

$$F'(X'_1, X'_2, \ldots X'_n) = R^2F(X_1, X_2, \ldots X_n),$$

R désignant le module de la transformation (c.-à-d. le déterminant de la substitution), sous la condition que l'on suppose $X'_1, X'_2, \ldots X'_n$, liées à $X_1, X_2, \ldots X_n$ par les relations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} X'_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{21}X_2 + \ldots + \alpha_{n1}X_n \\ X'_2 = \alpha_{12}X_2 + \alpha_{22}X_2 + \ldots + \alpha_{n2}X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X'_n = \alpha_{1n}X_1 + \alpha_{2n}X_2 + \ldots + \alpha_{nn}X_n \end{array}\right.$$

Pour établir cette proposition, formons F en considérant,

d'après le théorème précédent, la forme

$$\varphi = \theta f - (x_1 X_1 + x_2 X_2 + \dots + x_n X_n)^2.$$

Prenons l'invariant de φ, que nous appellerons $\Delta(\varphi)$; nous avons vu qu'on a :

$$\Delta(\varphi) = \theta^n \Delta - \theta^{n-1} F(X_1, X_2, \dots X_n).$$

Faisons dans φ la substitution (1), en considérant θ et les variables X comme de simples coefficients. Il viendra :

$$\varphi' = \theta f' - [X_1(\alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \dots + \alpha_{1n} x'_n) + \dots]^2.$$

Pour former ce carré, multiplions les équations (1) par $X_1, X_2, \dots X_n$, et ajoutons ; nous aurons :

$$\begin{aligned} x_1 X_1 + x_2 X_2 + \dots + x_n X_n \\ = x'_1(\alpha_{11} X_1 + \alpha_{21} X_2 + \dots + \alpha_{n1} X_n) \\ + x'_2(\alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \dots + \alpha_{n2} X_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + x'_n(\alpha_{1n} X_1 + \alpha_{2n} X_2 + \dots + \alpha_{nn} X_n) \end{aligned}$$

Les quantités entre parenthèses dans le deuxième membre sont précisément $X'_1, X'_2, \dots X'_n$; nous aurons donc :

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \dots + x_n X_n = x'_1 X'_1 + x'_2 X'_2 + \dots + x'_n X'_n.$$

En faisant dans φ la substitution (1), on aura donc :

$$\varphi' = \theta f' - (x'_1 X'_1 + x'_2 X'_2 + \dots + x'_n X'_n)^2.$$

Donc $\quad \Delta(\varphi') = \theta_n \Delta' - \theta^{n-1} F'(X'_1, X'_2, \dots X'_n).$

Or nous avons établi au début que, si l'on fait une substitution linéaire dans une forme quadratique, l'invariant de la nouvelle forme obtenue est égal au produit de l'invariant de la première forme par le carré du module de la transformation; donc $\quad \Delta(\varphi') = R^2 \Delta(\varphi).$

Par conséquent $\Theta_n \Delta' - \Theta^{n-1} F' = R^2(\Theta^n \Delta - \Theta^{n-1} F).$

Supprimant Θ^{n-1}, et remarquant que $\Delta' = R^2 \Delta$, il vient :

$$F' = R^2 F, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

— On peut donner de cette propriété fondamentale un autre énoncé, plus commode que le précédent dans les applications.

Puisque l'on a : $F'(X'_1, X'_2, \dots X'_n) = R^2 F(X_1, X_2, \dots X_n)$, si l'on remplaçait $X'_1, X'_2, \dots X'_n$ par leurs valeurs données par les équations (2), on aurait une identité.

Faisons l'opération inverse, c'est-à-dire remplaçons X_1, $X_2, \dots X_n$ par leurs valeurs tirées des équations (2), en

observant que le déterminant de ces équations est R. Il viendra, en désignant par $R'\alpha_{11}$, $R'\alpha_{12}$. ... les dérivées de R par rapport aux éléments respectifs α_{11}, α_{12}, ... :

$$RX_1 = R'\alpha_{11}X'_1 + R'\alpha_{12}\, X'_2 + \dots + R\alpha_{1n}\, X'_n$$

De même $RX_2 = R'\alpha_{21}\, X'_1 + R'\alpha_{22}\, X'_2 + \dots + R'\alpha_{22}\, X'_n$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$RX_n = R'\alpha_{n1}\, X'_1 + R'\alpha_{n2}\, X'_2 + \dots + R'\alpha_{nn}\, X'^n.$$

D'ailleurs, F étant homogène et du 2e degré, on a :

$$R^2F = F(RX_1,\ RX_2,\ \dots\ RX_n)$$

et par suite, la substitution des valeurs précédentes donne :

$$F'(X'_1,\ X'_2,\ \dots\ X'_n) = F(R'\alpha_{11}\, X'_1 + R'\alpha_{12}\, X'_2 + \dots)$$

résultat qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Si l'on considère la substitution (1), *et que l'on appelle* SUBSTITUTION ADJOINTE *la substitution*

$$(1)' \left\{ \begin{array}{l} x_1 = R'\alpha_{11}\, x'_1 + R'\alpha_{12}\, x'_2 + \dots + R'\alpha_{1n}\, x'_n \\ x_2 = R'\alpha_{21}\, x'_1 + R'\alpha_{22}\, x'_2 + \dots + R'\alpha_{2n}\, x'_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = R'\alpha_{n1}\, x'_1 + R'\alpha_{n2}\, x'_2 + \dots + R'\alpha_{nn}\, x'_n \end{array} \right.$$

Si la forme f *est changée en la forme* f' *par la substitution* (1), *la forme* F, *adjointe de* f, *sera changée en la forme* F', *adjointe de* f', *par la substitution* (1)' *adjointe de la substitution* (1).

— *Application des théorèmes précédents à la forme ternaire* $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$.

Soit f la forme proposée ; nous allons chercher sa forme adjointe. Posons, conformément à la définition :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Ax + B''y + B'z = X \\ B''x + A'y + Bz = Y \\ B'x + By + A''z = Z \end{array} \right.$$

Soit Δ le déterminant $\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$ (invariant de la forme f)

que nous supposerons différent de zéro.

On peut tirer des équations (1) les valeurs de x, y, z, en fonction de X, Y, Z ; il vient ainsi :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} X & B'' & B' \\ Y & A' & B \\ Z & B & A'' \end{vmatrix}}{\Delta},\quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & X & B \\ B'' & Y & B \\ B' & Z & A' \end{vmatrix}}{\Delta},\quad z = \frac{\begin{vmatrix} A & B'' & X \\ B'' & A' & Y \\ B' & B & Z \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Si l'on reporte ces valeurs dans f mise sous la forme

$$f = xX + yY + zZ,$$

le numérateur de la nouvelle valeur de f sera la forme adjointe. On a ainsi :

$$f = \frac{X\begin{vmatrix} X & B'' & B' \\ Y & A' & B \\ Z & B & A'' \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} A & X & B' \\ B'' & Y & B \\ B' & Z & A'' \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} A & B'' & X \\ B'' & A' & Y \\ B' & B & Z \end{vmatrix}}{\Delta}$$

et la forme adjointe de f est, par conséquent :

$$F = X^2(A'A'' - B^2) + Y^2(A''A - B'^2) + Z^2(AA' - B''^2)$$
$$+ 2YZ(B'B'' - AB) + 2ZX(B''B - A'B') + 2XY(BB' - A''B'')$$

— On doit à Cauchy *(Exercices mathématiques)* une remarque intéressante, et susceptible de nombreuses applications. Si l'on fait dans f la substitution particulière

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta u \\ y = \alpha' t + \beta' u \\ z = \alpha'' t + \beta'' u \end{cases}$$

on obtient une autre forme $Mt^2 + 2N''tu + M'u^2$, dont l'invariant est $MM' - N''^2$.

Si l'on considère, d'autre part, la substitution générale

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta u + \gamma v \\ y = \alpha' t + \beta' u + \gamma' v \\ z = \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v \end{cases}$$

la forme obtenue se composera de la partie $Mt^2 + 2N''tu + M'u^2$ et des trois autres termes qu'il est inutile d'écrire.

Prenons la substitution adjointe

$$\begin{cases} x = R'_\alpha t + R'_\beta u + R'_\gamma v \\ y = R'_{\alpha'} t + R'_{\beta'} u + R'_{\gamma'} v \\ z = R'_{\alpha''} t + R'_{\beta''} u + R'_{\gamma''} v \end{cases}$$

on a : $R'_\alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta''$. $R'_\beta = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''$, $R'_\gamma = \alpha\beta'' - \beta'\alpha''$.

$$\text{Donc} \begin{cases} x = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')t + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')u + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha)v \\ y = (\beta''\gamma - \gamma''\beta)t + (\gamma''\alpha - \alpha''\gamma)u + (\alpha''\beta - \beta''\alpha)v \\ z = (\beta\gamma' - \gamma\beta')t + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')u + (\alpha\beta' - \beta\alpha')v \end{cases}$$

Nous avons vu que cette substitution transformera la forme F adjointe de f, en la forme F′ adjointe de f'.

Or la forme adjointe de f' est

$F' = (M'M'' - N^2)t^2 + \ldots + (MM' - N''^2)v^2 + \ldots$

Revenons maintenant à la première substitution considérée, où n'entre pas v; tous les termes de la substitution adjointe où entrent les quantités γ, γ', γ'' sont nuls, et cette substitution se réduit à

$x = (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')v, \quad y = (\alpha''\beta - \beta''\alpha)v, \quad z = (\alpha\beta' - \beta\alpha')v.$

Or, c'est en la faisant dans F qu'on obtient le résultat F′; F′ se réduit d'ailleurs dans le cas actuel à v^2 $(MM' - N''^2)$; $MM' - N''^2$ est donc le coefficient de v^2 dans le résultat qu'on obtient en faisant dans la première forme adjointe F la substitution adjointe.

Mais la forme f', quand les coefficients de v sont nuls, est simplement $Mt^2 + 2N''tu + M'u^2$; son invariant est $MM' - N''^2$; cet invariant est donc égal au coefficient de v^2 dans F′, C'EST-A-DIRE A LA VALEUR MÊME QUE PREND LA FORME ADJOINTE DE LA PROPOSÉE QUAND ON Y REMPLACE x, y, z, PAR LES BINOMES $\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$, $\alpha''\beta - \beta''\alpha$ ET $\alpha\beta' - \beta\alpha'$.

Applications.

Les propriétés des formes quadratiques, qui ont été beaucoup étudiées à l'étranger, sont susceptibles d'applications intéressantes et variées dans toutes les branches des mathématiques. En France, M. Hermite en a tiré un merveilleux parti dans le domaine de l'algèbre pure, et le P. Joubert, dont l'autorité en ces matières est bien connue, en a fait, de son côté, une étude approfondie. Sans vouloir entrer dans de longs détails sur des travaux qui appartiennent à leur auteur, et qu'il est mieux que personne à même de vulgariser en les publiant s'il le juge convenable, nous croyons qu'il ne sera pas inutile de donner à nos lecteurs une idée de la méthode, et nous choisirons dans ce but quelques questions de nature à les intéresser spécialement, en ce qu'elles appartiennent tout à fait à la géométrie analytique.

Nous allons montrer d'abord comment le P. Joubert a utilisé l'observation de Cauchy pour calculer avec une extrême

simplicité la distance d'un point à une droite dans l'espace, en coordonnées obliques, calcul que nos lecteurs savent par expérience être très pénible par les procédés habituels.

Distance d'un point $(x' \ y' \ z')$ *à une droite* $(x = az + p, y = bz + q)$ *en coordonnées obliques.* — Le carré de la distance du point $(x' \ y' \ z')$ à un point quelconque (x, y, z) de la droite considérée est l'expression

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + 2(y - y')(z - z') \cos\lambda + 2(z - z')(x - x') \cos\mu + 2(x - x')(y - y') \cos\nu.$$

Le minimum de cette expression, dans laquelle x et y sont des fonctions de z déterminées par les équations de la droite donnée, est précisément la valeur du carré de la distance cherchée.

δ^2 est en réalité égal à $(az + p - x')^2 + (bz + q - y')^2 + \ldots\ldots$ ce que l'on peut écrire comme il suit :

$$\delta^2 = [a(z - z') - (x' - az' - p)]^2 + [b(z - z') - (y' - bz' - q)]^2 + (z - z')^2$$
$$+ 2[b(z - z') - (y' - bz' - q)](z - z') \cos\lambda$$
$$+ 2[a(x - x') - (x' - az' - p)](z - z') \cos\mu$$
$$+ 2[a(z - z') - (x' - az' - p)][b(z - z') - (y' - bz' - q)] \cos\nu.$$

δ^2 est donc de la forme $M(z - z')^2 + 2N''(z - z') + M'$

C.-à-d. de la forme $\frac{1}{M}\Big[M(z - z') + N''\Big]^2 + \frac{MM' - N''^2}{M}$

La valeur qui rend δ^2 minimum est celle pour laquelle $M(z - z') + N''$ est nul, et le minimum est précisément $\frac{MM' - N''^2}{M}$; il faut donc calculer cette quantité.

Observons que l'expression $M(z - z')^2 + 2N''(z - z') + M'$ provient de la forme quadratique

$$f = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos\lambda + 2zx \cos\mu + 2xy \cos\nu$$

quand on y remplace x par $a(z - z') - (x' - az' - p)$
y par $b(z - z') - (y' - bz' - q)$
et z par $z - z'$.

C'est là une substitution tout à fait analogue à celle dont il s'agit dans la remarque de Cauchy, t représentant $z - z'$, u représentant l'unité, et les coefficients étant

$$\alpha = a, \quad \alpha' = b, \quad \alpha'' = 1.$$
$$\beta = -(x' - az' - p), \quad \beta' = -(y' - bz' - q), \quad \beta'' = 0.$$

Or, d'après la remarque de Cauchy, on sait que si dans $f(x, y, z)$ on fait la substitution $x = \alpha t + \beta u$, $y = \alpha' t + \beta' u$, $z = \alpha'' t + \beta'' u$, auquel cas $f(x, y, z)$ prend la forme $Mt^2 + 2N''tu + M'u^2$, on a :

$$MM' - N''^2 = F(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'', \alpha''\beta - \beta''\alpha, \alpha\beta' - \beta\alpha')$$

F désignant la forme adjointe de f.

Les binômes à considérer sont:

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = y' - bz' - q, \quad \alpha''\beta - \beta''\alpha = -(x' - az' - p)$$

et $\alpha\beta' - \beta\alpha' = -(y' - bz' - q)a + (x' - az' - p)b$

$$= b(x' - p) - a(y' - q).$$

Nous obtiendrons $MM' - N''^2$ en remplaçant, dans la forme adjointe de f, les variables x, y, z par ces binômes.

Or la forme adjointe F de f est, comme nous l'avons vu :

$$F = x^2(A'A'' - B^2) + y^2(A''A - B'^2) + z^2(AA' - B''^2)$$
$$+ 2yz(B'B'' - AB) + 2zx(B''B - A'B') + 2xy(BB' - A''B'')$$

c'est-à-dire dans le cas actuel :

$$F = x^2 \sin^2 \lambda + y^2 \sin^2 \mu + z^2 \sin^2 \nu + 2yz(\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda)$$
$$+ 2zx(\cos \nu \cos \lambda - \cos \mu) + 2xy(\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu).$$

Par conséquent,

$$MM' - N''^2 = (y' - bz' - q)^2 \sin^2 \lambda + (x' - az' - p) \sin^2 \mu$$
$$+ [b(x' - p) - a(y' - q)]^2 \sin^2 \nu + \ldots\ldots\ldots$$

Le dénominateur de δ^2 est M; or la quantité M obtenue en remplaçant dans f, x, y et z par $\alpha t + \beta u$, $\alpha' t + \beta' u$, $\alpha'' t + \beta'' u$, est le coefficient de t^2; c'est donc

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2\alpha'\alpha'' \cos \lambda + 2\alpha''\alpha \cos \mu + 2\alpha\alpha' \cos \nu$$

c.-à-d. que l'on a, d'après les valeurs de α, α', α'' :

$$M = a^2 + b^2 + 1 + 2b \cos \lambda + 2a \cos \mu + 2ab \cos \nu.$$

Le carré de la distance cherchée est donc :

$$\delta^2 = \left| \frac{E^2\sin^2\lambda + G^2\sin^2\mu + H^2\sin^2\nu + 2GH(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + 2HE(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2EG(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)}{a^2 + b^2 + 1 + 2b \cos \lambda + 2a \cos \mu + 2ab \cos \nu} \right.$$

formule dans laquelle E, G, H *désignent les valeurs que prennent les premiers membres des équations des projections de la droite considérée sur les trois plans coordonnés quand on y remplace les coordonnées courantes par les coordonnées particulières* x', y', z' *du point considéré.*

(A suivre.)

RECHERCHES
SUR LES
COURBES PLANES DU TROISIÈME DEGRÉ
AYANT AU MOINS UNE ASYMPTOTE A DISTANCE FINIE

Par M. **J. Collin**, ancien élève de l'Ecole polytechnique,
Professeur de Mathématiques.

(*Suite*, voir p. 74.)

Courbes dépourvues de point singulier.

Ces courbes sont représentées par une équation de l'une des formes suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}(y - mx)(y - m'x)(y - m''x) & (1)\\ \quad = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F & \\ (y - mx)^2(y - m'x) & (2)\\ \quad = A(y - mx)(y - px) + Dy + Ex + F & \end{array}\right\} \begin{array}{c}0\\ \text{Asympt.}\\ \text{à}\\ \text{l'}\infty.\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(y - mx)^2(y - m'x) & (3)\\ \quad = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F & \\ (y - mx)^3 & (4)\\ \quad = A(y - mx)(y - px) + Dy + Ex + F & \end{array}\right\} \begin{array}{c}2\\ \text{Asympt.}\\ \text{à}\\ \text{l'}\infty.\end{array}$$

Du reste, dans les courbes (1), parmi les trois directions asymptotiques, il peut y en avoir soit trois réelles, soit deux imaginaires m et m', et une réelle m''. En outre, dans les courbes (2), nous supposons indifféremment $p \gtrless m$ ou $= m$, tandis que dans les courbes (4) forcément on a $p \gtrless m$.

Cela posé :

Théorème I. — *Toute courbe* (1) *ou* (3) *peut en principe se mettre sous la forme mi-décomposée.*

$$1 = \frac{ax + by}{(y - mx)'(y - m'x)} + \frac{1}{y - m'x - n} \quad (M).$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on prenne pour origine le point de contact de l'une des tangentes issues du troisième point d'intersection I *de la courbe avec son asymptote de direction* m″.

Que cela soit nécessaire c'est évident; il n'y a pour s'en rendre compte, qu'à regarder l'équation (M).

Mais, de plus, cela suffit. En effet considérons une courbe (1), et prenons pour origine l'un des points indiqués. L'équation de la courbe sera forcément de l'une des deux formes

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x - d'') = (a'x + b'y)(y - m''x - n'') \qquad (\alpha)$$

ou

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x - d'') = a'(y - m''x)(y - m''x - n'') \qquad (\alpha')$$

suivant que I est à distance finie ou à l'∞. Or l'identification de ces équations avec (M) est toujours possible et très simplement.

Remarque. — Cette identification ne manifeste encore aucune impossibilité, si l'on suppose $d'' = o$, de sorte que I semble convenir lui-même pour transformer l'équation de la courbe. Mais il faut remarquer que, si l'on prend I pour origine, l'équation de la courbe n'est pas forcément de la forme (α).

Ainsi, pour qu'une courbe (1) ou (3) puisse se mettre sous la forme (M), il suffit que du point I on puisse mener une tangente réelle à la courbe. Or, il est facile de s'assurer que cette tangente réelle existe, sauf *quelquefois* pour des courbes des formes

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x) = A(y - mx)(y - m'x) + Dy + Ex \qquad (E_1)$$

$$(y - mx)^2(y - m''x) = A(y - m''x)(y - px) + D(y - m''x) + F \qquad (E_2)$$

et *jamais* pour les courbes

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x) = Dy + Ex \qquad (E_3)$$

On peut donc donner sous forme de corollaire, cet autre énoncé du théorème :

Corollaire : *Toute courbe* (1) *ou* (3) *peut se mettre sous la forme* (M), *pourvu qu'elle ne contienne pas le point de rencontre de deux asymptotes.*

Remarque. — Si m et m' sont réels, on peut leur faire jouer un rôle analogue à celui de m'' dans l'équation (M). On peut aussi alors passer à la forme entièrement décomposée. Cette remarque ne regarde que les courbes (1).

Théorème I *bis.* — *Toute courbe (2) ou (4) peut toujours se mettre sous la forme mi-décomposée:*

$$1 = \frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{l}{y - mx - n} \quad (M_1)$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on prenne pour origine l'un quelconque de ses points, sauf celui où l'asymptote de direction m″ *coupe la courbe, ceux où la tangente est parallèle à* m″, *et les points de contact des tangentes issues des points où la tangente est parallèle à* m.

Que cela soit nécessaire, c'est évident d'après l'équation (M_1).

Pour démontrer que cela suffit, prenons une courbe (2) et essayons de l'identifier avec (M_1). Nous trouverons facilement que l'identification est possible, en général, et qu'il n'y a qu'à prendre

$$a = -\frac{AE(p - m'')}{Dm' + E} \quad b = -\frac{AD(p - m')}{Dm' + E} \quad n = \frac{Dm' + E}{A(p - m')}$$

$$l = \frac{A^2D(p - m')^2 + A^2(p - m'')(Dm' + E) - (Dm'' + E)^2}{A(p - m')(Dm'' + E)}$$

avec la seule condition $F = 0$.

L'identification n'est donc impossible que si, supposant $F = 0$, l'on a :

1° $A = 0$, ou $p - m'' = 0$, c.-à-d. si l'origine est le point où l'asymptote de direction m'' coupe la courbe.

2° $Dm' + E = 0$, c.-à-d. si l'origine est un des points où la tangente est parallèle à m'.

3° $A^2D(p - m')^2 + A^2(p - m'')(Dm' + E) - (Dm'' + E)^2 = 0$, c.-à-d. si l'origine est le point de contact d'une tangente issue de l'un des points où la tangente est parallèle à m. Pour interpréter en effet cette relation, il suffit de prendre pour axe des y la tangente à l'origine, et pour axe des x une parallèle à la direction m'.

Remarque. — Aucune courbe (2) ne peut se mettre sous la forme (M), ni aucune courbe (3) sous la forme (M_1). C'est une conséquence du théorème bien connu de la divisibilité, en vertu duquel si un facteur divise une partie d'une somme, etc.

Des formes (M) et (M_1) on peut déduire deux méthodes de construction pour les courbes qui nous occupent.

La 1[re] méthode repose sur le problème suivant :

Problème. — *Construire les deux points d'intersection d'une courbe à point singulier, ayant au moins une asymptote à distance finie, par une droite parallèle à cette asymptote.*

Soit (C) la conique directrice, DD l'asymptote directrice, SS la sécante. Coupons la conique par une droite auxiliaire AA parallèle à cette asymptote, et dont la distance au point singulier origine O soit égale à la distance de l'asymptote directrice et de la sécante. Nous aurons ainsi deux points M_1 et M_1' (réels et distincts, réels ou confondus, ou imaginaires). Menant alors les rayons OM_1 et OM_1' et les prolongeant jusqu'à leur rencontre avec SS, nous obtiendrons en M_1 M_1' les points cherchés.

Cela posé :

Théorème II. — *Toute courbe* (M) *ou* (M_1) *peut se construire à l'aide d'une conique fixe et d'une droite qui se meut parallèlement à elle-même.*

En effet, toute courbe

$$1 = \frac{ax + by}{(y - m'x)(y - mx)} + \frac{l}{y - m'x - n}$$

peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des deux séries de courbes suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & 1 = \frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{\dfrac{l(n + \lambda)}{\lambda}}{y - m''x} && (\sigma) \\ & y - m''x = n + \lambda && (\sigma_1) \end{aligned} \right.$$

Or les courbes (σ) sont des courbes à point singulier, ayant même conique directrice et pour droite directrice des droites parallèles. D'autre part, les droites (σ_1) sont parallèles aux droites directrices des courbes (σ). La construction des courbes (M) et (M_1) revient donc à l'application répétée du problème précédent.

Remarque I. — Cette construction est une construction directe; car elle revient à se donner l'abscisse et à cons-

truire l'ordonnée dans le système d'axes où l'axe des y serait parallèle à m', et où l'axe des x serait d'ailleurs l'axe actuel.

Remarque II. — Il paraît naturel d'appeler encore ici *conique directrice* de la courbe (M) ou (M_1) la conique directrice commune aux courbes (σ) et *droite asymptotique directrice* la droite $y - m''x = l + n$.

Théorème II *bis.* — *Même théorème pour les courbes* (E_1) *et* (E_2).

En effet, les courbes (E_1) peuvent être considérées comme définies par

$$\left\{\begin{aligned} 1 &= \frac{Dy + Ex}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{\lambda(A + 1 - \lambda)}{y - m''x} \\ y - m''x &= \lambda \end{aligned}\right.$$

et les courbes (E_2) par

$$\left\{\begin{aligned} 1 &= \frac{Dy + Ex}{(y - mx)(y - m''x} + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{y - m'x} \\ y - m'x &= 1 - \lambda. \end{aligned}\right.$$

Théorème III. — *La tangente en un point quelconque* M_0 *d'une courbe plane, du 3e degré, définie comme lieu d'intersection des deux séries de courbes*

$$(C) \quad \left\{\begin{aligned} 1 &= \frac{S}{P.Q} + \frac{\varphi(\lambda)}{R} \\ \lambda &= \psi(R) \end{aligned}\right.$$

(où P, Q, R, S, *sont des polynômes linéaires homogènes en* x *et* y), *passe par le point d'intersection de deux droites que l'on peut construire.*

En effet, la tangente en un point M_0 de cette courbe a pour équation

$$(E) \frac{S_0(P_0Q + Q_0P) - S.P_0Q_0}{P_0^2.Q_0^2} + R\left\{\frac{f(R_0) - R_0f'(R_0)}{R_0^2}\right\}$$
$$= 1 - f'(R_0)$$

en posant $$\varphi\{\psi(R)\} = f(R).$$

D'autre part, l'équation de la tangente au point M_0 à la

courbe pourvue de point singulier.

$$(C_1) \qquad 1 = \frac{S}{PQ} + \frac{\varphi(\lambda)}{R}$$

est $$(E_1) \qquad \frac{S_0(P_0Q + Q_0P) - S.P_0.Q_0}{P_0^2.Q_0^2} + \frac{R}{R_0^2} f(R_0) = 1.$$

Si nous coupons (E) par la droite

$$(\alpha) \qquad R = \frac{R_0^2 \{1 - f'(R_0)\}}{f(R_0) - R_0 . f'(R_0)}$$

le point d'intersection sera sur

$$(\beta) \qquad S_0(P_0Q + Q_0P) - S.P_0Q_0 = 0.$$

Or cette droite (β) passe d'une part par l'origine, et d'autre part au point d'intersection de (E_1) et de

$$(\gamma) \qquad R = \frac{R_0^2}{f(R_0)}.$$

Remarque. — Les droites (α), (γ) seraient difficiles à construire, si $f(R)$ était compliqué; mais, d'après ce qui précède, pour les courbes qui nous occupent, $f(R)$ est de l'une des formes simples suivantes

$$\frac{lR}{R - n}, \quad R(1 - R), \quad R(A + 1 - R).$$

(*A suivre.*)

VARIÉTÉS

ESSAIS POUR LES CONIQUES DE PASCAL

AVEC

Des notes par M. **Ch. Laurens**, professeur honoraire.

(*Suite*, voir page 133.)

§ 3. — « Quoi faisant, nous énonçons les propriétés que nous en touchons d'une manière plus universelle qu'à l'ordinaire, par exemple celle-ci : si dans le plan MSQ (*fig. 6*) dans la section de cône PKV sont menées les droites AK, AV atteignantes la section aux points P, K, Q, V, et que

de deux de ces quatre points qui ne sont pas en ligne droite avec le point A, comme par les points K, V et par deux points N, O pris dans le bord de la section soient menées quatre droites KN, KO, VN, VO coupantes les droites AV, AP aux points L, M, T, S. Je dis que la raison composée

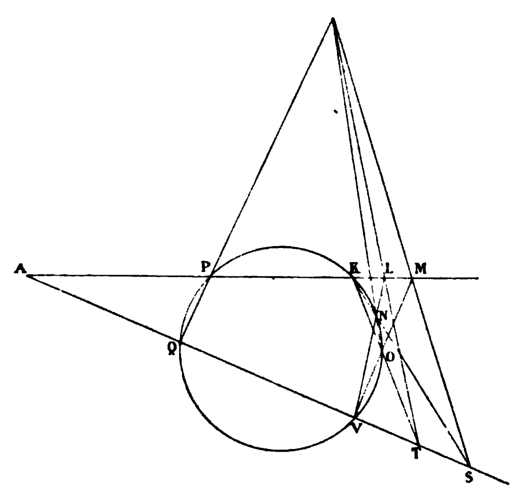


Fig. 6.

des raisons de la droite PM à la droite MA, et de la droite AS à la droite SQ est la même que la raison composée de la droite PL à la droite LA et de la droite AT à la droite TQ. »

Note 3. — On peut énoncer ainsi le théorème précédent: si l'on joint deux points quelconques V et K de la conique à quatre points Q, P, M, O de la courbe, ces droites rencontrent PK, QV suivant deux séries de quatre points A, P, L, M; A, Q, T, S; on propose de démontrer que

$$\frac{PM}{AM} \cdot \frac{AS}{QS} = \frac{PL}{AL} \cdot \frac{AT}{QT}.$$

L'hexagone de Pascal et le théorème sur les transversales fournissent une démonstration très simple de ce théorème.

Considérons l'hexagone inscrit KONVQPK dans la conique.

Les côtés opposés KO, VQ se rencontrent en T; VN et PK au point L; ON et PQ en R; les trois points T, L, R sont en ligne droite: donc QP, ON, TL se rencontrent en un point R situé sur MS d'après la note 1.

Le triangle APQ est coupé par les deux transversales MS, LT, par suite :

$$\frac{PM}{AM} \cdot \frac{QR}{PR} \cdot \frac{AS}{QS} = 1, \quad \frac{PL}{AL} \cdot \frac{QR}{PR} \cdot \frac{AT}{QT} = 1,$$

égalant les deux nombres et supprimant le facteur commun $\frac{QR}{PR}$, on obtient :

$$\frac{PM}{AM} \cdot \frac{AS}{QS} = \frac{PL}{AL} \cdot \frac{AT}{QT} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — On peut écrire la relation précédente sous la forme : $\frac{PM}{AM} \cdot \frac{LA}{LP} = \frac{QS}{AS} \cdot \frac{AT}{QT}$;

or $\frac{PM}{AM} \cdot \frac{PL}{AL} = \frac{PM}{AM} \cdot \frac{AL}{PL}$, relation entre les rapports des distances des points M et L aux points P et A, a été appelé par M. Chasles rapport anharmonique des quatre points M, L, P, A. De même $\frac{QS}{AS} \cdot \frac{AP}{QT}$ est le rapport anharmonique des quatre points A, Q, T, S. Le théorème énoncé par Pascal revient donc à celui-ci : les deux faisceaux de droites joignant V et K, deux points d'une conique à quatre points quelconques Q, P, N, O, déterminent sur PK et QV deux séries de quatre points ayant le même rapport anharmonique, c'est-à-dire étant homographiques. Cette propriété est précisément celle que M. Chasles a choisie comme base de sa théorie nouvelle des coniques, propriété plus féconde encore que celle de l'hexagramme mystique de Pascal.

§ 4. — « Nous démontrerons aussi que s'il y a trois droites DF, DG, DH que les droites AP, AK coupent aux points F, G, H; C, γ, B ; et que dans la droite DC, soit déterminé le point E; la raison composée des raisons du rectangle de EF et FG, au rectangle de EC et Cγ et de la droite Aγ à la droite AG, est la même que la composée des raisons du rectangle de EF et FH, au rectangle de EC et CB et de la droite AB à la droite

AH et elle est aussi la même que la raison du rectangle des droites FE, FD au rectangle des droites CE, CD. »

Note 4. — Soit (*fig. 7*) les côtés de l'angle A coupés par les trois droites DF, DG, DH; aux points F, G, H; C, γ, B;

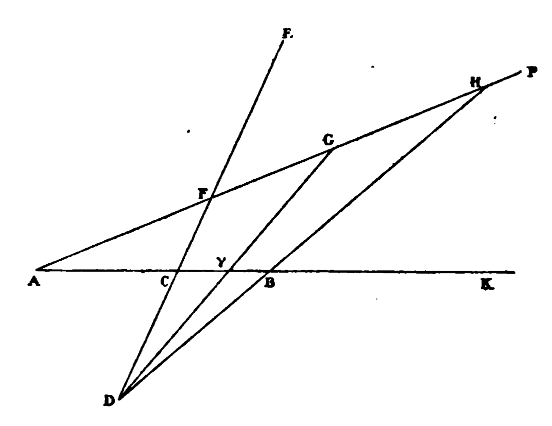


Fig. 7.

et un point arbitraire E pris sur l'une des droites DF, Pascal énonce la relation suivante :

$$\frac{EF \cdot FG}{EC \cdot C\gamma} \cdot \frac{A\gamma}{AG} = \frac{EF \cdot FH}{EC \cdot CB} \cdot \frac{AB}{AH} = \frac{EF \cdot FD}{EC \cdot CD};$$

le triangle AFC est coupé par les deux transversales DG, DH, on a donc :

$$\frac{FG}{AG} \cdot \frac{CD}{FD} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{FD}{CD} = \frac{FG}{AG} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma}$$

$$\frac{FH}{AH} \cdot \frac{CD}{FD} \cdot \frac{AB}{CB} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{FD}{CD} = \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AB}{CB}$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{FG}{AG} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma} = \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AB}{CB} = \frac{FD}{CD};$$

multipliant par $\frac{EF}{EC}$ on obtient :

$$\frac{EF}{EC} \cdot \frac{FG}{AG} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma} = \frac{EF}{EC} \cdot \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AB}{CB} = \frac{EF}{EC} \cdot \frac{FD}{CD}$$

qui devient en changeant l'ordre des facteurs la relation énoncée par Pascal.

Cette relation sert à Pascal à démontrer le théorème énoncé dans le § 5.

Remarque. — Si l'on considère l'égalité :

$$\frac{FG}{AG} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma} = \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AB}{CB}$$

on peut l'écrire : $\frac{FG}{AG} \cdot \frac{AH}{FH} = \frac{C\gamma}{A\gamma} \cdot \frac{AB}{CB}$,

qui exprime que le rapport anharmonique des quatre points A, F, G, H égale le rapport anharmonique des quatre points A, C, γ, B, ou que le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite n'est pas altéré par la projection centrale.

§ 5. — « Partant, si par les points E, D passe une section de cône qui coupe les droites AH, AB (*fig. 8*) aux points

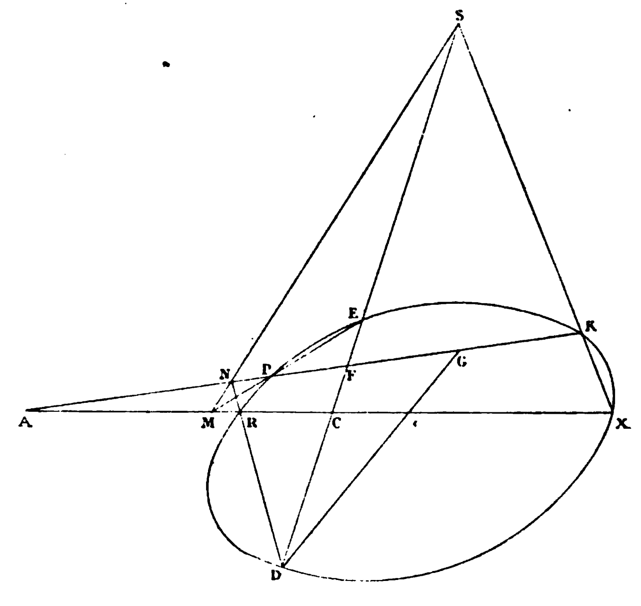


Fig. 8.

P, K, R, X, la raison composée des rectangles EF, FG au rectangle des droites EC, Cγ et de la droite γA à la droite

AG, sera la même que la composée des raisons du rectangle des droites FK, FP au rectangle des droites CR, CX et du rectangle des droites AR, AX au rectangle des droites AK, AP. »

Note 5. — Le théorème énoncé par Pascal peut se traduire ainsi. Par un point A on mène dans une conique (*fig. 8*) deux sécantes APK, ARX; par un point D de la courbe on mène deux cordes quelconques DF, DG, on a la relation :

$$\frac{EF}{EC} \cdot \frac{FG}{C\gamma} \cdot \frac{A\gamma}{AG} = \frac{FK.FP}{CR.CX} \cdot \frac{AR.AX}{AK.AP}.$$

Considérons l'hexagone EPKXRDE, d'après le théorème de Pascal, EP, XR, se rencontrant en M; PK, DR, en N; KX, DE, en S; les trois points M, N, S sont en ligne droite, c'est-à-dire que les droites MN, DE, KX concourent en un point S.

Cela posé, le triangle ACF est rencontré par les transversales EM, NP, KX, MN; on aura donc les relations

$$\frac{PF}{AP} \cdot \frac{CE}{FE} \cdot \frac{AM}{CM} = 1 \text{ d'où } \frac{PF}{AP} \cdot \frac{CE}{FE} = \frac{MC}{MA} \quad (1)$$

$$\frac{AR}{RC} \cdot \frac{DC}{FD} \cdot \frac{NF}{AN} = 1 \text{ d'où } \frac{AR}{RC} \cdot \frac{DC}{FD} = \frac{AN}{NF} \quad (2)$$

$$\frac{FK}{AK} \cdot \frac{AX}{CX} \cdot \frac{CS}{FS} = 1 \text{ d'où } \frac{FK}{AK} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{FS}{CS} \quad (3)$$

$$\frac{MC}{AM} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{FS}{CS} = 1 \quad (4)$$

multipliant les trois égalités (1) (2) (3) on a :

$$\frac{PF.CE}{AP.FE} \cdot \frac{AR.DC}{RC.FD} \cdot \frac{FK.AX}{AK.CX} = \frac{MC}{MA} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{FS}{CS};$$

mais en vertu de (4) le second nombre égale 1, donc :

$$\frac{PF.CE}{AP.FE} \cdot \frac{AR\ DC}{RC.FD} \cdot \frac{FK.AX}{AK.CX} = 1, \quad (5)$$

égalité que l'on peut écrire :

$$\frac{PF.FK}{CR.CX} \cdot \frac{AR.AX}{AP.AK} = \frac{FE.FD}{CE.CD}. \quad (6)$$

Mais, d'après la note 4, si par D on mène une sécante quelconque DγG on a la relation :

$$\frac{FE.FG.A\gamma}{CE.AG.C\gamma} = \frac{FE.FD}{CE.CD};$$

à cause de (6) on conclut la relation énoncée par Pascal :

$$\frac{FE.FG.A\gamma}{CE.AG.C\gamma} = \frac{DF.FK}{CR.CX}\cdot\frac{AR.AX}{AP.AK}.$$

La relation (5) qui s'écrit, en changeant l'ordre des facteurs,

$$\frac{AR.AX}{CR.CX}\cdot\frac{FP.FK}{AP.AK}\cdot\frac{CE.CD}{FE.FD} = 1,$$

est précisément le théorème de Carnot sur les relations entre les segments déterminés par une conique sur les trois côtés d'un triangle.

Ce théorème contient comme cas particulier la relation cartésienne qui lie les différents points d'une conique (*fig. 9*).

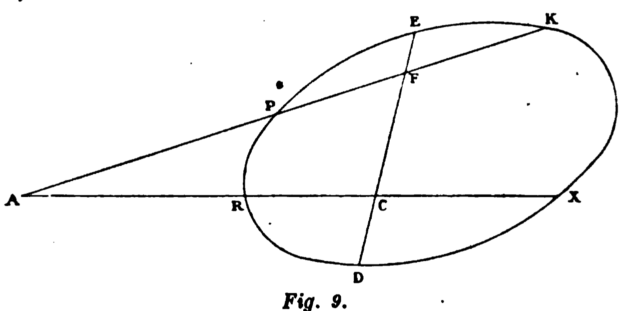


Fig. 9.

Supposons que le point A s'éloigne indéfiniment

$$\frac{AR}{AP} = 1 \quad \frac{AX}{AK} = 1,$$

donc
$$\frac{PF.FK}{CR.CX}\cdot\frac{CE.CD}{FE.FD} = 1,$$

alors PK et RX sont parallèles. Prenons pour ED le diamètre qui divise les cordes PK, RX en deux parties égales, alors PF = FK, CR = CX; la relation se réduit à

$$\frac{PF^2}{CR^2}\cdot\frac{CE.CD}{FE.FD} = 1$$

ou
$$\frac{PF^2}{FE.FD} = \frac{CR^2}{CE.CD}$$

qui exprime que le carré d'une demi-corde est au produit des deux segments du diamètre correspondant dans un rapport constant, le diamètre restant fixe.

Si le point D s'éloigne indéfiniment, le rapport $\frac{FD}{CD}$ tend vers l'unité; donc dans une parabole on a pour un diamètre quelconque
$$\frac{PF^2}{EF} = \frac{RC^2}{EC} = \text{const.}$$

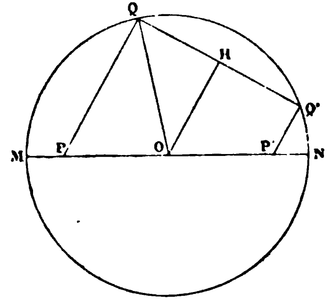
(A suivre.)

QUESTION 162.

Solution, par M. Jolly, élève du Collège de Vassy.

Étant donnés deux points P *et* P′ *à l'intérieur d'un cercle, sur un même diamètre et à égale distance du centre, on propose de mener deux parallèles* PQ, P′Q′ *terminées à la circonférence et telles que le trapèze* PQP′Q′ *soit maximum.*

Les angles en Q et Q′ étant droits, la surface PQP′Q′ a pour expression



$$S = \frac{PQ + P'Q'}{2} QQ'$$

ou
$$S = \frac{B + b}{2} h$$

en posant $PQ = B$, $P'Q' = b$, $QQ' = h$. Par O menons OH parallèle à PQ. On a $OH = x = \frac{B + b}{2}$.

Dès lors (1) $S = x.h$; expression dont il s'agit de trouver le maximum. Joignons OQ; on a dans le triangle rectangle OQH, $x^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = \frac{4R^2 - h^2}{4}$.

Élevons (1) au carré, remplaçant x^2 par sa valeur on a, toutes réductions faites,
$$h^4 - 4R^2h^2 + 4S^2 = o,$$
d'où
$$h = \pm\sqrt{2R^2 \pm \sqrt{4R^4 - 4S^2}};$$
pour que h soit réel, il faut que
$$4R^4 - 4S^2 \geq o,$$
d'où
$$S \leq R^2.$$

Le minimum de S a donc lieu pour $S = R^2$.

Dès lors $$h = R\sqrt{2};$$
h est donc la diagonale d'un carré qui a R pour côté.

Si $PP' > h$, il y aura un second trapèze symétrique du premier par rapport à MN.

Si $PP' = h$, PQ et P'Q' sont perpendiculaires à MN; il y a encore deux solutions.

Enfin si $PP' < h$, il n'y a plus de solution et le problème est impossible.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gelinet, d'Orléans ; Elie, Collège Stanislas ; Combebiac, à Montauban ; Objois, à Moulins ; Detraz, à Bourg ; Hugot, à Lyon ; Pecquery, au Havre ; Vermond, Schlesser, Corbeau, à Saint-Quentin ; Lannes, à Tarbes ; Dupuy, à Grenoble ; Montéron, à Pau.

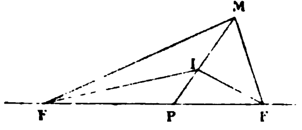
QUESTION 166.

Solution par M. Hugot, élève du Lycée de Lyon.

On donne une ellipse dans laquelle la longueur du petit axe est moyenne proportionnelle entre celle du grand axe et la distance focale.

Le centre du cercle inscrit au triangle formé par les deux foyers et un point quelconque de l'ellipse partage la normale en ce point en moyenne et extrême raison. (Launoy.)

Soient F, F' les foyers de l'ellipse donnée; M un point de la courbe, MP la normale en ce point, I le centre du cercle inscrit au triangle MFF'. Dans le triangle PFM, on a



$$\frac{PF}{FM} = \frac{IP}{IM}$$

et dans PF'M, $$\frac{IP}{IM} = \frac{PF'}{F'M};$$

donc $$\frac{IP}{IM} = \frac{PF + PF'}{MF + MF'} = \frac{c}{a},$$

d'où $$\frac{IM}{IP + IM} = \frac{IM}{MP} = \frac{a}{a + c};$$

or $b^2 = ac$ ou $(a+c)(a-c) = ac$,

d'où
$$\frac{a}{a+c} = \frac{a-c}{c} = \frac{c}{a};$$

donc
$$\frac{\mathrm{IP}}{\mathrm{IM}} = \frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{MP}}$$

et par suite
$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = \mathrm{IP}\,.\,\mathrm{MP}$$

et la droite MP est partagée en I en moyenne et extrême raison.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Longueville, de Charleville; Corbeau, Vermand, Schlesser, de Saint-Quentin; Deslais, au Mans.

QUESTION 167.

Solution par M. DESLAIS, élève du Lycée du Mans.

Construire un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent et le rapport de la surface de ce triangle à celle du triangle formé par les deux bissectrices de l'angle donné et le côté opposé. Examiner le cas où ce rapport est égal à 2. (Launoy.)

Soit ABC le triangle demandé; $AB = x$, $CB = y$, $AC = a$. Soient l et l' les bissectrices AE, AE′ de l'angle donné BAC:

on a
$$l = \frac{2a}{a+x}\sqrt{apx(p-y)}$$
$$l' = \frac{2}{a-x}\sqrt{ax(p-a)(p-x)}$$

par suite
$$\frac{ll'}{2} = \frac{2}{a^2-x^2}\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}.$$

Désignons par $\frac{m}{n}$ le rapport de la surface du triangle cherché à celle du triangle formé par les bissectrices; on aura, après réductions,
$$\frac{a^2-x^2}{2ax} = \frac{m}{n}$$

ou
$$nx^2 + 2amx - a^2n = 0,$$

d'où
$$x = \frac{-am \pm a\sqrt{m^2+n^2}}{n}.$$

Si l'on désigne par h l'hypoténuse du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont m et n, on a

$$x = \frac{-am \pm ah}{n}.$$

x est évidemment positif, donc on doit avoir $ah > am$. La valeur de x sera donc

$$x = \frac{a(h-m)}{n}.$$

Cette expression se construit facilement; c'est une quatrième proportionnelle à $h - m$, a et n.

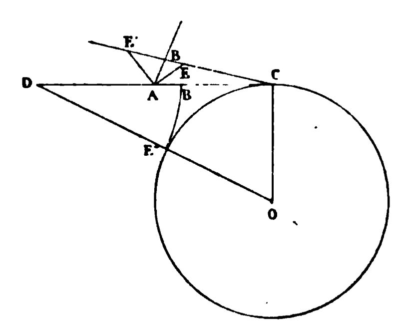
Connaissant dès lors les deux côtés AB et AC et l'angle qu'ils forment, le triangle est déterminé.

Considérons maintenant le cas où $\frac{m}{n} = 2$.

Dans ce cas $x = a\sqrt{5} - 2a$ ou $a(\sqrt{5} - 1) - a$.

Il est facile d'obtenir cette droite.

En effet, soit AC le côté donné. En A menons AB faisant avec AC un angle égal à l'angle donné. Puis prolongeons AC d'une longueur AD = AC.



En C menons CO perpendiculaire sur AC et égale à a. Décrivons du point O comme centre avec CO pour rayon une circonférence et joignons DO. Cette droite coupe la circonférence en E". Décrivons avec DE" un arc de cercle qui coupe AC en B'. AB' est la longueur cherchée. Il ne reste plus qu'à la porter sur AB et le triangle est déterminé.

NOTA. — M. Longueville, du Collège de Charleville, a résolu la même question.

QUESTION 210.

Solution par M. Lestoquoy, du Lycée de Saint-Quentin.

La valeur de la série

$$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\ldots$$

est un *si le produit*

$$(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)$$

est infini; ce qui a lieu si la série à termes positifs

$$a_1+a_2+a_3+\ldots$$

est divergente.

La série précédente est convergente si le produit tend vers une limite déterminée; elle est divergente si le produit est nul ou indéterminé. (Laurent.)

Considérons les n premiers termes de la série et cherchons à en faire la somme

$$S_n=\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\frac{a_n}{(a_1+1)\ldots(a_n+1)}$$

Remarquons que l'on a :

$$\frac{a_1}{a_1+1}=1-\frac{1}{a_1+1}$$

$$\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}=\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)}$$

$$\frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}$$

$$=\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}$$

. . . . . . , ...

$$\frac{a_n}{(a_1+1)\ldots(a_{n-1}+1)(a_n+1)}$$

$$=\frac{1}{(a_1+1)\ldots(a_{n-1}+1)}-\frac{1}{(a_1+1)\ldots(a_n+1)}$$

Ajoutons membre à membre, il vient

$$S_n=1-\frac{1}{(a_1+1)\ldots(a_n+1)}$$

Si l'on fait croître n indéfiniment et que le produit

(2) $$(a_1 + 1)\ldots(a_n + 1)$$

tende vers l'infini, le second terme de S_n tendra vers 0 et on aura $$\text{Lim. } S_n = 1.$$

Soit maintenant la série à termes positifs

(3) $$a_1 + a_2 + \ldots$$

Supposer cette série divergente, c'est dire que la somme des p premiers termes croît indéfiniment quand p tend vers l'infini; or le produit des p premiers termes du produit se compose de la somme des p premiers termes de la série (3) plus d'autres termes positifs; donc si la série (3) est divergente, il en est de même du produit.

Soit $$P_n = (a_1 + 1) \ldots (a_n + 1),$$

on a alors $$S_n = 1 - \frac{1}{P_n}.$$

Si P_n tend vers une limite P, on a

$$\text{Lim. } S_n = 1 - \frac{1}{P},$$

donc cette limite existe, c'est-à-dire que la série (1) est convergente.

Si P_n tend vers o, S_n tend vers $-\infty$; donc la série (1) est divergente.

Si P_n est indéterminé, S_n est indéterminée, et par suite n'a pas de limite; donc la série (1) est divergente.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. P. Fabry, élève de mathématiques spéciales au Collège Chaptal (classe de M. Hauser); L. Legay, élève du Lycée Saint-Louis; G. Papelier, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Reims.

QUESTION 211.

Solution par M. Coignard, élève au Lycée Saint-Louis.

Je me permettrai de faire remarquer que l'énoncé de la question n'est pas complètement exact si K est quelconque: il y a lieu de le modifier de la manière suivante:

L'équation $Kx^m + \dfrac{x^{m-1}}{1} + \dfrac{x^{m-2}}{2} + \ldots + \dfrac{x^{m-p}}{p}$

$+ \ldots + \frac{1}{m} = 0$ *a une seule racine réelle pour* m *impair.*
Si m *est pair, elle a deux racines réelles au plus.*

Trouver la condition pour que ces deux racines existent.

Posons $$x = \frac{1}{y}.$$

L'équation $$K + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \ldots + \frac{y^m}{m} = 0 \qquad (1)$$
admet évidemment le même nombre de solutions réelles que l'équation proposée, c'est donc cette équation plus commode que nous allons étudier.

Egalons à o la dérivée du premier membre de (1).

(2) $$1 + y + y^2 + \ldots + y^{m-1} = 0$$

1° m est pair. — (2) n'a qu'une racine réelle, — 1, car,
$$(1 + y + y^2 + \ldots + y^{m-1})(y - 1) = y^m - 1.$$

Or quand m est pair, $y^m - 1 = 0$ admet les racines $+1$ et -1, mais en multipliant par $y - 1$ on a introduit la solution $y = +1$, donc (2) n'admet que $y = -1$.

Les résultats des substitutions de $-\infty, -1, +\infty$ dans (1) sont: $-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$

$$+ \quad R - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} \quad +$$

Suivant que le résultat de la substitution de -1 sera positif ou négatif, l'équation (1) et par conséquent l'équation proposée admettra o ou deux racines réelles; si $K - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} = 0$, -1 est racine de la dérivée et appartient comme racine double à l'équation proposée.

2° Si m est impair, on voit que $-\infty$ et $+\infty$ donnent des résultats de substitution de signes contraires, l'équation a donc toujours au moins une racine réelle; du reste, elle n'en a qu'une, car l'équation dérivée (2) n'admet pas de racines réelles.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. G. Papelier, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Reims; Maurice, élève de spéciales au Lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas); L. Legay, élève de spéciales au Lycée Saint-Louis; P. Fabry, élève de spéciales au Collège Chaptal (classe de M. Hauser).

QUESTION 214.

Solution, par M. Maurice d'OCAGNE, élève au Lycée Fontanes.

Faire voir à l'aide de la seule théorie des logarithmes que si l'on trace les courbes représentées par les équations $y = a^x$ *et* $y = b^x$, *l'une d'elles deviendra la projection de l'autre si on fait tourner son plan d'un angle convenable autour de l'axe des* y. *Exprimer cet angle en fonction du module relatif des deux systèmes de logarithmes correspondants.* (Picquet.)

Ces deux courbes se coupent en un même point de l'axe des y; de plus, si on les coupe par une parallèle à l'axe des x, à une distance h de cet axe, qui les rencontre aux points A et B et qui coupe l'axe des y au point P, on a

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\log_a h}{\log_b h} = \log_a b.$$

Supposons, pour fixer les idées $a > b$; alors $\log_a b < 1$, et si on fait tourner le plan de la courbe (b) de l'angle ω tel que $\cos \omega = \log_a b$, la courbe (a) sera la projection orthogonale de (b) dans sa nouvelle position.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

238. — Construire un triangle connaissant un angle, le cercle circonscrit et le point de concours des hauteurs.

239. — Résoudre un quadrilatère inscriptible connaissant les diagonales et les côtés opposés.

240. — On donne les côtés égaux c, et l'une des bases a d'un trapèze isoscèle ; que doit être la seconde base pour que le volume engendré par la révolution de la figure autour de la première base soit maximum?

241. — Trouver le lieu des points M tels que les tangentes menées de ce point à deux cercles fixes soient dans un rapport donné.

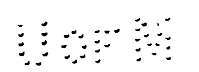
242. — On donne un triangle ABC; une droite BL pivote autour du sommet B. On abaisse des perpendiculaires AE, CD des deux autres sommets sur cette droite; on joint le point E au milieu K de AB, et le point D au milieu I de BC. Trouver le lieu du point M de rencontre des deux droites KE et DI.

Mathématiques spéciales.

243. — On donne une parabole $y^2 = 2px$, rapportée aux axes ordinaires; autour de l'origine on fait tourner deux droites rectangulaires, rencontrant la parabole aux points A et B, et l'on construit une hyperbole H ayant pour asymptotes OA et OB, et passant par un point fixe K situé sur la bissectrice des axes. Trouver : 1° le lieu du pôle de AB par rapport à H; 2° le lieu Σ des points de rencontre de AB avec H. On cherchera les points de Σ qui se trouvent sur les droites $x = 2p$ et $y = x$. On discutera les différentes formes de la courbe suivant la position du point K sur la droite $y = x$. *(de Longchamps.)*

244. — Étant donnée une conique qui passe à l'origine des axes, supposés rectangulaires, on considère les cordes de cette conique qui sont vues de l'origine sous un angle droit; par les extrémités de chacune de ces cordes et par l'origine on fait passer un cercle; on demande le lieu des centres de tous ces cercles.

245. — Étant données deux courbes S et S par leurs équations dans un même système de coordonnées polaires, on suppose que l'on sache construire les tangentes à ces courbes en deux points M et M_1 situés sur un même rayon vecteur; on demande d'en déduire la tangente au point M_2 situé sur le même rayon vecteur dans la courbe S_2 qui est le lieu des milieux des distances telles que MM_1 dans les deux courbes proposées.



246. — Étant données deux coniques $C = o$ et $C' = o$, trouver le lieu des points M tels que leurs polaires par rapport à ces deux coniques se coupent sur une troisième courbe donnée $f(x, y) = o$. Étudier la question en particulier : 1° quand $f(x, y) = o$ est une droite ; 2° quand $f(x, y) = o$ est un cercle.

247. — Étant donnée l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2(x \cos \lambda + y \sin \lambda - p)^2,$$

on demande de calculer en fonction des coefficients de cette équation : 1° les carrés des demi-axes de la courbe qu'elle représente, en distinguant dans les formules le grand axe et le petit axe lorsqu'il s'agit d'une ellipse ; 2° les carrés a^2 et $-b^2$ du demi-axe transverse et du demi-axe imaginaire lorsqu'il s'agit d'une hyperbole. — En conclure le lieu des sommets des ellipses qui ont un foyer, un point et la longueur du petit axe communs, en distinguant les sommets des grands axes de ceux des petits axes, et résoudre le même problème dans le cas de l'hyperbole.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 6924-0.



DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE

ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 145 et suiv.)

3° *Normales rectangulaires.*

XXIX. **Théorème.** — *2α et $2\alpha'$ étant les angles des rayons vecteurs de deux points dont les normales sont rectangulaires, on a*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' = \frac{a^2+b^2}{a^2}.$$

Pour le démontrer, il suffit de se reporter au théorème XV; on y trouvera pour les distances OQ et OQ′ du centre à deux tangentes rectangulaires les expressions équivalentes

$$\text{pour OQ} \qquad a\cos\alpha = a\sqrt{1-\frac{c^2\cos^2\beta}{a^2}};$$

$$\text{pour OQ}' \qquad a\cos\alpha' = a\sqrt{1-\frac{c^2\sin^2\beta}{a^2}},$$

et en additionnant membre à membre, après avoir élevé au carré, il vient $a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha') = a^2 + b^2$;
d'où l'expression de l'énoncé.

On peut en déduire facilement

$$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha' = \frac{c^2}{a^2}.$$

XXX. **Théorème.** — NN′ *étant les longueurs des normales limitées au grand axe,* R *et* R′ *celles des rayons des cercles osculateurs en deux points dont les normales sont rectangulaires,*

on a

$$1^\circ \quad \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N'^2} = \frac{a^2+b^2}{b^4};$$

$$2^\circ \quad \frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^2+b^2}{(ab)^{\frac{4}{3}}}.$$

1° On a obtenu (XX) la relation

$$N = \frac{b^2}{a \cos \alpha};$$

d'où $$\cos \alpha = \frac{b^2}{aN}.$$

On aurait de même pour un point défini par l'angle $2\alpha'$

$$\cos \alpha' = \frac{b^2}{aN'}$$

et par substitution dans la relation du théorème précédent, il vient $$\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N'^2}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2};$$

d'où $$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N'^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^4}.$$

2° De l'expression obtenue (XXVII)

$$R = \frac{b^2}{a \cos^3 \alpha}$$

on tire $$\cos \alpha = \left(\frac{b^2}{aR}\right)^{\frac{1}{3}};$$

de même $$\cos \alpha' = \left(\frac{b^2}{aR'}\right)^{\frac{1}{3}},$$

et par une substitution analogue à la précédente, on a

$$\left(\frac{b^2}{aR}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b^2}{aR'}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

et en divisant les deux membres de cette égalité par $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ on arrive à la relation cherchée

$$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^2 + b^2}{(ab)^{\frac{4}{3}}}.$$

XXXI. **Théorème.** — *La somme des carrés des inverses des diamètres conjugués de ceux de deux points dont les normales sont rectangulaires, est constante.*

b' étant le demi-diamètre conjugué de celui du point défini par l'angle 2α, on sait (VII, *remarque*) que

$$\cos \alpha = \frac{b}{b'};$$

b'_1 étant celui qui correspond à l'angle $2\alpha'$, on a également

$$\cos\alpha' = \frac{b}{b'_1},$$

d'où l'on déduit, en vertu de la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' = \frac{a^2 + b^2}{a^2},$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{b'^2_1} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}.$$

II

HYPERBOLE

1° *Propriétés des tangentes.*

XXXII. — Dans l'hyperbole un seul axe rencontre la courbe, et sa longueur a est définie par la relation

$$MF' - MF = \frac{2dmn}{n^2 - m^2} = 2a.$$

Pour définir complètement la courbe, on pose

$$\frac{d^2n^2}{n^2 - m^2} = b^2$$

et ici b^2 a un signe contraire à celui de b^2 qui a défini la longueur du petit axe de l'ellipse. Si dans l'hyperbole on porte sur l'axe qui ne coupe pas la courbe, et que pour cela on appelle axe *non transverse*, une longueur égale à b défini comme on vient de le faire et de part et d'autre du centre, les deux points que l'on obtiendra seront considérés comme les extrémites de l'axe non transverse de l'hyperbole.

Cela étant, on déduit, comme on l'a fait pour l'ellipse,

$$OF = \sqrt{a^2 + b^2} = c, \qquad \frac{m}{n} = \frac{a}{c}.$$

Si l'on désigne par 2α l'angle des rayons vecteurs d'un point M (*fig. 14*), on voit, d'après la figure, que l'angle FPD est précisément égal à α, et que par suite

$$MH = PD = \frac{b^2}{c}\cot g\,\alpha:$$

car

$$FD = d = \frac{b^2}{c}.$$

Par un calcul analogue à celui qui a été fait pour l'ellipse, on trouverait $MF \times MF' = \frac{b^2}{\sin^2 \alpha}$

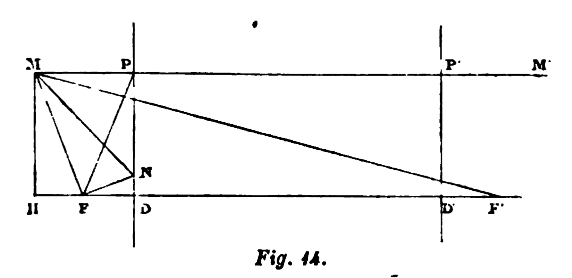


Fig. 14.

Il est alors facile de voir que toutes les relations établies pour l'ellipse s'appliqueront à l'hyperbole après qu'on y aura changé b^2 en $-b^2$ et α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$. On va les passer rapidement en revue et montrer comment certaines d'entre elles doivent s'interpréter.

Les propriétés qui forment les théorèmes VI, VII, VIII, X appartiennent à l'hyperbole; toutefois, dans l'énoncé du premier théorème d'Apollonius, on devra remplacer le mot « somme » par « différence ». Le théorème IX n'existe pas pour l'hyperbole.

La relation qui donne le théorème XI devient

$$\overline{OT}^2 - c^2 = - \frac{b^2}{\sin^2 \beta}$$

que l'on écrit $$C^2 - \overline{OT}^2 = \frac{b^2}{\sin^2 6}$$

et qui se traduit ainsi : *Le cercle décrit du centre avec* OT *pour rayon est tangent à la parallèle à la tangente* MT *menée par un foyer, au point où cette parallèle est coupée par la parallèle à l'axe transverse menée par l'une des extrémités de l'axe non transverse.*

Le théorème XII s'applique à l'hyperbole; le suivant conduit à la relation $a^2 \operatorname{tg}^2 6 - \overline{OT'}^2 = b^2$

et peut s'exprimer : *La puissance du point* T'_1 *par rapport au cercle de centre* O *et de rayon* OT' *est constante et égale à* b^2.

Le cercle du théorème XIII existe ; mais son rayon est $\sqrt{a^2 - b^2}$; le théorème XIV donne évidemment lieu à un minimum nul qui a lieu lorsque la tangente passe par le centre, et le théorème XV exprimé par la relation

$$\overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 = \frac{a^2}{\cos^2 6} - \frac{b^2}{\sin^2 6}$$

s'énonce ainsi : *Le carré construit sur une tangente est équivalent à la différence des carrés construits sur les parallèles à cette tangente menées par les extrémités des axes, ces trois droites étant limitées aux axes.*

2° Propriétés de la normale.

XXXIII. — La longueur de la normale a pour expression

$$N = \frac{b^2}{a \sin \alpha}$$

déduite de celle de l'ellipse en changeant α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

On peut l'obtenir également, en vertu de la relation (XVIII, *remarque*)

$$l' = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b - c}$$

dans laquelle (XXXII)

$$bc = MF \times MF' = \frac{b^2}{\sin^2 \alpha},$$

$$b - c = MF' - MF = 2a;$$

d'où

$$N = \frac{b^2}{a \sin \alpha}.$$

Comme pour l'ellipse, la projection de N sur les rayons vecteurs est $\frac{b^2}{a}$.

Toutes les propriétés de la normale à l'ellipse appartiennent à l'hyperbole.

Le théorème XXVI sera exprimé par la relation

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \frac{\alpha + \alpha}{2} = \frac{b^2}{dc}$$

déduite de celle qui est relative à l'ellipse en changeant α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, abstraction faite des signes de b^2.

Les diverses expressions du rayon du cercle osculateur en un point de l'hyperbole seront

$$R = \frac{b^2}{a \sin^3 \alpha} = \frac{N}{\sin^2 \alpha} = \frac{b'^3}{ab}.$$

La seconde seule $R = \dfrac{N}{\sin^2 \alpha}$

donne une construction simple de R par le moyen employé pour l'ellipse (XXVII).

De la première $R = \dfrac{b^2}{a \sin^3 \alpha}$

se déduit, pareillement à ce qui a été fait pour l'ellipse, la relation

$$\frac{1}{FM} - \frac{1}{F'M} = \frac{2}{R \sin \alpha};$$

mais cette relation ne conduit pas à la construction simple qui a été donnée pour le cas de l'ellipse.

3° *Normales rectangulaires.*

Pour l'hyperbole, la relation fondamentale est

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Elle conduit à des relations identiques à celles que l'on a trouvées pour l'ellipse.

III

ELLIPSE ET HYPERBOLE HOMOFOCALES

La propriété fondamentale d'une ellipse et d'une hyperbole homofocales consiste en ce que, aux points communs à ces deux courbes, la tangente à l'une et la normale à l'autre sont confondues.

XXXIV. **Théorème.** — *En un point quelconque du plan passent une ellipse et une hyperbole homofocales.*

Soient M (*fig. 15*) ce point, F et F' deux points quelconques choisis pour foyers d'une ellipse qui passe par le point M; ces trois points suffisent pour déterminer complètement l'ellipse.

MH étant perpendiculaire à FF' on a vu (V) que

$$MH = \frac{b^2}{c} \operatorname{tg} \alpha.$$

Si l'on considère une hyperbole ayant les foyers F et F' et passant par le point M, on devra avoir (XXXII) en désignant par b_1 la longueur de l'axe non transverse

$$MH = \frac{b_1^2}{c} \operatorname{cotg} \alpha;$$

ces deux valeurs de MH devant être les mêmes, il faudra que l'on ait $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{b_1^2}{b}$.

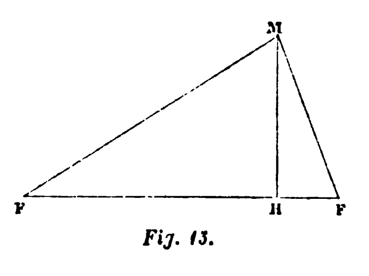


Fig. 13.

Le point M étant choisi ainsi que les foyers F et F' on pourra toujours trouver deux valeurs b et b_1 satisfaisant à la relation précédente; ces deux valeurs et la distance FF' $= 2c$ déterminent complètement l'ellipse et l'hyperbole.

Corollaire. — *Si l'on considère toutes les ellipses et les hyperboles ayant pour foyers deux points fixes et telles que le rapport* $\frac{b_1}{b}$ *soit constant pour ces courbes considérées deux à deux, le lieu de leurs points communs se compose de deux cercles passant par les foyers.*

En effet, de la relation qu'on vient d'établir, il résulte que dans cette hypothèse $\operatorname{tg}^2 \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha$ est constant et par suite l'angle 2α; donc les points communs se trouveront sur deux segments capables de l'angle 2α décrits sur FF' l'un au-dessus, l'autre au-dessous de cette droite.

XXXV. **Théorème.** — *On considère toutes les ellipses et les hyperboles qui ont pour foyers communs deux points donnés et pour lesquelles la différence* $a^2 - a_1^2$ *de leurs axes focaux est constante; le lieu de leurs points communs est une lemniscate.*

Soient ρ et ρ' les rayons vecteurs d'un point commun à deux des courbes considérées; on sait (XXXII) que

$$\rho\rho' = \frac{b_1^2}{\sin^2 \alpha},$$

b_1 désignant la moitié de la longueur de l'axe non transverse

de l'hyperbole, et si b est le demi-petit axe de l'ellipse qui passe au point défini par les vecteurs ρ et ρ', on a (XXXIV)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1}{b};$$

d'où l'on tire
$$\frac{\sin \alpha}{b_1} = \frac{\cos \alpha}{b} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + b_1^2}}$$

et par suite
$$\sin^2 \alpha = \frac{b_1^2}{b^2 + b_1^2};$$

substituant cette valeur de $\sin^2 \alpha$ dans la valeur du produit $\rho\rho'$, on a
$$\rho\rho' = b^2 + b_1^2.$$

Les deux courbes considérées étant homofocales, on a
$$a^2 - b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$
d'où
$$a^2 - a_1^2 = b^2 + b_1^2,$$
et partant
$$\rho\rho' = a^2 - a_1^2.$$

D'après l'énoncé, le produit $\rho\rho'$ est constant, et comme *la lemniscate est le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes est constant*, le lieu cherché est donc une lemniscate.

XXXVI. **Théorème.** — *Un cercle passant par les deux foyers d'une ellipse rencontre cette ellipse en quatre points symétriques deux à deux par rapport au petit axe; on considère les deux hyperboles homofocales de l'ellipse et passant, l'une par deux des points d'intersection, et l'autre par les deux autres, les deux derniers n'étant pas les symétriques des deux premiers; soient* B_1 *et* B_2 *les extrémités des axes non transverses de ces hyperboles, situées du même côté du centre; la puissance de ce centre par rapport au cercle décrit sur* B_1B_2 *comme diamètre est constante, quel que soit le rayon du cercle d'intersection.*

Soient M et M′ deux points d'intersection non symétriques, 2α et $2\alpha'$ les angles de leurs rayons vecteurs, on sait (XXXIII) que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1}{b}$ $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{b'_1}{b}$,

b, b_1, b'_1 ayant les significations connues.

Or les angles 2α et $2\alpha'$ sont supplémentaires, donc

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

par suite $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha'$;

d'où $\frac{b'}{b} = \frac{b}{b_1'}$;

et $b^2 = b_1 b'_1$,

relation qui exprime le théorème énoncé.

(*A suivre.*)

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

Il est souvent utile, de connaître des relations entre certains éléments d'un triangle rectiligne, ou bien encore, à l'inspection d'une formule donnée, de pouvoir énoncer *à priori* les particularités que présente ce triangle. Déjà, dans son ouvrage intitulé : *Questions de trigonométrie*, M. Desboves a établi un certain nombre de relations, et a proposé d'en démontrer quelques autres. — Un second ouvrage du même auteur a de plus présenté les solutions de ces dernières. — Nous allons ici donner des formules extraites de l'ouvrage allemand intitulé : *Recueil de problèmes de trigonométrie et stéréométrie,* par Reidt, et nous indiquerons rapidement la solution de ces questions. Nous nous proposons ensuite de faire connaître, en quelques mots, la manière de résoudre un certain nombre de triangles, d'après des données élémentaires. Nous engagerons nos lecteurs à faire ce que, dans son recueil d'énoncés, a fait l'auteur allemand auquel nous empruntons ces exercices. Chaque énoncé de triangle est suivi de données numériques, ce qui permet de compléter un problème d'algèbre par un calcul numérique. C'est, à notre avis, une excellente préparation aux examens.

A. M.

I

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTANGLE

1. *Si dans un triangle, on a la relation*

$$\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$$

le triangle est rectangle en C.

Car on a

$$\sin C = \sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

En remplaçant dans la relation donnée, on trouve, toute réduction faite, en mettant (sin A + sin B) en facteurs :

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1.$$

Donc les angles A et B sont complémentaires.

2. *Si l'on a à la fois*

$$1 + \operatorname{cotg} (45 - B) = \frac{2}{1 - \operatorname{cotg} A}, \quad et \quad 4S = c^2,$$

le triangle est rectangle et isoscèle.

Car si l'on exprime tout en fonction de la tangente seule, on a

$$1 + \operatorname{tg} (45 + B) = \frac{2 \operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A - 1}.$$

En développant tg (45 + B), et chassant les dénominateurs, on trouve

$$\operatorname{tg} A - 1 = \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B,$$

ce qui donne $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1$,
et les angles sont complémentaires;
en outre $c^2 = a^2 + b^2, \quad 4S = 2ab = c^2$
Donc $a^2 + b^2 = 2ab$, ou $a - b = 0$.

3. *Un triangle est rectangle si l'on a*

$$\sin A - \cos B = \cos C.$$

Car en remplaçant cos C par sa valeur $-\cos (A + B)$, et développant, il vient

$$\sin A (1 - \sin B) = \cos B (1 - \cos A).$$

Je multiplie par (1 + sin B) (1 + cos A), ce qui est permis, puisque aucun des facteurs n'est nul; je remplace les différences de carrés par leur valeur, et je trouve

$$\sin A (1 + \cos A) \cos^2 B = \cos B (1 + \sin B) \sin^2 A$$

ou enfin $(1 + \cos A) \cos B = (1 + \sin B) \sin A$;
en développant on trouve

$$\cos B - \sin A = \cos C;$$

comparant à la relation primitive, on en tire

$$\cos C = 0, \text{ ou } C = 90°.$$

4. *Si l'on a la relation*

$$\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A},$$

le triangle est rectangle.

Car, en développant, on trouve

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = 0$$

ou

$$\cos (A + B) = 0$$

Donc

$$A + B = 90°.$$

5. *Quand on a la relation*

$$\frac{\sin A}{\cos B} = \sin C + \cos C \operatorname{cotg} A,$$

le triangle est rectangle.

En effet, si l'on remplace $\cos B$ par $-\cos (A + C)$, on trouve après réduction

$$\sin^2 A = \sin^2 C \sin^2 A - \cos^2 C \cos^2 A$$
$$= 1 - \cos^2 A - \cos^2 C,$$

ou bien

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 - \cos^2 C = \sin^2 C.$$

Donc

$$\sin^2 C = 1.$$

6. *Si l'on a $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$, A et B étant différents, le triangle est rectangle.*

En effet on en tire

$$\sin A - \sin B = \cos B - \cos A$$

ou

$$2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} = 2 \sin \frac{A - B}{2} \sin \frac{A + B}{2}.$$

Donc

$$\sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{A + B}{2},$$

et par suite

$$\frac{A + B}{2} = 45°.$$

7. *Si l'on a la relation* $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B}{\cos A}$, *le triangle est rectangle ou isoscèle.*

Car on tire facilement

$$2 \sin A \cos A = 2 \sin B \cos B,$$

ou $$\sin 2A = \sin 2B,$$

ce qui donne $$2A = 2B, \quad \text{ou } 2A + 2B = 180^{\circ}.$$

8. Nous signalerons encore les formules suivantes, qui ont lieu lorsque le triangle est rectangle :

(α) $$\text{séc } 2A - \text{tg } 2A = \frac{b-a}{b+a}.$$

Car on a, puisque $\text{tg } A = \frac{a}{b}$:

$$\frac{b-a}{b+a} = \text{tg}\,(45 - A) = \frac{\sin(45 - A)}{\cos(45 - A)} = \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A - 2 \sin A \cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cos 2A} - \frac{\sin 2A}{\cos 2A},$$

(β) $$\text{coséc } A + \text{cotg } A = \frac{a}{c-b}.$$

En effet, on a

$$\text{coséc } A = \frac{c}{a}; \ \text{cotg } A = \frac{b}{a}.$$

Donc, en remplaçant, et chassant les dénominateurs, il vient $$c^2 - b^2 = a^2,$$
ce qui est évident, puisque le triangle est rectangle.

(γ) $\sin 2A = \frac{2ab}{c^2}$; car $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 . \frac{a}{c} . \frac{b}{c}$.

(δ) On a aussi $$\frac{a^2}{bc} = \text{séc } A - \cos A$$

car on a $\text{séc } A - \cos A = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} = \frac{\sin^2 A}{\cos A}$.

Or $\sin^2 A = \frac{a^2}{c^2}$; $\cos A = \frac{b}{c}$.

Donc, en remplaçant, on trouvera bien une identité.

Remarque. — Dans ce qui précède nous avons partout désigné l'angle droit par C, et par suite, l'hypoténuse par c, comme le fait Reidt dans son recueil de problèmes.

(A suivre.)

VARIATIONS DES FONCTIONS BICARRÉES

DÉDUITES DE CELLES DES FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Fajon**, professeur au Lycée de Cahors.

I. — Trinome carré $y = ax^4 + bx^2 + c$.

Détermination des maximum et minimum.

En posant $x^2 = z$, cette fonction devient

$$y = az^2 + bz + c.$$

Si x croît d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, z décroît d'une manière continue depuis $+\infty$ jusqu'à o et croît ensuite depuis o jusqu'à $+\infty$, la fonction y est continue et les valeurs qu'elle prend pendant que z va de $+\infty$ à o se reproduisent dans l'ordre inverse lorsque z croît de o à $+\infty$. Donc lorsque $z = 0$, y passe par un maximum ou un minimum égal à c, et en calculant l'accroissement d'y lorsque z croît de o à h, quantité positive aussi petite qu'on voudra, on voit facilement que c est minimum ou maximum selon que b est positif ou négatif.

Pour obtenir les autres maximum ou minimum dont le trinôme est susceptible, remarquons que si z parcourait l'échelle complète des grandeurs depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, y passerait par un maximum ou un minimum égal à $c - \frac{b^2}{4a}$ lorsque z serait égal à $-\frac{b}{2a}$.

Donc lorsque z ne parcourra que l'échelle des grandeurs positives, y passera par ce maximum ou minimum si $-\frac{b}{2a}$ est positif, c'est-à-dire, *si* a *et* b *ont des signes contraires.*

Mais si a et b ont le même signe, $-\frac{b}{2a}$ sera négatif, et z ne pouvant passer par cette valeur, y n'aura d'autre maximum ou minimum que c.

Lois des variations du trinôme bicarré.

Si a est positif, y partant de $+\infty$ marche vers un minimum ; si a est négatif, y partant de $-\infty$ passe d'abord par un maximum. On peut donc établir dans tous les cas la marche des variations du trinôme.

Soit, par exemple, $a < o$, $b > o$. La fonction y croît depuis $-\infty$ jusqu'à $c - \frac{b^2}{4a}$, décroît ensuite jusqu'à c pour croître de nouveau jusqu'à $c - \frac{b^2}{4a}$ et décroître jusqu'à $-\infty$.

Soit encore $a > o$, $b > o$. La fonction décroît depuis $+\infty$ jusqu'à c et croît ensuite jusqu'à $+\infty$.

Si la variable est assujettie à rester dans certaines limites, comme un sinus par exemple, il faut examiner si la valeur de cette variable, correspondante à un maximum ou minimum, est ou non comprise dans les limites données, et, s'il y a lieu, discuter complètement. La recherche du minimum du trinôme $a^2 \sin^4 x - 2b^2 \sin^2 x + c^2$ offre un exemple de ce cas.

II. — Variations de la fraction bicarrée $y = \frac{ax^4 + bx^2 + c}{a'x^4 + b'x^2 + c'}$.

Détermination des maximum et minimum.

En posant $x^2 = z$, cette fonction devient :

$$y = \frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'} \qquad (1)$$

Elle est continue, et l'on voit immédiatement, comme pour le trinôme bicarré, qu'elle passe par un maximum ou un minimum égal à $\frac{c}{c'}$ lorsque $z = o$.

$\frac{c}{c'}$ est minimum ou maximum selon que $bc' - cb'$ est positif ou négatif. En effet, soit K l'accroissement d'y lorsque z passe de o à une valeur positive h aussi petite qu'on voudra. On a :

$$K = \frac{ah^2 + bh + c}{a'h^2 + b'h + c'} - \frac{c}{c'} = \frac{h[(ac' - ca')h + (bc - cb')]}{c'^2 + b'c'h + a'c'h^2}$$

h étant infiniment petit, le dénominateur a le signe de c'^2 qui est positif, et le numérateur celui de $bc' - cb'$. Donc K est positif ou négatif selon que $bc' - cb'$ est négatif ou positif.

Si $c' = 0$, $\frac{c}{c'} = \infty$. Dans ce cas, lorsque $z = 0$, y passe par $+\infty$ ou par $-\infty$ en conservant son signe.

Pour déterminer les autres maximum et minimum, supposons que z décroisse depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$. On sait qu'alors y n'est susceptible de maximum ou minimum que lorsque l'équation :

$$(b'^2 - 4a'c')y^2 - 2(bb' - 2ac' - 2ca)y + b^2 - 4ac = 0 \quad (2)$$

a ses racines réelles et inégales. Soit $y' < y''$. Ces deux racines y' et y'' sont respectivement maximum et minimum si $b'^2 - 4a'c'$ est positif; minimum et maximum si ce coefficient est négatif, et, s'il est nul, l'une des racines devenant infinie, l'autre racine est le seul maximum ou minimum.

Les valeurs correspondantes de z sont données par l'équation :

$$z = \frac{b - b'y}{2(a'y - a)} \quad (3)$$

Puisque z ne peut varier qu'entre $+\infty$ et o, la fonction y passera par les deux maximum et minimum y', y'', par l'un d'eux seulement ,ou ne passera par aucun d'eux selon que z' et z'', valeurs correspondantes de z, seront toutes deux positives, l'une d'elles seulement positive, ou toutes deux négatives.

Donc en résolvant successivement les équations (2) et (3), on peut, dans chaque cas particulier et lorsque les coefficients sont numériques, déterminer les maximum et minimum d'y autres que $\frac{c}{c'}$.

Equation en z. — Condition de maximum ou minimum.

On peut obtenir une équation ayant pour racines les valeurs de z correspondantes aux maximum et minimum de la fonction, et déduire de cette équation un caractère général très simple pourreconnaître d'avance l'existence et le nombre de ces maximum ou minimum.

Cette équation, que j'ai fait remarquer dans une note pré-

cédente (*), s'obtient en éliminant y entre les équations (2) et (3), ou, plus simplement, entre les équations (1) et (3), ce qui donne :

$$(ab' - ba')z^2 + 2(ac' - ca')z + (bc' - cb') = 0, \quad (4)$$

équation dont la loi de formation est bien simple.

Or, on a l'égalité :

$$(bb' - 2ac' - 2ca')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c) = 4[(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')];$$

l'équation (4) a donc ses racines réelles et inégales, égales ou imaginaires, en même temps que l'équation (3), et l'on conclut la condition suivante du maximum ou minimum :

Pour que la fraction bicarrée ait d'autres maximum ou minimum que $\frac{c}{c'}$, *il faut et il suffit que l'équation en* z *ait au moins une racine positive.*

Cette fraction a donc un, deux, trois, cinq maximum ou minimum en comptant $\frac{c}{c'}$, selon que l'équation en z a ses racines négatives, une seule positive ou toutes deux positives.

La condition du maximum ou minimum étant remplie, on peut résoudre l'équation (4), calculer les valeurs d'y correspondantes aux racines positives, au moyen de l'équation

$$y = \frac{2az + b}{2a'z + b'},$$

que l'on déduit de l'équation (3) et distinguer ensuite le maximum et le minimum à l'aide du signe de $ab' - ba'$.

Remarque. — Nous croyons devoir appeler l'attention des élèves sur l'équation (4) qui permet de résoudre facilement les deux questions suivantes :

1° Étant donnée une fraction du second degré ou bicarrée dont deux coefficients sont inconnus, déterminer ces deux coefficients par la condition que la fraction devienne maximum et minimum pour deux valeurs données de la variable.

2° Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients des fractions

(*) *Journal de mathématiques* 1878, p. 361.

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \text{ et } \frac{mx^2 + nx + p}{m'x^2 + n'x + p'},$$

pour que ces deux fractions deviennent, 1° maximum ou minimum pour la même valeur d'x; 2° maximum et minimum pour les mêmes valeurs de la variable.

Lois des variations de la fraction bicarrée.

Lorsqu'on a déterminé les maximum et minimum ainsi que les valeurs correspondantes de z et par suite d'x, la marche des variations de la fraction bicarrée peut être établie rigoureusement dans tous les cas particuliers à l'aide de la continuité de la fonction et du caractère suivant :

Si z décroît depuis $+\infty$, la fraction

$$\frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'},$$

commence par décroître ou par croître selon que $ab' - ba'$, et au cas où ce binôme est nul, selon que $ac' - ca'$ est positif ou négatif.

Prenons pour exemple l'étude des variations de la fonction

$$y = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1},$$

question posée aux examens oraux pour l'École polytechnique (1876).

Si $$x^2 = z,\ y = \frac{z^2 + 1}{z + 1};$$

d'où l'on déduit $$z = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 4}}{2}.$$

Les racines du trinôme $y^2 + 4y - 4$ sont $y' = -2 - 2\sqrt{2}$, $y'' = -2 + 2\sqrt{2}$, z' est négatif; $z'' = -1 + \sqrt{2}$.

Donc y passe par le minimum $-2 + 2\sqrt{2}$ lorsque x prend les valeurs $+\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$ et $-\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$, et par le maximum 1 lorsque $x = 0$.

Si donc x décroît depuis $+\infty$ jusqu'à 0 et depuis 0 jusqu'à $-\infty$ la fonction y décroît depuis 1 jusqu'à son minimum $-2 + 2\sqrt{2}$, croît jusqu'à son maximum 1 qu'elle atteint lorsque $x = 0$, décroît de nouveau jusqu'au même minimum $-2 + \sqrt{2}$ et croît enfin jusqu'à 1.

La courbe de cette fonction, symétrique par rapport à l'axe des y, a deux branches infinies asymptotes à une parallèle à l'axe des x représentée par $y = 1$, qui est aussi tangente à la courbe au point d'intersection avec l'axe des y. Cette courbe est comprise entre cette tangente et celle qui a pour équation $y = -2 + 2\sqrt{2}$.

Comme seconde application, cherchons les variations de la fraction
$$y = \frac{2x^4 - 4x^2 + 2}{4x^4 - 5x^2 - 2}.$$

En posant $x^2 = z$, on a
$$y = \frac{2z^2 - 4z + 2}{4z^2 - 5z - 2},$$
d'où l'on déduit :
$$z = \frac{5y - 4 \pm \sqrt{57y^2 - 24y}}{4(2y - 1)}.$$

Les racines de $57y^2 - 24y$ sont $y' = 0$ maximum, $y'' = \frac{8}{19}$ minimum.

A ces valeurs d'y répondent respectivement $z' = 1$, $z'' = 3$. On a enfin $ab' - ba' = 6$.

Donc x décroissant depuis $+\infty$ jusqu'à 0 et depuis 0 jusqu'à $-\infty$, la fonction y décroît depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à son minimum $\frac{8}{19}$ et croît ensuite jusqu'à $+\infty$, passe brusquement à $-\infty$, croît jusqu'à son maximum 0, décroît jusqu'à son minimum -1, valeur qu'elle prend lorsque $x = 0$, et remonte ensuite la série des variations par lesquelles elle vient de passer.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS A SAINT-CYR

— **Résoudre le système d'équations**
$$(ap^n + bq^n)x + (ap^{n+1} + bq^{n+1})y = ap^{n+2} + bq^{n+2}$$
$$(ap^m + bq^m)x + (ap^{m+1} + bq^{m+1})y = ap^{m+2} + bq^{m+2}$$

— **Trouver sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle un point tel que la somme de perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés de l'angle droit soit égale à une quantité donnée.**

— Etant donnée l'équation

$$x^4 - 2(m - 5)x^2 + m^2 + 10m - 23 = 0,$$

entre quelles limites faut-il faire varier m pour que cette équation ait zéro, deux ou quatre racines réelles?

— Connaissant les restes de la division d'un polynôme entier en x par $x - a$, $x - b$, $x - c$, trouver le reste de la division par $(x - a)(x - b)(x - c)$.

— L'équation

$$(1 + p^2 + q^2)x^2 - [r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs]x + tr - s^2) = 0$$

a ses racines réelles; si les racines sont égales, on a la relation

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}$$

— Trouver sur la ligne qui joint les centres de deux sphères un point d'où l'on voie sur les deux sphères deux zones équivalentes.

— Quelle est la pyramide régulière à base carrée de volume maximum ayant une surface latérale donnée?

— Vérifier l'identité

$$\sin 3a \sin a = \sin^2 2a - \sin^2 a.$$

— On donne une demi-circonférence AB; on demande de trouver sur la courbe un point M tel que si l'on mène la corde AM et la perpendiculaire MP sur le diamètre, le segment AM et le triangle rectangle OMP, tournant autour de AB, engendrent des volumes équivalents.

— Par un point P, mener une sécante PDE telle que la projection IK de la partie située dans le cercle sur le diamètre passant par le point ait une longueur donnée.

— Circonscrire à un cercle donné un trapèze dont on donne les deux bases.

— On veut renfermer une surface de 348mq,6 dans un triangle équilatéral; on demande le rayon du cercle circonscrit et le côté du triangle.

— Etant donnée la formule $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{b}{x}\right)$, dans laquelle a et b sont positifs, déterminer la valeur qu'il faut donner à x pour que y ait une valeur donnée c. Peut-on faire prendre à y toutes les valeurs? Même question dans le cas où l'on a

$$y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right).$$

— Deux rectangles ont pour dimensions respectives x, y et x', y' ; on connaît la somme des bases, la somme des surfaces des deux rectangles, et de plus les surfaces des rectangles ayant pour dimensions la base de l'un et la hauteur de l'autre; trouver les dimensions des rectangles donnés.

— Si l'on a $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$, on a les formules

$$AB - ab = (A - a)(B + b) = (A + a)(B - b)$$
$$AB^2 - ab^2 = (A - a)(B^2 + Bb + b^2)$$
$$AB^2 + ab^2 = (A + a)(B^2 - Bb + b^2).$$

La première de ces formules permet d'avoir la différence des secteurs semblables; les dernières donnent le volume du tronc de cône de première ou de seconde espèce.

— Construire un triangle dont on connaît un côté, la moyenne géométrique entre les deux autres, et la bissectrice correspondant au premier côté.

— On mène les bissectrices des quatre angles d'un quadrilatère convexe ABCD ; on obtient ainsi un deuxième quadrilatère MNPQ dont on demande la surface en fonction des côtés et des angles du quadrilatère donné.

— On donne un rectangle et on demande de diminuer ses côtés d'une même longueur de façon que le rectangle formé avec les nouvelles dimensions sont une fraction donnée du premier.

— Couper un cône donné par un plan parallèle à la base de façon que la surface totale du tronc soit égale à la surface totale du petit cône.

— Etant donnés un cercle et une tangente à ce cercle, on propose de trouver sur la circonférence un point tel que la somme des distances de ce point au point de contact et à la tangente soit égale à une ligne donnée.

— Insérer entre 3 et 768 un nombre de moyens géométriques tel que 192 soit l'un d'eux.

— Etant données les distances des sommets d'un triangle au point d'où l'on voit les côtés sous le même angle, trouver les côtés et la surface.

— Connaissant trois lignes menées d'un point intérieur à trois sommets d'un carré, trouver le côté de ce carré.

— Le premier terme d'une progression géométrique est 3; le nombre de termes est 8, leur somme 765. Trouver la raison et le dernier terme.

— On donne un cercle, et une tangente xy; mener une corde parallèle à la tangente, et telle que, en abaissant des extrémités des perpendiculaires sur la tangente, le rectangle formé ait une diagonale de longueur donnée.

— Trouver sur la ligne des centres de deux circonférences un point tel que la somme des tangentes menées de ce point aux deux circonférences soit égale à une valeur donnée l.

— Quel doit être le dernier nombre de la première colonne d'une table de Pythagore pour que la somme de tous les nombres inscrits dans cette table soit de 36100?

— Trouver le maximum du volume inscrit dans une sphère et formé d'un cylindre surmonté de deux cônes ayant même base que le cylindre.

— Trouver les côtés d'un triangle rectangle connaissant le périmètre et la somme des volumes engendrés par la rotation successive autour des deux côtés de l'angle droit.

— Trouver les rayons d'un tronc de cône connaissant la hauteur, la surface latérale et la différence des rayons.

— Inscrire dans une sphère de rayon R un tronc de cône de hauteur et de volume donnés.

— Les trois côtés d'un triangle sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs; la surface du triangle est les $\frac{4}{10}$ du produit des plus grands côtés. Calculer les trois côtés, la surface, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

— Calculer le rayon d'une fenêtre formée d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle, connaissant sa hauteur totale et sa surface.

— Calculer le volume d'un cylindre connaissant sa hauteur et sa surface totale.

— Trouver sur une demi-circonférence un point M tel que la droite qui joint ce point au centre soit bissectrice de l'angle formé par les droites qui joignent le point M à l'extrémité A du diamètre et à un point C de ce diamètre.

NOTE SUR UN POINT DE LA DISCUSSION

DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A TROIS INCONNUES

Par M. E.-J. Boquel.

Lorsqu'on résout un système de trois équations du premier degré à trois inconnues, on obtient les valeurs des inconnues par des formules telles que $x = \frac{N}{D}$, $y = \frac{N'}{D'}$, $z = \frac{N''}{D'}$, et lorsqu'on suppose $D = o$, en même temps que $N = o$, on sait qu'il en résulte $N' = o$ et $N'' = o$. Mais les démonstrations que l'on donne ordinairement de ce fait dans les cours me semblent ou trop indirectes, ou même insuffisantes. Il est pourtant facile d'établir le théorème très clairement comme il suit, en supposant, bien entendu, qu'on ait préalablement démontré la condition nécessaire et suffisante pour que n équations homogènes et linéaires à n inconnues admettent pour ces inconnues un système de solutions dont une au moins soit différente de zéro.

Soit, en effet
$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + d = o \\ a'x + b'y + c'z + d' = o \\ a''x + b''y + c''z + d'' = o \end{array}\right. \qquad (1)$$
le système considéré.

Si l'on suppose D et N = o, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = o \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = o$$

ou, ce qui est la même chose :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = o \ (2) \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} d & d' & d'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = o \qquad (3)$$

je dis qu'il en résulte

$$N' = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ d'' & c'' & a'' \end{vmatrix} = o \ \text{et} \ N'' = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = o$$

Établissons, par exemple, que N' = o; c.-à-d., si l'on veut que $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ d & d' & d'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = o.$

Considérons le système des quatre équations homogènes et linéaires à trois inconnues

$$\left\{\begin{array}{ll} a\lambda + a'\mu + a''\nu = o & (4) \\ b\lambda + b'\mu + b''\nu = o & (5) \\ c\lambda + c'\mu + c''\nu = o & (6) \\ d\lambda + d'\mu + d''\nu = o & (7) \end{array}\right.$$

La condition (2) exprime que les trois équations (4), (5), (6) admettent pour λ, μ, ν, un système de solutions dont une au moins n'est pas nulle.

La condition (3) exprime, de son côté, que les trois équations (5), (6), (7) admettent pour λ, μ, ν, des solutions dont une au moins n'est pas nulle.

Soient λ_1, μ_1, ν_1, des valeurs de λ, μ, ν qui vérifient (5) et (6); en vertu de (2), ces valeurs vérifient l'équation (4); en vertu de (3), elles vérifient également l'équation (7); donc elles vérifient simultanément les quatre équations (4), (5), (6) et (7).

Mais la condition qui exprime que les trois équations homogènes et linéaires (4), (6), (7) admettent des solutions λ_1, μ_1, ν_1 dont une au moins n'est pas nulle, est précisément que le déterminant des coefficients de ces trois équations soit nul, c.-à-d. que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ d & d' & d'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = o \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} = o,$$

c.-à-d. N = o; c. q. f. d.

Il est clair qu'on reconnaît de même que N'' = o.

Donc le théorème est établi.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE DESCARTES

Par M. J. Collin, ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur de mathématiques.

Le théorème de Descartes n'est qu'une conséquence du théorème de Rolle.

Autrement dit, supposant connu le théorème de Rolle, nous allons en déduire le *théorème de Descartes.*

Dans toute équation algébrique f(x) = o, *à coefficients réels, et ordonnée suivant les puissances décroissantes de* x, *le nombre* p *des racines positives ne peut surpasser le nombre* v *des variations, et, s'il lui est inférieur, leur différence* v — p *est un nombre pair.*

Et d'abord ce théorème est vrai, on peut le constater, pour les équations du 1er et du 2e degré.

Or nous disons que, s'il est vrai pour les équations de degré $m - 1$, il est vrai aussi pour celles de degré m. En effet, soit une équation quelconque de degré m,

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0 \quad \text{ou } f(x) = 0.$$

Prenons l'équation dérivée

$$mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} = 0 \text{ ou } f'(x) = 0$$

et appelons p' le nombre des racines positives de $f'(x) = 0$. Cela étant, supposons d'abord que $f(x) = 0$ n'a pas de racines égales, et distinguons deux cas :

I. A_{m-1} *et* A_m *sont de signes contraires.* Alors $f'(x) = 0$ a une variation de moins que $f(x) = 0$. Puisque nous supposons le théorème vrai pour les équations de degré $m - 1$, nous avons $p' \leq v - 1$, c'est-à-dire au plus $v - 1$ racines positives de la dérivée, a', b',... f', qui avec o et $+\infty$ constituent au plus v intervalles où peuvent se trouver des racines positives de $f(x) = 0$. Donc $f(x) = 0$ a au plus v racines positives. — De plus, si $p < v$, on a $v - p = 2K$; car A_m et A_{m-1} étant de signes contraires, p et p' sont de parités différentes; or $v - 1 - p' = 2K'$, K' pouvant être nul; donc $v - p = 2K$.

II. A_{m-1} *et* A_m *sont de même signe.* Alors $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ ont le même nombre de variations v. Nous avons encore $p' \leq v$. Considérons donc le cas le plus défavorable, c'est-à-dire celui où $p' = v$. Alors, à première vue du moins, o, les racines a', b',... f' et $+\infty$ constituent $v + 1$ intervalles où peut se trouver une racine positive de $f(x) = 0$. Mais il est facile de voir que, dans l'intervalle de o à a, il ne peut pas en exister. — En effet, d'une part, $f(0) = A_m$; d'autre part, on a $f(a' - h) \,.\, f'(a' - h) > 0$; mais $f(a' - h)$ a même signe que $f(a')$, et $f'(a' - h)$ même signe que $f'(0)$, donc, dans ce cas-ci, même signe que $f(0)$; donc $f(a') \,.\, f(0) > 0$. — Donc, encore dans ce cas, au plus v racines positives pour $f(x) = 0$. — De plus, si $p < v$, on a $v - p = 2K$; car A_m et A_{m-1} étant de même signe, p et p' sont de même parité; or $v - p' = 2K'$; K' pouvant être nul; donc $v - p = 2K$.

Supposons maintenant que $f(x) = 0$ ait p_1 racines égales positives; soient a, b,... e ces racines, et α, β,... ε, leurs degrés respectifs de multiplicité. L'équation $f'(x) = 0$ admet ces mêmes racines avec des degrés de multiplicité respectivement égaux à $\alpha - 1$, $\beta - 1$,..., $\varepsilon - 1$, et en outre admet p'_1 racines positives propres a', b'... — Or forcément d'après le théorème de Rolle, si l'on écrit la suite des racines de $f(x) = 0$ dans leur ordre de grandeur, chaque racine a, b,... est encadrée par deux des racines propres a', b',..., et entre deux racines a', b' qui encadrent une racine a, il ne peut y avoir de racine simple de $f(x) = 0$, de sorte que sur les $p'_1 + 1$ intervalles fournis par les p'_1 racines propres de $f'(x) = 0$ avec o et $+\infty$, il n'y en a que $p'_1 + 1 - p_1$ qui puissent fournir des racines simples de $f(x) = 0$. Cela posé, si nous prenons pour exemple le cas de $A_m \,.\, A_{m-1} < 0$, nous aurons

$$\alpha - 1 + \beta - 1 + \ldots + \varepsilon - 1 + p'_1 \leq v - 1$$

en considérant $f'(x) = 0$; de là nous déduisons

$$\alpha + \beta + \ldots + \varepsilon + p'_1 + 1 - p_1 \leq v.$$

On arriverait au même résultat dans le cas de $A_m \,.\, A_{m-1} > 0$.

En résumé : Si le théorème est vrai pour les équations du degré $m - 1$, il est vrai aussi pour celles du degré m; or il

est vrai, on peut le constater, pour les équations du 1er et du 2e degré; donc il est vrai pour celles du 3e degré, etc., donc il est général.

NOTA. — Nous avons eu connaissance, après que la rédaction de la note précédente était déjà terminée, d'une démonstration nouvelle du théorème de Descartes, qui a été donnée récemment par M. Laguerre dans *les Nouvelles Annales de Mathématiques;* mais comme notre démonstration diffère notamment de celle de ce géomètre, nous croyons néanmoins utile de la faire connaître.

NOTE SUR LES FRACTIONS CONTINUES

INDÉFINIES, NON PÉRIODIQUES

par M. **Kœhler.**

Lorsqu'on cherche à transformer en fraction continue une fonction, développée en série, on obtient en général un développement de la forme

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

a_n et b_n étant des fonctions du rang n de la fraction intégrante. En opérant comme dans le cas où les numérateurs $a_1, a_2, \ldots$ sont égaux à l'unité, on trouve aisément les relations

$$p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}$$
$$q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}$$

qui déterminent les deux termes de la n^{me} réduite $\frac{p_n}{q_n}$ en fonction des termes des deux réduites précédentes.

Il n'est pas difficile de transformer en fraction continue une fraction dont on connaît le développement en série; mais le problème inverse présente au contraire le plus souvent d'assez grandes difficultés. Il s'agit de trouver l'expression générale d'une réduite, connaissant la loi de formation

des quantités a_n, b_n. Voici une méthode de calcul qui réussit dans certains cas :

Soient $a_n = f_1(n)$, $b_n = f_2(n)$; on aura, en désignant par u_n l'une ou l'autre des quantités p_n, q_n :

$$u_n = f_2(n)u_{n-1} + f_1(n)u_{n-2}.$$

Désignant par $\varphi(n)$ et $\psi(n)$ deux fonctions inconnues de l'indice n, je mets l'équation précédente sous la forme

$$u_n + \varphi_n u_{n-1} = \psi_n [u_{n-1} + \varphi(n-1)u_{n-2}]$$

On devra avoir les deux identités

$$\left.\begin{aligned} \psi(n) - \varphi(n) &= f_2(n) \\ \psi n - \varphi(n-1) &= f_1(n) \end{aligned}\right\} (1)$$

et on cherchera à déterminer d'après ces conditions les deux fonctions inconnues φ et ψ, ce qui est *quelquefois possible* par la méthode des coefficients indéterminés, lorsque f_1 et f_2 sont des fonctions entières.

Admettons que φ et ψ soient connues; on aura la suite d'identités

$$\left.\begin{aligned} &u_n + \varphi(n)u_{n-1} = \psi(n)[u_{n-1} + \varphi(n-1)u_{n-2}] \\ &u_{n-1} + \varphi(n-1)u_{n-2} = \psi(n-1)[u_{n-2} + \varphi(n-2)u_{n-3}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_3 + \varphi(3)u_2 = \psi(3)[u_2 + \varphi(2)u_1] \end{aligned}\right\} (2)$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$u_n + \varphi(n)u_{n-1} = \psi(n)\psi(n-1)\ldots\psi(3)[u_2 + \varphi(2)u_1]$$

ou, pour abréger,

$$u_n = -\varphi(n)u_{n-1} + F(n)$$

et de même

$$u_{n-1} = -\varphi(n-1)u_{n-2} + F(n-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_3 = -\varphi(3)u_2 + F(3),$$

les fonctions F renfermant u_1 et u_2.

Il est facile d'éliminer u_{n-1}, u_{n-2} ... en multipliant la deuxième égalité par $-\varphi(n)$, la troisième par $\varphi(n-1)\varphi(n)$ et ainsi de suite, et en ajoutant les résultats. On aura ainsi l'expression générale de u_n en fonction de n et des deux premiers termes de la suite u_1 et u_2.

Je vais appliquer ce qui précède à la conversion en série de la fraction continue :

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cdots}}}}$$

On a $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{2}$, ...
en général $u^n = n(u_{n-1} + u_{n-2})$
et $f_1(n) = f_2(n) = n$.
Les identités (1) deviennent $\psi(n) - \varphi(n) = n$

$$\psi(n) \;.\; \varphi(n-1) = n$$

On peut prendre pour ψ et φ des fonctions du premier degré renfermant chacune deux constantes, poser :

$$\psi(n) = An + B,\ \varphi(n) = \alpha n + \beta$$

et par suite $\varphi(n-1) = \alpha n - \alpha + \beta$.

Les équations de condition seront :

$$An + B - \alpha n - \beta = n$$
$$(An + B)(\alpha n - \alpha + \beta) = n.$$

Elles sont vérifiées, quel que soit n, en prenant

$$A = 0,\ \alpha = \beta = B = -1,$$

de sorte que $\psi(n) = -1$, $\varphi(n) = -n - 1$.

La suite d'identités (2) sera donc

$$u_n - (n+1)\,u_{n-1} = -[u_{n-1} - nu_{n-2}]$$
$$u_{n-1} - nu_{n-2} = -[u_{n-2} - (n-1)\,u_{n-3}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_4 - 5\,u_3 = -(u_3 - 4\,u_2)$$
$$u_3 - 4\,u_2 = -(u_2 - 3\,u_1).$$

Je multiplie la première par $(-1)^n$, la seconde par $(-1)^{n-1}$, etc., j'ajoute et il vient :

$$(-1)^n\,(u_n - {}_{n+1})\,u_{n-1}) = u_1 - 3u_1.$$

Cette dernière égalité permet de trouver p_n et q_n.

Pour avoir p_n, je fais $u_2 = p_2 = 2$, $u_1 = p_1 = 1$, $u_2 - 3u_1 = -1$; par suite

$$(-1)^n p_n = (-1)^n\,(n+1)u_{n-1} - 1.$$
$$(-1)^{n-1}p_{n-1} = (-1)^{n-1}n\,u_{n-2} - 1.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^2 p_2 = (-1)^2 3p_1 - 1.$$

Je multiplie la première égalité par $(-1)(n+1)$, la seconde par $(-1)^2(n+1)n$, etc., la dernière par $(-1)^{n-2}$ $(n+1)n(n-1)\ldots6.5.4$, et j'obtiens par addition :

$$(-1)^n p_n = (-1)^n(n+1)n\ldots.5.4.3 + (-1)^{n-1}$$
$$(n+1)n\ldots5.4 + \ldots. + (-1)^3(n+1)n + (-1)^2(n+1) - 1.$$

Pour avoir q_n, il faut reprendre le même calcul, en faisant

$$u_2 = q_2 = 4, \quad u_1 = q_1 = 1, \quad u_2 - 3u_1 = 1\,;$$

on trouve alors:

$$(-1)^n q_n = (-1)^n(n+1)n\ldots5.4.3 + (-1)^{n-1}(n+1)\,n\ldots5.4$$
$$+ \ldots + (-1)^3(n+1)n + (-1)^2(n+1) + 1.$$

En divisant par $(-1)^n(n+1)n\ldots3.2.1$ les deux termes de la réduite $\frac{p_n}{q_n}$, elle devient:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \ldots + \frac{1}{(-1)^{n-1}\,2.3.4\ldots(n+1)}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{(-1)^n\,2.3.4\ldots(n+1)}}$$

Comme on a $\frac{1}{e} = e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \ldots..$ l'expression précédente, lorsque n augmente indéfiniment, n'est autre chose que $\dfrac{e^{-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - e^{-1}} = \dfrac{1}{e.-1}$.

Voici comment Euler est arrivé à la fraction continue que je viens d'étudier.

Soit $\quad 1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \ldots.$

On a $\frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2-1}}$;

je remplace $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}$ ou bien 2 par

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}} = 2 + x = 2 + \frac{2}{3-1},$$

afin d'avoir en fraction continue les trois premiers termes de la série ; cette fraction est

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3-1}}}$$

Remplaçant $\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{3} - \frac{1}{3.4}$ pour avoir les quatre premiers termes, et continuant ainsi indéfiniment, on trouve

$$1 - \frac{1}{e} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\dots}}}}$$

puis $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e}} = \dfrac{e}{e-1} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\dots}}}$

enfin $\dfrac{e}{e-1} - 1 = \dfrac{1}{e-1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\dots}}}$

Voici un autre exemple de transformation de fraction continue en série. Soit $F = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^4}{3+\cfrac{2^4}{5+\dots+\cfrac{n^4}{2n+1+\dots}}}}$

dans laquelle la $n+1^{me}$ réduite correspond à $\dfrac{n^4}{2n+1}$.

On a ici $u_n = (2n - 1)\ u_{n-1} + (n-1)^4\ u_{n-2}$, u_n désignant toujours p_n ou q_n, et aussi $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{4}$.

Les identités qui déterminent $\psi(n)$ et $\varphi(n)$ sont

$$\psi(n) - \varphi(n) = 2n - 1$$
$$\psi(n) \cdot \varphi(n-1) = (n-1)^4$$

et on trouve facilement $\varphi(n) = -n^2$, $(\psi n) = -(n-1)^2$.

$$\text{Donc } p_n - n^2 p_{n-1} = -(n-1)^2 [p_{n-1} - (n-1)^2 p_{n-2}]$$
$$p_{n-1} - (n-1)^2 p_{n-2} = -(n-2)^2 [p_{n-2} - (n-2)^2 p_{n-3}]$$
. . . .
$$p_3 - 3^2 p_2 = -2^2 [p_2 - 2^2 . p_1] = -2^2 . (-1)$$

La valeur de p_n est

$$\begin{aligned} p_n = & (-1)^{n-1}(n-1)^2(n-2)^2 \ldots 3^2 . 2^2 \\ & + (-1)^{n-2} n^2 (n-2)^2 (n-3)^2 \ldots 3^2 . 2^2 + \ldots \\ & + (-1) n^2 (n-1)^2 \ldots 4^2 . 3^2 . 1^2 \\ & + n^2 (n-1)^2 \ldots 4^2 . 3^2 . 2^2. \end{aligned}$$

Pour calculer q_n on remarquera que $q_2 - 2^2 . q_1 = 0$; par suite, en remontant, on trouvera immédiatement $q_n - n^2 q_{n-1} = 0$ et $q_n = n^2(n-1)^2(n-2)^2 \ldots 3^2 . 2^2$.

La réduite $\frac{p_n}{q_n}$ est

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^2} + \ldots - \frac{1}{2^2} + 1.$$

et en supposant n infini, on a la série convergente

$$F = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$$

dont la valeur est $\frac{\pi^2}{12}$. (Voir Laurent, *Théorie des résidus*, p. 145) (*).

Remarque. — Le procédé de calcul que j'ai indiqué repose sur la transformation de la relation $u_n = f_2(n) u_{u-1} + f_1(n) u_{n-2}$ au moyen des fonctions ψ et φ. Mais il n'est pas toujours possible de déterminer ces fonctions, au moins par des procédés élémentaires. Alors le problème de la

(*) Les deux exemples de fractions continues que j'ai donnés sont empruntés au recueil d'énoncés de problèmes de M. Wolstenholme.

transformation d'une fraction continue en série devient beaucoup plus difficile. On est obligé de recourir à la théorie des fonctions génératrices.

QUESTION 209.

Solution par M. G. Papelier, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Reims.

---

a, b, c, d, *désignant des nombres entiers et positifs;*
$(1+x)^{6a+1}-(1+x)^{6b+2}-1$ *est divisible par* x^2+x+1;
$x^{3a-1}+x^{3b}+x^{3c+1}$ *est divisible par* x^2+x+1;
$x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$ *est divisible par* x^3+x^2+x+1. (H. Laurent.)

1° Pour démontrer que $(1+x)^{6a+1}-(1+x)^{6b+2}-1$ est divisible par x^2+x+1, il suffit de faire voir évidemment que cette expression s'annule quand on y remplace x par les racines de l'équation $x^2+x+1=0$.

Ces racines sont données par la relation

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$$

que l'on peut écrire

$$x=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Substituons $\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ dans $(1+x)^{6a+1}-(1+x)^{6b+2}-1$, nous obtiendrons

$$\left[1+\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right]^{6a+1}$$

$$-\left[1+\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right]^{6b+2}-1.$$

or $$1 + \cos\frac{2\pi}{3} = 2\cos^2\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3};$$

donc l'expression peut s'écrire

$$\left[2\cos\frac{\pi}{3}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}\right]\right]^{6a+1}$$

$$+\left[2\cos\frac{\pi}{3}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}\right]\right]^{6b+2}$$

qu'on peut écrire en vertu de la formule de Moivre

$$2^{6a+1}\cos^{6a+1}\frac{\pi}{3}\left[\cos(6a+1)\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin(6a+1)\frac{\pi}{3}\right]$$

$$-\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^{6b+2}\left[\cos(6b+2) + \sqrt{-1}\sin(6b+2)\frac{\pi}{3}\right] - 1$$

ou

$$\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^{6a+1}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[2\cos\frac{\pi}{3}\right]^{6b+2}$$

$$\left[\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right] - 1$$

Or $$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

et par conséquent l'expression a pour valeur 0; donc

$x = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ est racine de l'équation

$$(1 + x)^{6a+1} + (1 + x)^{6b+2} = 0;$$

donc, comme cette équation est à coefficients réels, elle admet aussi la racine conjuguée

$$x = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Donc le premier membre est divisible par $x^2 + x + 1$.

2° Soit à démontrer que $x^{3a-1} + x^{3b} + x^{3c+1}$ est divisible par $x^2 + x + 1$.

On peut opérer comme précédemment. Substituons dans l'expression donnée la valeur $\cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$; en

appliquant la formule de Moivre, elle devient :

$$\cos(3a-1)\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin(3a-1)\frac{2\pi}{3}+\cos 3b\frac{2\pi}{3}$$
$$+\sqrt{-1}\sin 3b\frac{2\pi}{3}+\cos(3c+1)\frac{2\pi}{3}$$
$$+\sqrt{-1}\sin(3c+1)\frac{2\pi}{3}$$

qui est égale à

$$\cos\frac{2\pi}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}+\cos 2b\pi+\sqrt{-1}\sin 2b\pi$$
$$+\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3};$$

mais $\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=-1$, $\cos 2b\pi=1$.

Les parties réelles et imaginaires sont donc nulles et la proposition est démontrée.

On peut employer un procédé différent, à l'aide duquel nous pouvons même généraliser la question.

On a identiquement

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

et il suffit de démontrer que $(x-1)(x^{3a-1}+x^{3b}+x^{3c+1})$ est divisible par x^3-1.

Le produit est égal à

$$x^{3a}+x^{3b+1}+x^{3c+2}-x^{3a-1}-x^{3b}-x^{3c+1}.$$

Remplaçons x^3 par 1, il vient

$$1+x+x^2-\frac{1}{x}-1-x$$

ou

$$\frac{1}{x}(x^2+x^3-1-x^2)$$

et si l'on fait $x^3=1$ on obtient pour résultat o; donc $(x-1)(x^{3a-1}+x^{3b}+{}^{3c+1})$ est divisible par x^3-1.

3° De même pour démontrer que $x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$ est divisible par x^3+x^2+x+1, il suffit de démontrer que $(x-1)(x^{4a}+x^{4b+1}x^{4c+2}+x^{4d+3})$ est divisible par $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$, c'est-à-dire par x^4-1.

Effectuons le produit, nous avons :

$$x^{4a+1}+x^{4b+2}+x^{4c+3}+x^{4d+4}-x^{4a}-x^{4b+1}$$
$$-x^{4c+2}-x^{4d+3}.$$

Or ce produit est nul pour $x^4 = 1$. Donc le théorème est démontré.

D'une manière générale, $a, b, c, \dots k, l$ étant des nombres entiers positifs et p un nombre entier positif,

$$x^{pa} + x^{pb+1} + x^{pc+2} x \times \dots + x^{pl+p-1}$$

est divisible par

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \dots \times x^2 + x + 1.$$

En effet il suffit de prouver que

$$(x^{pa} + x^{pb+1} + \dots x^{pl+p-1})\ (x - 1)$$

est divisible par $x^p - 1$; c'est-à-dire qu'en remplaçant x^p par 1 dans

$$x^{pa+1} + x^{pb+2} + \dots x^{pb+p} - x^{pa} - x^{pb+1} \dots - x^{pb+p-1}$$

on a un résultat nul.

Faisant cette substitution, on a

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^{p-1} + 1 - 1 - x - x^2 \dots - x^{p-1}$$

résultat nul.

Donc le théorème est démontré.

QUESTIONS PROPOSÉES

Ces exercices ont été choisis parmi ceux qui sont traités journellement dans les conférences et les examens des principales écoles préparatoires de Paris, et parmi les principales questions posées aux concours d'admission à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Normale supérieure dans ces dernières années.

I. MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Algèbre.

— Etant donnée la fraction continue périodique

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \dots}}}}$$

former une équation du 2e degré admettant x pour une de ses racines.

— Résoudre l'équation $e^x - x^2 = 0$.

— Quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients des

deux polynômes $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$, $x^3 + 3a'x^2 + 3b'x + c'$, pour que ces deux polynômes aient un diviseur commun du 2e degré? — Combien obtiendra-t-on de conditions? — Que deviennent ces conditions dans le cas particulier où $a = a'$?

— Résoudre l'équation $x^3 + 6x + 5\sqrt{-1} = 0$.

— Etant donnée l'équation $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + m = 0$, combien cette équation admet-elle de racines réelles, suivant les diverses valeurs de m?

— Séparer les racines de l'équation $x - 2 \sin x = 0$.

— Décomposer en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(x^2 - 1)^3}$. Les six coefficients sont-ils indépendants, et ne peut-on pas, connaissant les trois premiers, obtenir immédiatement les trois autres?

— Résoudre l'équation $10^x - 2 = 0$.

— Trouver la condition pour que le rapport de deux des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ soit égal à un nombre donné λ. De quel degré doit être, par rapport à λ, la relation cherchée?

— Quel est le signe de l'expression

$$L(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots\ldots - \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} \text{ pour } x \text{ positif.}$$

— Démontrer que ce signe est toujours le même pour toutes les valeurs positives de x.

— Si le produit $f(x)(x - a)$ renferme $2n + 1$ variations de plus que le polynôme $f(x)$, l'équation $f(x) = 0$ a au moins $2n$ racines imaginaires.

— Faire voir, *à priori*, sans s'appuyer sur le théorème de Descartes, que la différence entre le nombre des variations du premier membre d'une équation et le nombre des racines positives de cette équation, est toujours un nombre pair.

— Calculer la dérivée n^{me} de la fonction $y = \frac{1}{1 + x^2}$ ou, ce qui revient au même, la dérivée $(n + 1)^{me}$ de la fonction $y = \operatorname{arctg} x$.

— Trouver toutes les valeurs de φ et la valeur de ρ qui satisfont à l'égalité $\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = -1 + \sqrt{-1}$.

— On considère une fraction $\frac{\varphi(x)}{F(x)\, f(x)}$ irréductible et dans laquelle $F(x)$ et $f(x)$ sont des polynômes premiers entre eux; on propose d'établir que l'on peut toujours trouver deux polynômes entiers P et Q tels que l'on ait identiquement

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)\, f(x)} = \frac{P}{F(x)} + \frac{Q}{f(x)}$$

Quels sont les degrés respectifs des polynômes P et Q, n et p étant ceux de polynômes F et f?

Géométrie à deux dimensions.

— La courbe $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$, où l'on suppose $a > b$, est-elle extérieure ou intérieure à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

— Soit la courbe $y^3 - x^2 = 0$. Une droite $ux + vy = 1$ coupe cette courbe en trois points; on demande la condition à laquelle doivent satisfaire u et v pour

que deux des points d'intersection soient équidistants du troisième. $\varphi(u, v)$ o, étant la condition trouvée, on propose de trouver l'enveloppe des droites $ux + vy = 1$ qui satisfont à cette condition.

— Étant données une droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, et une courbe $f(x, y) = 0$, on demande de former l'équation de la courbe qui est symétrique de la courbe donnée par rapport à la droite donnée. — On propose d'effectuer le calcul dans le cas où $f(x, y) = 0$ est une conique ayant ses axes parallèles aux axes des coordonnées supposées rectangulaires.

— Former l'équation tangentielle de la courbe $y^2 = 2px + qx^2$.

— On donne une parabole et un point A dans son plan; trouver sur la parabole un point M tel que la droite AMM' soit normale à la courbe au second point M' où elle la rencontre.

— Étant donnée l'équation $x^2 + y^2 - 1 = (2x + y - 1)^2$, calculer les coordonnées des foyers de la courbe qu'elle représente, ainsi que les coordonnées des sommets de l'axe transverse.

— Former l'équation générale des courbes du troisième degré ayant pour asymptotes les deux axes des coordonnées et la droite $x + \alpha\beta y - 1 = 0$.

— D'un point $(\alpha\beta)$ on mène des tangentes à la courbe $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$; calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle formé par trois quelconques de ces tangentes.

— Appliquer les méthodes générales de recherche des foyers à l'exemple $y^2 + 3xy + x^2 - 1 = 0$.

— On considère un triangle ayant un sommet O fixe; un second sommet M' décrit une circonférence; le triangle est en outre assujetti à rester semblable à lui-même. Trouver le lieu du troisième sommet M.

— (Résoudre cette question : 1° en coordonnées polaires; 2° en coordonnées rectilignes; 3° par des considérations géométriques élémentaires.)

— On mène à une ellipse deux tangentes parallèles; on joint l'un des points de contact A au foyer le plus éloigné, et on prolonge la ligne de jonction jusqu'à la rencontre de l'autre tangente en M; démontrer que $AM = 2a$.

— Lieu des points d'où l'on voit deux circonférences données sous le même angle.

— On considère toutes les paraboles tangentes à une même droite, et passant par deux points fixes situés sur une perpendiculaire à la tangente donnée; on demande le lieu des foyers de ces paraboles.

— On considère toutes les paraboles ayant la même directrice et un point commun; trouver le lieu de leurs sommets.

Géométrie dans l'espace.

— Étant donné l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on considère la section de cette surface par le plan $z = mx + ny + p$; par chaque point de cette section on mène une tangente horizontale à l'ellipsoïde; trouver l'équation de la surface formée par l'ensemble de ces tangentes.

— Soient S et S' les deux polynômes

$$S = x^2 + y^2 + z + ax + by + cz + d$$
$$S' = x^2 + y^2 + z^2 + a'x + b'y + c'z + d'$$

et P, P' les deux fonctions linéaires,

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \quad P' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'$$

on demande d'étudier les propriétés de la surface du troisième degré représentée par l'équation $P'S - PS' = 0$.

— On donne l'équation $z = \frac{f(x.\ y)}{P}$, dans laquelle $f(x, y) = 0$ représente une ellipse réelle située dans le plan des xy, et $P = 0$ une droite située dans le même plan. On demande quelles seront les diverses surfaces représentées par l'équation proposée, suivant les diverses positions de la droite $P = 0$ dans le plan xOy. Même question quand l'équation $f(x, y) = 0$ représente une hyperbole, $P = 0$ étant une parallèle à une asymptote de cette hyperbole.

— Lieu des points équidistants du plan $Ax + By + Cz + D = 0$ et de l'axe des z.

— Etant donné le cercle ($z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$), former l'équation générale des paraboloïdes elliptiques qui contiennent ce cercle, et dont l'axe est parallèle à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$. *A priori*, combien cette équation contiendra-t-elle de paramètres variables?

— Lieu des points tels que le rapport des carrés de leurs distances à deux droites données soit égal à un carré donné.

— Soient trois axes rectangulaires et une droite OA issue de l'origine; former l'équation de la surface engendrée par une droite OB tournant autour du point O de manière que la somme des angles BOA + BOx soit une constante 2φ. — Propriété importante de la section perpendiculaire à l'axe des x.

— Soit l'hyperboloïde à une nappe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; on demande le lieu des projections du centre sur l'un des systèmes de génératrices rectilignes de la surface. — Parmi les diverses surfaces contenant la courbe cherchée, trouver le cône ayant son sommet à l'origine.

— Etant donné le paraboloïde $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x$, trouver le lieu des centres des sphères d'un rayon donné qui coupent le paraboloïde suivant des cercles.

— Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les *arêtes* sont tangentes à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

— Trouver l'équation générale des plans qui coupent l'hyperboloïde à une nappe suivant deux droites parallèles.

— Former l'équation générale des surfaces du deuxième degré qui contiennent l'axe des z. — On considère sur l'axe des z le point ($x = 0$, $y = 0$, $z = h$), et on demande de trouver les équations de la deuxième génératrice rectiligne qui passe par ce point.

Courbes à construire

En coordonnées rectilignes :

1° $y = x^2 \pm \frac{1}{2} x^2 \sqrt{1 + x}$.

2° $x^3 + xy^2 + y^3 - x^2 = 0$. — Points de contact des tangentes que l'on peut mener à cette courbe par le point ($\alpha\beta$). Etudier les variations de la conique qui contient ces contacts, lorsque le point ($\alpha\beta$) se déplace dans le plan.

3° $y = 1 + x + \frac{\sin x}{x}$. — Qu'est-ce que la droite $y = x + 1$ par rapport à la courbe ?

4° $x = \frac{1+t}{1-t}$, $y = \frac{t}{1-t}$. — Comment peut-on reconnaître *à priori* quelle est la ligne formée par tous les points dont les coordonnées sont définies par ces formules ?

5° Etudier autour de l'origine la courbe dont l'équation est

$$y = \sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx} - \sqrt{1-cx} - \sqrt{1-dx}.$$

Diverses propriétés de l'origine suivant les relations qui peuvent exister entre a, b, c, d. Quand ce point est-il un point d'inflexion ?

6° $y^2 = \frac{x(x-1)(x-2)}{x+3}$.

7° $y = x \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

8° $y = \frac{\sin(x-\alpha)}{\sin^6 x}$ α étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

En coordonnées polaires :

$$\rho = \sin 3\omega$$

$$\rho = \frac{\sin\omega + \cos\omega}{\sin\frac{\omega}{3}}$$

$$\rho^2 \cos\frac{\omega}{2} - 2\rho + 4\sin\frac{\omega}{2}$$

$$= \frac{1}{\rho} = \frac{2(\sin^3\omega + \cos^3\omega)}{3\sin 2\omega}$$

$$\rho = \frac{1}{\cos\frac{\omega}{3}}$$

$$\rho = \frac{1+\sin\omega}{1-2\cos\omega}$$

$$\rho = \frac{\sin\omega - 2\cos\omega}{1-2\sin\omega}$$

$$\rho = \frac{1+\operatorname{tg}\omega}{1-\cos\omega}$$

$$\rho = \frac{\omega - 2\sin\omega}{3\omega - \operatorname{tg}\omega}$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1-2\sin\omega}$$

$$\rho = \frac{\cos\omega}{1-2\sin\omega}$$

II. MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

— Soit Q la partie entière du quotient de la division d'un polynôme A par un polynôme B; on divise Q par un autre polynôme C; démontrer que la partie entière Q' du quotient de cette nouvelle division est la partie entière du quotient de la division du polynôme A par le produit BC.

—Etant donné un triangle quelconque, on joint le point de rencontre des trois hauteurs à l'un des sommets; déterminer en fonction des éléments du triangle l'angle formé par la ligne de jonction (qui est l'une des trois hauteurs) avec l'un des deux côtés du triangle qui partent du sommet considéré.

— a et b étant deux nombres premiers absolus, trouver deux nombres *entiers* x et y tels que $x^2 - y^2 = ab$.

— On donne trois points quelconques et un plan, dans l'espace. Faire passer par les trois points donnés une sphère tangente au plan donné.

— Etant données une circonférence O et une droite AB, d'un point quelconque M de la droite AB on mène une tangente MT à la circonférence. Prouver que si de M comme centre, avec MT pour rayon, on décrit une circonférence, cette circonférence passera par deux points fixes, c.-à-d. indépendants de la position du point M sur AB. Quels sont ces deux points fixes?

m et n étant deux nombres entiers, et E une quantité moindre que toute quantité donnée, si un nombre α est tel que l'on puisse satisfaire à l'inégalité $m\alpha - n < E$, le nombre α est incommensurable.

— Résoudre, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, le problème de la construction d'un cercle tangent à deux cercles donnés, et passant par un point donné.

Rendre calculable par logarithmes, dans les diverses hypothèses qu'on peut faire sur a, b, a', b', l'expression

$$\frac{a + b \cos \varphi}{a' - b' \sin \varphi}.$$

— Sur une droite indéfinie Ox on porte, à partir d'une origine fixe O, deux longueurs OA, OA' qui représentent les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; on porte ensuite, à partir de la même origine, deux autres longueurs OB, OB' qui représentent les racines de l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$; trouver la relation qui doit exister entre a, b, c, a', b', c' pour que les quatre points A, A', B, B' forment une division harmonique.

— Par un point pris dans l'intérieur d'un trièdre, faire passer une sphère tangente aux trois faces de ce trièdre.

Inscrire dans une ellipse le rectangle de surface maxima.

Trouver, par un procédé élémentaire, la somme des n premiers termes de la suite $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots + nx^n + \ldots\ldots$

Quel est le plus petit nombre entier admettant quinze diviseurs?

VARIÉTÉS

ESSAIS POUR LES CONIQUES DE PASCAL

AVEC

Des notes par M. Ch. Laurens, professeur honoraire.

(*Suite et fin*, voir page 133.)

§ 6. — « Nous démontrerons aussi que si quatre droites, AC, AF, EH, EL s'entre-coupent aux points N, P, M, O et qu'une section de cône (*fig. 10*) coupe lesdites droites aux points C, B, F, D, H, G, L, K, la raison composée des raisons du

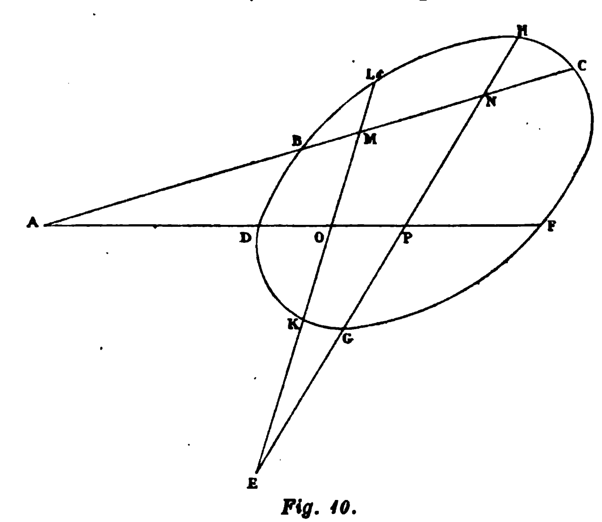


Fig. 10.

rectangle de MC et MB au rectangle des droites PF, PD et du rectangle des droites AD, AF au rectangle des droites AB, AC est la même que la raison composée des raisons du rectangle des droites ML, MK au rectangle des droites

PH, PG et du rectangle des droites EH, EG au rectangle des droites EK, EL. »

Note 6. — C'est-à-dire que si par deux points A, E, on mène deux couples de sécantes se rencontrant en M, N, O, P, et coupant la conique aux points B, C, D, F, K, G, L, M, on a la relation

$$\frac{MC.MB}{PF.PD}\cdot\frac{AF.AD}{AB.AC}=\frac{ML.MK}{PH.PG}\cdot\frac{EH.EG}{EK.EL};$$

appliquons aux deux triangles AOM, EOP la relation (5) de la note qui précède

$$\frac{OD.OF}{AD.AF}\cdot\frac{AB.AC}{MB.MC}\cdot\frac{ML.MK}{OL.OK}=1$$

$$\frac{OD.OF}{PD.PF}\cdot\frac{EK.EL}{OK.OL}\cdot\frac{PG.PH}{EG.EH}=1$$

égalant les premiers membres et supprimant le facteur commun $\frac{OD.OF}{OK.OL}$

$$\frac{ML.MK}{AD.AF}\cdot\frac{AB.AC}{MB.MC}=\frac{EK.EL}{PD.PF}\cdot\frac{PG.PH}{EG.EH}$$

que l'on peut écrire

$$\frac{MB.MC}{PD.PF}\cdot\frac{AD.AF}{AB.AC}=\frac{ML.MK}{PG.PH}\cdot\frac{EG.EH}{EK.EL}$$ relation à établir.

Remarque. — Si nous écrivons cette relation sous la forme:

$$\frac{MB.MC}{AB.AC}\cdot\frac{AD.AF}{PD.PF}\cdot\frac{PG.PH}{EG.EH}\cdot\frac{EK.EL}{MK.ML}=1,$$

on voit qu'elle exprime la relation démontrée par Carnot sur les segments déterminés par une conique sur les quatre côtés d'un quadrilatère quelconque. Le même mode de démonstration permettrait d'étendre le même théorème à un pentagone, à un hexagone, à un polygone quelconque.

§ 7. — « Nous démontrerons aussi la propriété suivante dont le premier inventeur est M. Desargues, Lyonnais, un des grands esprits de ce temps et des plus versés aux mathématiques et entre autres aux coniques, dont les écrits sur cette matière, quoique en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui auront voulu en recevoir

l'intelligence. Je veux bien avouer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits et que j'ai tâché d'imiter, autant qu'il m'a été possible, sa méthode sur ce sujet qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe, en traitant généralement de toutes les sections du cône (1). La propriété merveilleuse dont il est question est telle : si dans le plan MSQ (*fig. 11*), il y a une section de cône PQV, dans le bord de laquelle, ayant pris les quatre points

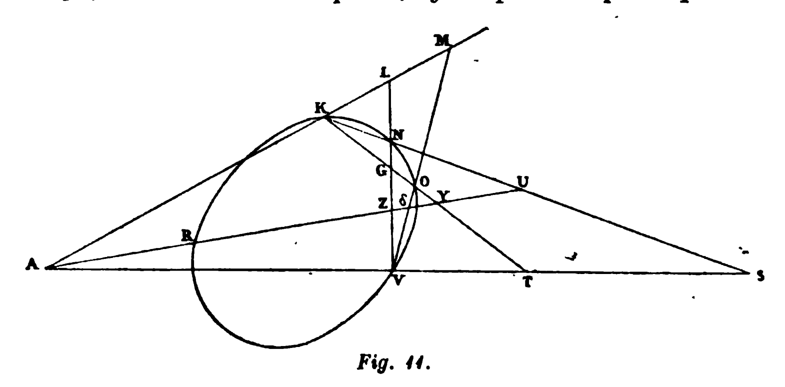


Fig. 11.

K, N, O, V soient menées les droites KN, KO. UN, VO, de sorte que par un même des quatre points ne passent que deux droites et qu'une autre droite coupe tout le bord de la section aux points R, X; que les droites KN, KO, VN, VO aux points U, Y, Z, δ, je dis que le rectangle des droites ZR, ZX est au rectangle des droites YR, YX ainsi que le rectangle de Zδ, ZU est au rectangle Yδ, YV. »

Note 7. — On peut énoncer ainsi le théorème : soit KOVN un quadrilatère inscrit dans une conique, si une transversale quelconque rencontre les quatre côtés et la courbe en six points, δ, U ; Z, Y ; R, X ; on a la relation :

$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX} = \frac{Z\delta.ZU}{Y\delta.YU}.$$

(1) Si on appelle axe d'un cône quelconque à base circulaire, la droite qui joint le sommet au centre de la base, le triangle par l'axe est l'intersection du cône par le plan passant par cet axe et perpendiculaire à la base. Apollonius n'employait comme plans sécants que les plans perpendiculaires au triangle par l'axe.

Les deux côtés KO, VN se rencontrent en G; considérons le triangle GZY dont chaque côté rencontre la conique en deux points, appliquant aux segments déterminés sur chaque côté du triangle la relation démontrée (note 5) connue aujourd'hui sous le nom de théorème de Carnot, nous avons:

$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX} \cdot \frac{YO.YK}{GO.GK} \cdot \frac{GN.GV}{ZN.ZV} = 1\,;$$

d'où
$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX} = \frac{GO.GK}{YO.YK} \cdot \frac{ZN.ZV}{GN.GV}. \qquad (1)$$

Le triangle GZY est rencontré par les deux transversales VM, KS, donc :

$$\frac{\delta Z}{\delta Y} \cdot \frac{OY}{OG} \cdot \frac{VG}{VZ} = 1 \text{ ou } \frac{Z\delta}{Y\delta} = \frac{VZ.OG}{VG.OY} \qquad (2)$$

$$\frac{ZU}{YU} \cdot \frac{KY}{GK} \cdot \frac{NG}{NZ} = 1 \text{ ou } \frac{ZU}{YU} = \frac{GK}{KY} \cdot \frac{NZ}{NG} \qquad (3)$$

multipliant (2) par (3)

$$\frac{Z\delta}{Y\delta} \cdot \frac{ZU}{YU} = \frac{GO.GK}{YO.YK} \cdot \frac{ZN.ZV}{GN.GV} \qquad (4)$$

comparant (1) et (4) les seconds membres étant identiques, on conclut :
$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX} = \frac{Z\delta.ZV}{Y\delta.YV} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Cette relation a été appelée par Desargues relation d'involution. Six points δ, U; Z, Y; R, X, étant donnés, le rapport anharmonique de quatre d'entre eux pris dans les trois groupes égale le rapport anharmonique des quatre autres; ainsi le rapport anharmonique des quatre points Z, Y, R, U égale le rapport anharmonique des quatre points Y, Z, X, δ, c'est-à-dire :
$$\frac{ZR.YU}{ZU.YR} = \frac{YX.Z\delta}{Y\delta.ZX}$$
que l'on peut écrire :
$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX} = \frac{Z\delta.ZU}{Y\delta.YU},$$
relation précédente.

Ce théorème de Desargues est aussi fécond que l'hexagramme mystique de Pascal. Nous en indiquerons plus loin quelques conséquences importantes.

§8. — « Nous démontrerons que si dans le plan de l'hyperbole

ou de l'ellipse ou du cercle AGTE *(fig. 12)*, dont le centre est C, on mène la droite AB touchante au point A la section, et qu'ayant mené le diamètre AT, on prenne la droite AB dont le carré soit égal au rectangle de la figure, et qu'on mène CB, alors quelque droite qu'on mène comme DE parallèle

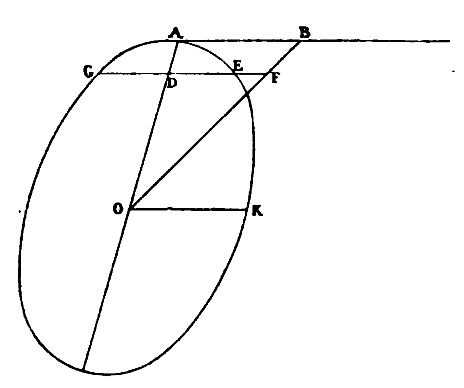


Fig. 12.

à la droite AB coupante la section en E et G, et les droites AC, CB aux points D, F, si la section AGE est une ellipse ou un cercle, la somme des carrés des droites DE, DF sera égale au carré de la droite AB, et dans l'hyperbole la différence des mêmes carrés des droites DE, DF sera égale au carré de la droite AB. »

Note 8. — Nous avons dû interpréter les mots de Pascal, *rectangle de la figure* par le carré du demi-diamètre conjugué parallèle à la tangente AB. Soit CK le demi-diamètre conjugué de CA parallèle à la tangente AB. Appelons $CA = a$ $CK = b$; $AB^2 = b^2$.

D'après la note 5, on a :

$$\frac{DE^2}{AD.DT} = \frac{CK^2}{CA^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

donc $$DE^2 = \frac{b^2}{a^2} AD(2a - AD);$$

or $$\frac{DF}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{a - AD}{a},$$

d'où $$DF^2 = \frac{b^2}{a^2}(a - AD)^2;$$

par suite $$DE^2 + DF^2 = \frac{b^2}{a^2} AD(2a - AD) + \frac{b^2}{a^2}(a - AD)^2$$

$$= 2\frac{b^2}{a} AD - \frac{b^2}{a^2} AD^2 + b^2 - 2\frac{b^2}{a} AD + \frac{b^2}{a^2} AD^2,$$

donc $$DE^2 + DF^2 = b^2$$ c. q. f. d.

Si la conique était une hyperbole, la même démonstration prouverait que $DF^2 - DE^2 = b^2$.

§ 9. — « Nous déduirons aussi quelques problèmes, par exemple : *D'un point donné mener une droite touchante une section de cône donnée.*

» *Trouver deux diamètres conjugués en angle donné.*

» *Trouver deux diamètres en angle donné et en raison donnée.*

» Nous avons plusieurs autres problèmes et théorèmes et plusieurs conséquences des précédents. Mais la défiance que j'ai de mon peu d'expérience et de capacité, ne me permet pas d'en avancer davantage avant qu'il ait passé à l'examen des habiles, qui voudront nous obliger d'en prendre la peine ; après quoi, si l'on juge que la chose mérite d'être continuée, nous essayerons de la pousser jusqu'où Dieu nous donnera la force de la conduire. »

Note 9. — Nous abrégerons dans cette dernière note les développements nombreux qu'exigerait ce paragraphe. Il nous suffira d'indiquer comment Pascal pouvait résoudre le problème de mener par un point extérieur une tangente à une conique déterminée par cinq points. D'après le troisième manuscrit que Leibnitz avait sous les yeux et dont il nous a conservé le titre, nous sommes porté à croire que Pascal employait ce que nous appelons aujourd'hui : la théorie des pôles et polaires.

1. Par un point P pris dans le plan d'une conique, menons des sécantes et cherchons le lieu géométrique des conjugués harmoniques du point donné par rapport aux points d'intersection de la conique et de la sécante.

Soient PBA, PDC *(fig. 13)* deux sécantes quelconques, F, E les conjugués harmoniques de P par rapport à A et B; C et D. Menons les droites AD, BC, elles se coupent sur FE;

soit M le point de concours de BC et de FE; M le point de concours de AD et FE.

Le triangle AFE rencontré par les deux transversales AD, BC, donne :

$$\frac{FM}{EM}\cdot\frac{ED}{PD}\cdot\frac{AP}{AF}=1. \qquad \frac{FM'}{M'E}\cdot\frac{CE}{CD}\cdot\frac{BP}{BF}=1.$$

Mais à cause de $\frac{ED}{PD}=\frac{CE}{CD}$; $\frac{AP}{AF}=\frac{BP}{BF}$ résultant des divisions harmoniques de AB et AD, on a : $\frac{FM}{EM}=\frac{FM'}{EM'}$; donc M et M′ coïncident.

On verrait de même que AC et BD se coupent sur EF.

Les tangentes en A et B à la conique se rencontrent sur la même droite FE. Considérons l'hexagone inscrit AADBBCA dont deux côtés en A, B sont infiniment petits, et ont pour directions les tangentes en A et B; les côtés opposés AA, BB; AD et BC; BD et AC se rencontrent en trois points en ligne droite; donc le point de concours H des deux tangentes en A et B est sur EF; il en sera de même des tangentes en C et D.

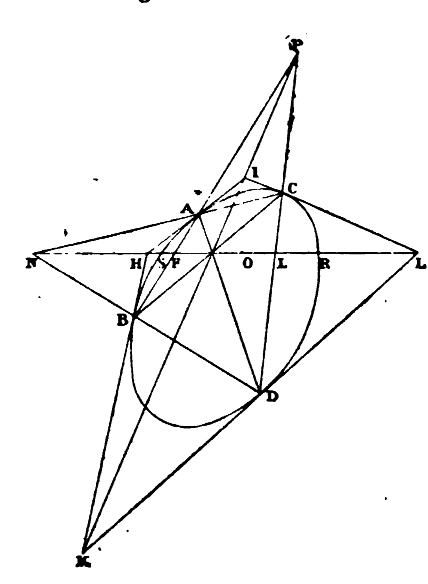


Fig. 13.

Or la droite EF est déterminée par le point H où concourent les tangentes en A et B et le point F, conjugué harmonique de P par rapport à AB; donc le lieu des points E est la droite HG que l'on peut construire en menant par le point P deux sécantes quelconques, et déterminant soit les points d'intersection M et N des droites AD, BC, AC, BC ; soient les points

H, L, où concourent les tangentes en A, B; C, D; soit en déterminant les conjugués harmoniques F, E, etc., du point P par rapport à toutes les sécantes de la conique issues de P.

On verrait de même que si par N on mène différentes sécantes, le lieu géométrique des conjugués harmoniques de N par rapport aux points d'intersection de la conique et des sécantes est la droite PK.

Incidemment, nous pouvons remarquer le théorème énoncé par Pascal dans le n° 3 de ses manuscrits; si un quadrilatère HILK est circonscrit à une conique, les diagonales de ce quadrilatère se rencontrent au point M, où concourent les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés.

2. Si par le point P on mène deux tangentes à la conique, les points de contact ne sont autre chose que les points R, S, où la droite EF rencontre la conique. En effet, faisons tourner la sécante PB autour du point P, les tangentes aux points d'intersection A et B se coupent toujours sur EF; donc, lorsque le point A se confondra avec S, le point B devra aussi se confondre avec S et la sécante deviendra tangente en S ; de même R sera le point de contact d'une seconde tangente.

Le problème de mener par P des tangentes à la conique revient donc à déterminer, comme nous avons appris à le faire, la droite EF et à trouver les points où elle rencontre la conique.

Si nous considérons les deux tangentes en A et B, on peut les regarder comme les directions de deux côtés infiniment petits d'un quadrilatère AABB; AB représente deux autres côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans la conique; la transversale HM rencontre la courbe en S et R, les côtés opposés en H, H; F, F; on a donc d'après le théorème de Désargues

$$\frac{HR.HR}{HS.HS} = \frac{FR.FR}{FS.FS} \text{ ou } \frac{HR}{HS} = \frac{FR}{FS},$$

c'est-à-dire que les points cherchés R, S divisent harmoniquement la droite FH; on verrait de la même manière que que ces points R, S divisent harmoniquement la droite EL.

Soit O le milieu de RS, on doit avoir $OS^2 = OH.OF$, $OR^2 = OE.OL$; la question revient à trouver sur RS un point O d'égale puissance par rapport aux extrémités des segments HF, EL, problème que l'on résout aisément, comme on le sait, en menant par H, F et E, L deux circonférences qui se coupent; leur corde commune rencontre EF au point cherché O.

3. Nous n'insisterons pas sur la marche à suivre pour déterminer l'intersection d'une conique donnée par cinq points avec une droite quelconque; elle est comprise implicitement dans ce qui précède. Nous croyons avoir donné assez de développement aux importants théorèmes énoncés par Pascal, son hexagramme mystique, les théorèmes de Carnot, celui de Désargues et le théorème relatif aux rapports exharmoniques, pour justifier cette opinion de Leibnitz que Pascal était en possession d'une théorie géométrique complète des coniques; et celle de M. Chasles, qu'il est avec Désargues au premier rang des fondateurs de la géométrie moderne.

AVIS

Nous n'avons pas reçu de solution des questions 132, 186, 190, 192, 212, 213, 221, 226, 233, 236, 237.

Nous prions nos lecteurs de vouloir bien nous faire parvenir les questions d'examen du baccalauréat données dans les diverses facultés, en novembre et avril, et les questions de concours académiques, aussitôt qu'ils les connaîtront.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 10022-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE
DE LA PARABOLE
ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. Launoy, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 145 et suiv.)

IV

PARABOLE

XXXVII. **Définition.** — *La parabole est une courbe plane telle que chacun de ses points est également distant d'une droite fixe nommée* directrice *et d'un point fixe nommé* foyer.

Cette définition montre assez que l'étude de la parabole est intimement liée à celle que l'on vient de faire de l'ellipse et de l'hyperbole, et qu'elle doit se faire de la même manière. Pour cela, il faut se reporter à l'équation fondamentale qui a donné les propriétés générales de l'ellipse et de l'hyperbole, savoir

$$(m^2 - n^2)x^2 - 2dm^2x + m^2(h^2 + d^2) = 0.$$

Dans le cas de la parabole, on a, par définition, $\frac{m}{n} = 1$ ou $m = n$; alors le coefficient de x^2 s'annule et l'une des racines de cette équation devient infinie; l'autre est donnée par la relation

$$x = \frac{h^2 + d^2}{2d} \qquad (1)$$

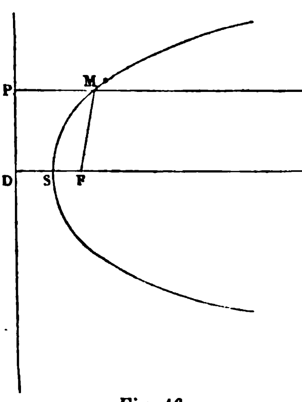


Fig. 16.

Soient (*fig. 16*), F le foyer, D la directrice d'une parabole, FD perpendiculaire à la directrice; d'après ce qui précède, toute parallèle à FD possède un point de la courbe à une distance infinie et un second point M

déterminé par la relation (1); on peut donc dire encore que toute parallèle à FD contient deux points de la courbe et en conclure que la parabole est une courbe du *second degré.*

XXXVIII. — *La parabole est une courbe à branches infinies possédant un axe de symétrie.*

La relation (1) est indépendante du signe de h; si donc on mène de part et d'autre de FD deux parallèles à cette droite à la distance h, les deux points M et M′ de la courbe situés sur ces parallèles seront également distants et de la droite FD et de la directrice D; ces deux points seront donc symétriques par rapport à FD.

Remarque. — Pour $h = 0$, la relation (1) donne

$$x = \frac{d}{2};$$

le point correspondant S est donc à égale distance du foyer et de la directrice, ce qui était évident; c'est le *sommet* de la parabole.

A toute valeur de h correspond pour x une valeur réelle; donc toute parallèle à FD contient un point de la courbe, défini par l'équation (1); de plus, x augmente avec h, c'est-à-dire que les points qui correspondent à des valeurs de plus en plus grandes de h, s'éloignent de plus en plus de la directrice et donnent naissance des deux côtés de l'axe à deux branches infinies symétriques.

XXXIX. **Théorème.** — *La parabole est la limite vers laquelle tend une ellipse ou une hyperbole dont un des foyers et la directrice correspondante restent fixes tandis que l'autre foyer s'éloigne indéfiniment du premier.*

On a vu que la position du centre, du second foyer et de la seconde directrice d'une ellipse ou d'une hyperbole dépendait de la relation $\frac{x' + x''}{2} = \frac{dm^2}{m^2 - n^2}$,

x' et x'' étant les racines de l'équation que l'on sait; si l'on suppose que le rapport $\frac{m}{n}$ varie de manière à devenir égal

à 1, cette somme $\frac{x' + x''}{2}$ à la limite devient infinie, c'est-à-dire que le centre est rejeté à l'infini, de même que le second foyer et la seconde directrice ; la courbe est devenue une parabole.

Remarque I. — Dans l'hypothèse précédente, une seule longueur est restée fixe ; c'est la distance d ; elle porte le nom de *paramètre* ; c'est évidemment la longueur qui définit une parabole ; on la désigne par p.

Remarque II. — Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, cette distance d a pour expression $\frac{b^2}{c}$, en fonction des axes ; or, dans la transformation en parabole d'une ellipse ou d'une hyperbole, les longueurs a, b, c sont devenues très grandes ; seule la quantité $\frac{b^2}{c}$, ou, puisque $\frac{c}{a} = 1$ à la limite, la quantité $\frac{b^2}{a}$ reste fixe ; donc, *la parabole est la limite d'une ellipse ou d'une hyperbole dont un foyer et la directrice correspondante restent fixes et la longueur des axes augmente indéfiniment, le rapport* $\frac{b^2}{a}$ *ayant une limite finie.*

XL. **Théorème.** — *Le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe est proportionnel à la distance de cette corde au sommet.*

Soit (*fig. 16*) MM' une telle corde, $2h$ sa longueur ; on a, en vertu de la relation (1) dans laquelle on a remplacé d par p

$$h^2 = 2px - p^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

or, d'après la figure,

$$SQ = x - \frac{p}{2}, \quad h = \frac{MM'}{2}$$

donc
$$\overline{MM'}^2 = 8p \times SQ$$

Remarque. — Si l'on définit un point d'une parabole par sa distance $MQ = y$ à l'axe, ou *ordonnée*, et par sa distance $SQ = x$ à la tangente au sommet, ou *abscisse*, on voit que chaque point satisfait à la relation $y^2 = 2px$
qui est l'*équation* de la parabole.

XLI. **Théorème.** — Réciproquement, *le lieu des points tels que le carré de leur distance à une droite fixe est proportionnel à leur distance à une autre droite perpendiculaire à la première, est une parabole.*

Soient *(fig. 17)* Sx et Sy les deux droites rectangulaires, M un point du lieu, c'est-à-dire, tel que k étant une constante, on ait
$$\overline{MQ}^2 = 2k SQ$$

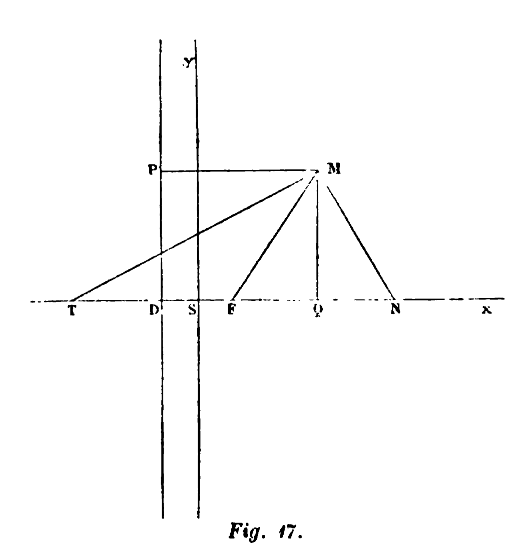


Fig. 17.

Si l'on prend $QN = k$ et si au point M on élève la perpendiculaire MT à MN, le triangle rectangle TMN donne
$$\overline{MQ}^2 = TQ \times QN = TQ \times k$$
Des deux relations précédentes, on conclut évidemment
$$TQ = 2SQ$$
ou que le point S est le milieu de TQ.

Cela étant, soient les points F et D, de part et d'autre du point S, et tels que $SF = SD = \frac{k}{2}$
il est facile de voir que le point F est le milieu de TN et par suite que $MF = FT$; de plus, la figure montre que
$$TF = TS + \frac{k}{2} = DS + SQ = DQ = MP$$

d'où résulte évidemment l'égalité

$$MF = MP$$

qui constitue la définition même de la parabole, le point F étant fixe de même que la droite DP, parallèle à Sy.

XLII. **Théorème.** — *Le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est une parallèle à l'axe.*

Soient *(fig. 18)* M et M' deux points tels que la corde MM' fasse avec l'axe un angle donné θ; MQ et MQ' deux perpendiculaires à l'axe; on a (XL, Remarque),

$$\overline{M'Q'}^2 = 2p \times SQ'$$
$$\overline{MQ}^2 = 2p \times SQ$$

et, en faisant la soustraction, membre à membre,

$$\overline{M'Q'}^2 - \overline{MQ}^2 = 2p(SQ' - SQ)$$

Soit MN, parallèle à l'axe; la figure montre que

$$\text{tg } M'MN \text{ ou tg } \theta = \frac{M'N}{MN} = \frac{M'Q' - MQ}{SQ' - SQ}$$

or, la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{M'Q' - MQ}{SQ' - SQ} = \frac{2p}{M'Q' + MQ}$$

donc, on a l'égalité $\quad \text{tg } \theta = \frac{2p}{M'QMQ' +}$

qui prouve que la somme M'Q' + MQ ou $\frac{M'Q' + MQ}{2}$ est constante pour un angle donné θ; or cette distance est précisément celle du milieu I de la corde MM' à l'axe, donc ce point décrit une parallèle à l'axe lorsque la corde MM' varie en conservant sa direction.

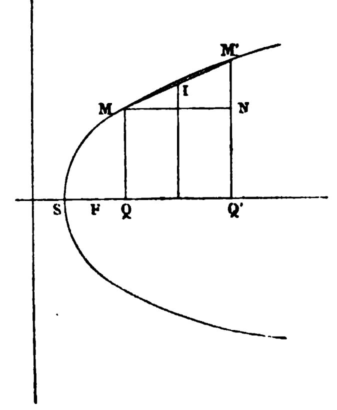


Fig. 18.

Remarque I. — On appelle en général *diamètre* d'une courbe *le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée;* dans la parabole, les diamètres sont des droites parallèles à l'axe.

REMARQUE II. — La corde MM′ prenant toutes les positions que l'on vient de définir, il arrivera que les points M et M′ se confondront; la droite MM′ sera alors tangente à la parabole et le milieu de MM′ sera le point de contact. Donc, *si par un point d'une parabole on mène une parallèle à l'axe, les cordes parallèles à la tangente en ce point seront partagées en deux parties égales par cette parallèle.* *(A suivre.)*

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir p. 201 et suiv.)

II

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE QUELCONQUE

9. *Dans un triangle quelconque on a*

$$\frac{c^2}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{\sin (A - B)}.$$

En effet, on a

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a \cos B - b \cos A}{\sin (A - B)};$$

d'autre part, on a $c = a \cos B + b \cos A$.

Multipliant le premier rapport par c et le dernier par le second membre, il vient

$$\frac{c^2}{\sin C} = \frac{a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A}{\sin (A - B)} = \frac{a^2 - b^2}{\sin (A - B)}$$

en remplaçant les cosinus par leur valeur en fonction du sinus et remarquant que l'on a

$$a \sin B = b \sin A.$$

10. *Dans un triangle quelconque on a*

$$4abc \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2} = (a - b)(a + b + c)(a + b - c).$$

En effet, le premier membre peut s'écrire

$$2abc(\cos B - \cos A) = b \;.\; 2ac \cos B - a \;.\; 2bc \cos A.$$

de même $b = r_b \dfrac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}$ $c = r_c \dfrac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}$

Or, le second membre est égal à

$$b(a^2 + c^2 - b^2) - a(b^2 + c^2 - a^2) = (b + a)(a^2 - b^2)$$
$$- c^2(a - b) = (a - b)(b + a + c)(b + a - c).$$

11. *Si* A = 2B, *on en déduit*

$$a^2 = b(b + c).$$

En effet, l'hypothèse nous donne

$$\sin C = \sin 3B.$$

Or, la seconde égalité peut s'écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{b + c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

ou bien $\dfrac{\sin A}{\sin B} = \dfrac{\sin B}{\sin A} + \dfrac{\sin C}{\sin A}$;

cette égalité devient

$$\frac{\sin 2B}{\sin B} = \frac{\sin B + \sin 3B}{\sin 2B}$$

ou bien, après réduction,

$$\sin 2B = 2 \sin B \cos B$$

formule connue.

12. On a les égalités :

$$p = r_a \operatorname{cotg} \frac{A}{2}; \quad p = r_b \operatorname{cotg} \frac{B}{2}; \quad p = r_c \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

On en tire

$$p^3 = r_a r_b r_c \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} =$$
$$r_a r_b r_c \left(\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}\right)$$

en vertu d'une relation connue entre les angles d'un triangle.

On a aussi :

$$a = r^a \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) = r^a \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = r^a \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

On en tire

$$abc = r_a r_b r_c \frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Donc

$$\frac{p^3}{abc} = \frac{\cotg\frac{A}{2} + \cotg\frac{B}{2} + \cotg\frac{C}{2}}{\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}} = \frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

13. Des formules qui donnent la surface, on déduit facilement $\sin A = \frac{2S}{bc}$; $\sin B = \frac{2S}{ca}$; $\sin C = \frac{2S}{ab}$.
on en tire par addition ou soustraction :

$$\frac{2S}{c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \sin A + \sin B = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{2S}{c}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

n multipliant membre à membre il vient :

$$\frac{4S^2}{c^2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \sin(A - B)\sin C$$

Mais puisque $\sin C = \frac{2S}{bc}$, il vient :

$$\frac{2S(a^2 - b^2)}{abc^2} = \sin(A - B).$$

14. *Dans un triangle on a*

$$S^3 = \frac{1}{16}a^2b^2c^2(\sin^2 A \sin 2B + \sin^2 B \sin 2A)$$

En effet, si je remplace sin 2B et sin 2A par leur valeur, on trouve

$$S^3 = \frac{1}{8}a^2b^2c^2 \sin A \sin B(\sin A \cos B + \sin B \cos A)$$

ou $S_3 = \frac{1}{8}a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C.$

Or, on a $2S = ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$
en multipliant, on trouve

$$8S^3 = a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C:$$

c'est la formule à établir.

15. *Si dans un triangle on a les deux relations*

$$\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2, \qquad \sin A \sin B = \frac{3}{4}$$

le triangle est équilatéral.

En effet, la première relation donne, après simplification

$$a^3 + b^3 = (a + b) c^2;$$

ou bien, en divisant par $(a + b)$, qui n'est pas nul,

$$a^2 + b^2 - ab = c^2.$$

Donc déjà $\cos C = \frac{1}{2}$ et $C = 60°$;

par suite, $A + B = 120°$.

La seconde relation donne

$$\cos (A - B) - \cos (A + B) = \frac{3}{2};$$

comme $\cos (A + B) = -\frac{1}{2}$,

on a $\cos (A - B) = 1$,

ou $A - B = 0$.

Donc $A = B = 60$.

(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1880

Composition de mathématiques (trois heures).

PREMIÈRE QUESTION. — *Calcul logarithmique. — Calculer la valeur de* x *donnée par la formule*

$$x = R\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta},$$

dans laquelle

$$R = 6366^m{,}73, \quad \alpha = 67°42'28'', \quad \beta = 48°53'17''.$$

On a $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)(\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) = - \cos (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta) = \cos (\alpha - \beta) \cos (180^\circ - \alpha - \beta)$.

Donc
$$\log x = \log R + \frac{1}{2} \log \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \log \cos (180^\circ - \alpha - \beta).$$

$$\alpha - \beta = 18^\circ\ 49'\ 11''$$
$$180^\circ - \alpha - \beta = 63^\circ\ 24'\ 15''$$
$$\log 6366{,}73 = 3{,}8039164\ 4$$
$$\frac{1}{2} \log \cos 18^\circ\ 49'\ 11'' = \bar{1}{,}9880690\ 9$$
$$\frac{1}{2} \log \cos 63^\circ\ 24'\ 15'' = \bar{1}{,}8254906\ 7$$
$$\log x = 3{,}6174762$$
$$x = 4144{,}539$$

2e Question. — *On donne un cône à base circulaire dont* h *est la hauteur et* R *le rayon de base, et l'on demande de déterminer la quantité* x *dont il faut diminuer la hauteur et augmenter le rayon pour que le cône, ayant* h — x *pour hauteur et* R + x *pour rayon de base, soit équivalent au cône donné. — Le problème est-il toujours possible?*

L'équation du problème est
$$\frac{1}{3} \pi^2 Bh = \frac{1}{3} \pi (R + x)^2 (4 - x).$$
ou bien, en développant, supprimant le facteur commun $\frac{1}{3} \pi R^2$, et divisant par x, ce qui revient à écarter la solution $x = 0$: $\quad x^2 - x(h - 2R) + R^2 - 2Rh = 0$.

Les valeurs de x sont données par la formule
$$x = \frac{h - 2R \pm \sqrt{h^2 + 4hR}}{2}$$

On voit qu'elles sont toujours réelles; mais, d'après l'énoncé, on doit rejeter les valeurs négatives.

Le produit des racines est $R(R - 2h)$, leur somme est $h - 2R$. Si l'on a $h < \frac{R}{2}$, le produit est positif, la somme négative; donc les deux racines sont négatives et inadmis-

sibles; il faudrait diminuer le rayon et augmenter la hauteur, ce qui est contraire à l'énoncé.

Lorsque h est plus grand que $\frac{R}{2}$, le produit est négatif, la somme négative ou positive, suivant que l'on a $h < 2R$ ou $h > 2R$. Il y a donc toujours dans ce cas une racine admissible, et il n'y en a jamais plus d'une.

3ᵉ QUESTION. — *Inscrire dans un secteur circulaire donné* AOB, *dont l'angle au centre* O *vaut* 45°, *le rectangle dont la diagonale est minimum, un côté du rectangle étant placé sur le rayon* OA. *On donnera la valeur de la diagonale et celle du rapport des deux côtés du rectangle.*

Soit CDEF le rectangle inscrit; prenons pour inconnue l'angle $AOE = x$. On a $DE = R \sin x$, $CD = R \cos x - OC$, et comme $OC = CF = DE$, $CD = R(\cos x - \sin x)$.

En appelant d la diagonale, on aura

$$R^2 \sin^2 x + R^2 (\cos x - \sin x)^2 = d^2$$

ou bien
$$1 + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{d^2}{R^2}.$$

Cette équation devient, en remplaçant $\sin^2 x$ par $\frac{1 - \cos 2x}{2}$:

$$2 \sin 2x + \cos 2x = 3 - \frac{2d^2}{R^2}$$

ou
$$\sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{3R^2 - 2d^2}{2R^2}.$$

D'après la méthode bien connue, il suffit de poser $\frac{1}{2} = \operatorname{tg} \varphi$ (d'où $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$) pour obtenir l'équation simple

$$\sin (2x + \varphi) = \frac{3R^2 - 2d^2}{2R^2} \cos \varphi = \frac{3R^2 - 2d^2}{R^2 \sqrt{5}}.$$

Le second membre doit être compris entre -1 et $+1$, ce qui donne les inégalités $3R^2 - 2d^2 < R^2 \sqrt{5}$ et $2d^2 - 3R^2 > R^2 \sqrt{5}$.

La première donne le minimum demandé; d^2 doit être plus grand que $\frac{R^2(3 - \sqrt{5})}{2}$. On voit sans peine que le mini-

mum de la diagonale est égal au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison; car ce segment a pour valeur $\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ et son carré est $\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}$ ou $\frac{R^2(3-\sqrt{5})}{2}$.

Calculons les côtés du rectangle et leur rapport. On a, pour le minimum de d^2, $\sin(2x+\varphi)=1$. Donc

$$2x = 90^\circ - \varphi, \quad \sin 2x = \cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos 2x = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$$

Le carré du côté DE est $\mathrm{DE}^2 = R^2\sin^2 x = \frac{R^2(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$
$= \frac{R^2(5-2\sqrt{5})}{10}$

De même $\mathrm{CD}^2 = R^2(\cos x - \sin x)^2 = R^2(1-\sin 2x)$
$= \frac{R^2(5-2\sqrt{5})}{5}$.

Enfin $$\frac{\overline{\mathrm{DE}}^2}{\overline{\mathrm{DC}}^2} = \frac{10-4\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(5-\sqrt{5})(10+4\sqrt{5})}{20}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

et $$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DC}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On donne : 1° un plan PαP′ *dont les traces font avec la ligne de terre des angles* PαY = 45° ; P′αY = 36° ; *et 2° un point* S *situé dans ce plan à* 42 *millimètres en avant du plan vertical de projection, et à* 54 *millimètres au-dessus du plan horizontal ;*

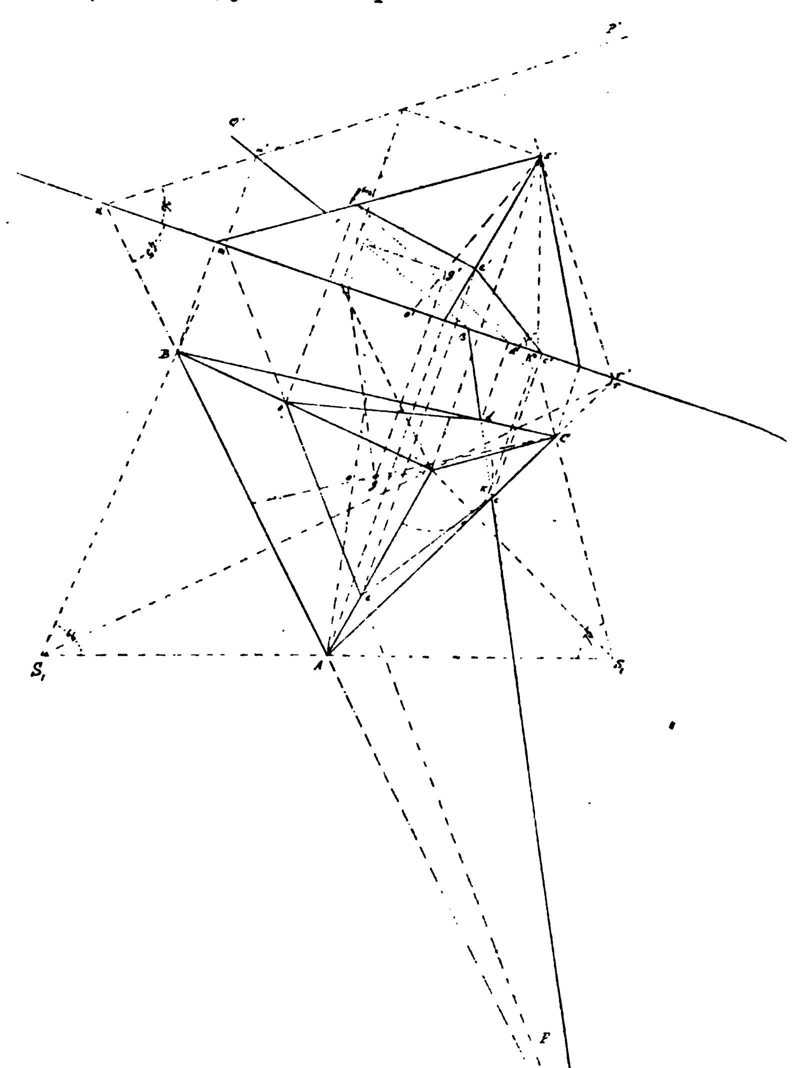
On demande :

1° De construire les projections d'une pyramide triangulaire SABC. *ayant pour sommet le point* S *et s'appuyant sur le plan horizontal par sa base* ABC *(le point* A *étant le plus éloigné de la ligne de terre), au moyen des données suivantes : le plan de la face* ASC *est perpendiculaire au plan* PαP′, *et fait un angle de* 72° *avec le plan horizontal ; la face* ASB *est située dans le plan* PαP′ ; *l'angle plan* ASC = 75° ; *l'angle plan* ASB = 66° ; *2° de mener par le centre de gravité* G *de la pyramide un plan perpendiculaire à la droite* SG, *qui joint ce centre de gravité au sommet* S, *et de construire les projections de la section faite par ce plan dans le solide.*

Rappelons d'abord que pour trouver le point S, on prend l'intersection de l'horizontale du plan ayant une cote de 54 millimètres avec la ligne de front du plan ayant un éloignement de 42 millimètres.

I. *Projection de la pyramide.* — Par (s,s'), je mène une perpendiculaire $(sr,s'r')$ au plan, et je cherche sa trace horizontale (r,r') ; par le même point (s,s') je mène une ligne de front $(sk,s'k')$ dont la projection verticale fasse avec la ligne de terre l'angle de 72°, et de s comme centre, avec sk pour rayon je décris une circonférence ; je mène par le point r une tangente rA à cette circonférence ; c'est la trace de la face ASC de la pyramide. Cette trace rencontre αP au point A ; SA est l'une des arêtes de la pyramide. Pour avoir les autres sommets de la base, je rabats d'abord le plan PαP′ autour de sa trace horizontale ; j'ai ainsi le rabattement AS_1 de l'arête SA, et je fais au point S_1 un angle $AS_1B = 66°$;

le point B, où S_1B rencontre αP est le second sommet de la base ; de même, je rabats le plan de la face ASC autour de



rA ; il me suffit pour cela de mener de s une perpendiculaire sur la trace, et, du point A comme centre, avec AS_1 pour

rayon, de décrire un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire précédente en S_2; ensuite, je mène S_2C, faisant avec AS_2 un angle de 75°; le point C est le troisième sommet de la base. — J'ai donc les sommets de la pyramide en projection horizontale. Les sommets A,B,C se projettent verticalement sur la ligne de terre; par suite je puis compléter les projections de la figure.

II. *Plan sécant et section plane.* — Le centre de gravité G de la pyramide s'obtient de la manière suivante: on prend le point O d'intersection des médianes de la base ABC; on joint le point S' au point O, et on prend OG égal au quart de OS.

Le plan sécant passant par ce point G sera déterminé par ses traces; sa trace horizontale rencontre en *c* et *d* la base de la pyramide: on a ainsi deux points de l'intersection. Pour avoir d'autres points de l'intersection, je prends l'intersection du plan Q'βP avec le plan donné P'αP, qui contient la face ASB; cette droite d'intersection rencontre SB au point (*f*,*f'*) et SA au point (*e*,*e'*); en joignant le point (*d*,*d'*) au point (*f*,*f'*) et le point (*c*,*c'*), au point (*e*,*e'*), on aura l'intersection complète.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS A SAINT-CYR

— Calculer en fonction des trois côtés d'un triangle la médiane, la bissectrice et la hauteur issues du sommet A, ainsi que le rayon du cercle circonscrit.

— Par le sommet d'un triangle ABC, mener une droite AX telle que le produit des projections des côtés AB et AC sur cette droite soit égal à un carré donné.

— Calculer le rayon de la circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée, en fonction des distances des deux points à la droite et de l'angle que fait la droite qui joint les deux points avec la droite donnée,

— Construire sur les côtés d'un carré des rectangles tels que, en joignant les sommets voisins, on forme un octogone régulier.

— On donne un cylindre et une sphère de rayon R reposant sur le plan de base du cylindre. Couper ces deux corps par un plan parallèle au premier, de façon que les volumes compris entre les deux plans soient équivalents.

— Inscrire dans un triangle donné une droite telle que les deux parties du triangle aient même périmètre et même surface.

— Circonscrire à une sphère un cône de surface donnée.

— Trouver le côté d'un triangle équilatéral, sachant que s'il augmente de a, sa surface augmente de b^2.

— Un triangle rectangle isocèle a 1 mètre de côté de l'angle droit. On construit sur l'un des côtés un carré et sur l'autre un triangle équilatéral, et on joint les deux sommets voisins de ces deux figures. Calculer à 0.01 près le rayon du cercle équivalent au polygone ainsi formé.

— Trouver sur la distance des centres de deux sphères un point d'où l'on voie sur les deux sphères deux zones équivalentes.

— Étant donnés un demi-cercle et un point A sur le diamètre prolongé, on mène par le point A une droite AB sous un angle donné; déterminer B sur cette droite de façon que, si l'on mène la tangente BC à la circonférence, on ait $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$.

— Étant donnée une sphère, mener un cône qui lui soit tangent de manière que sa surface latérale, limitée à la sphère, soit égale à la surface de la grande calotte sphérique qui a pour base la base du cône.

— Trouver, en fonction du rayon d'un cercle et des angles que font les rayons extrêmes avec l'axe de révolution : 1° le volume engendré par un secteur circulaire; 2° le volume engendré par le segment circulaire correspondant.

— Etant donné un segment sphérique à une base, calculer les volumes v et V de deux cônes, l'un inscrit, l'autre circonscrit au segment, et qui ont même base que lui. On suppose le segment moindre que la demi-sphère.

— A un demi-cercle on circonscrit un trapèze isocèle dont la grande base soit dirigée suivant le diamètre de ce demi-cercle. Déterminer cette base de manière que, toute la figure tournant autour du diamètre, le trapèze engendre un solide qui soit à celui de la sphère décrite par le demi-cercle comme 3 est à 2.

— Dans un cercle de rayon R, on prend un secteur dont l'angle au centre comprend n degrés. Calculer les éléments du cône droit sur lequel s'enroule exactement le secteur circulaire.

— Calculer en fonction des trois côtés d'un triangle le rayon du cercle qui a son centre sur le côté a, et est tangent aux deux autres côtés.

— Calculer le volume du cube inscrit dans un cône dont le rayon est R et la hauteur H.

— Calculer les trois angles A, B, C d'un triangle sachant que l'on a

$$\text{tg A tg B} = p; \quad \text{tg B tg C} = q.$$

— Calculer la hauteur d'un tronc de cône dont le volume est égal à la différence des volumes des sphères construites sur les bases comme grands cercles.

— On connait la somme A des m premiers termes d'une progression arithmétique, et celle B de n premiers termes de la progression; calculer le premier terme et la raison de cette progression.

— On donne une sphère, le cylindre circonscrit à la sphère, et le cône à deux nappes inscrit dans le cylindre. Si l'on mène un plan perpendiculaire à l'axe commun du cylindre et du cône, la section de la sphère est égale à la différence entre la section du cylindre et celle du cône, et si l'on mène deux plans perpendiculaires à l'axe commun, le segment sphérique compris entre ces deux plans est équivalent à la différence entre les segments correspondants du cylindre et du cône.

— Dans une demi-sphère, inscrire un tronc de cône droit de surface totale maxima.

— Un cylindre et un tronc de cône ont même hauteur; le cylindre a pour base la section équidistante des deux bases du tronc de cône. Calculer la différence entre le volume du tronc et celui du cylindre.

— A une sphère donnée, circonscrire un cône dont la surface latérale soit

égale à celle du cercle qui a pour rayon la distance du sommet du cône au centre de la sphère.

— Calculer les trois côtés d'un triangle, sachant que ces côtés sont trois nombres entiers consécutifs, et que la surface du triangle est égale au triple produit du côté moyen par la différence des côtés extrêmes.

— On donne la base $2b$ et la hauteur h d'un triangle isocèle; calculer le rayon R du cercle circonscrit au triangle.

— Trouver trois nombres entiers consécutifs dont le produit soit égal à n fois la somme, n étant entier.

— Par un point donné, mener une sécante à un cercle donné, de manière que la projection de la partie située dans le cercle sur le diamètre qui passe par le point ait une longueur donnée.

— Sur les côtés d'un triangle équilatéral, qui a pour centre le centre d'un cercle de rayon R, on construit des triangles isocèles ayant leurs sommets sur la circonférence. Quel doit être en fonction du rayon le côté du triangle équilatéral pour que le volume du tétraèdre qui a pour base ce triangle équilatéral et pour faces latérales les triangles isocèles, soit maximum.

— Trouver le maximum de $x^m y^n$ sachant que $ax^p + by^q$ est constant.

— Déterminer une progression géométrique de quatre termes connaissant l'excès a de la somme des termes extrêmes sur la somme des termes moyens et l'excès b^2 de la somme des carrés des termes extrêmes sur la somme des carrés des termes moyens.

— On a le produit $a^x b^y c^z$. Lorqu'on divise par a, le nombre des diviseurs diminue de α; si on divise par b, le nombre des diviseurs diminue de β; si on divise par c, le nombre des diviseurs diminue de γ. Trouver x, y, z.

— Etant donnée une demi-circonférence de diamètre AB, mener par le point A une sécante telle que la partie intérieure à la circonférence soit égale au segment que cette droite détermine sur la tangente en B.

— On coupe un trièdre trirectangle par un plan rencontrant les arêtes à des distances a, b, c du sommet. Trouver la surface du triangle de section.

— Résoudre un triangle connaissant l'un des angles, le côté opposé et la médiane correspondante.

— On construit extérieurement un demi-cercle sur chacun des côtés d'un triangle, et on prend les milieux des arcs ainsi tracés. Trouver les côtés et la surface des triangles qui a pour sommets les trois points ainsi déterminés.

— Trouver la valeur de $\dfrac{x + y}{x' + y'}$ déduite des équations

$$x \cos \alpha + x' \sin \alpha = x \cos \beta + x' \sin \beta$$
$$= y \cos \gamma + y' \sin \gamma = y \cos \delta + y' \sin \delta = 1$$

et montrer qu'elle ne change pas quand on intervertit l'ordre des angles.

— Dans un triangle on donne a, A et $b + c$, ou c, A et $a + b$. Résoudre dans chaque cas le triangle au moyen d'une table de logarithmes.

— Si la médiane AD d'un triangle rencontre en D le côté BC, on a

$$\text{Cotg BAD} - \text{cotg CAD} = \text{cotg B} - \text{cotg C}.$$

— Si x, y, z sont les longueurs des bissectrices d'un triangle respectivement opposées aux côtés a, b, c, on a

$$(b + c)^2 \frac{x^2}{bc} + (c + a)^2 \frac{z^2}{ca} + (a + b)^2 \frac{z^2}{ab} = (a + b + c)^2.$$

— Soit TT' la tangente en un point A à une circonférence donnée OA. On mène dans le cercle un diamètre BC, et on abaisse les perpendiculaires BB', CC' sur la tangente. Déterminer la direction du diamètre BC de façon que la surface

totale du tronc de cône engendré par le trapèze BCC'B' tournant autour de la tangente TT' soit dans un rapport donné avec la surface du cercle OA. Discuter le problème.

— On donne un angle XOY et deux points fixes A et B sur l'un des côtés. Trouver sur l'autre le point M d'où l'on voit le segment AB sous l'angle maximum.

— On donne une pyramide régulière triangulaire. Les arêtes aboutissant au sommet ont pour longueur a, et l'angle des deux arêtes est A. Calculer le volume de la pyramide. — Si a reste constant, quelle doit être la valeur de A pour que le volume soit maximum?

— Exprimer l'aire d'un triangle en fonction des trois hauteurs, ou en fonction des quatre rayons des cercles inscrits et ex-inscrits.

— Partager une droite en trois parties telles que la droite entière soit à une des parties extrêmes comme l'autre partie extrême est à la moyenne partie, et que cette dernière soit maxima.

— Un mobile décrit une circonférence de rayon égal à 100^m. Au bout de $2^h 17^m$, l'arc qu'il a parcouru a une corde de 125^m. On demande le nombre de degrés, minutes et secondes, compris dans cet arc, et la vitesse angulaire supposée uniforme.

— Une colonne verticale de hauteur h est surmontée d'un mât de longueur l. A quelle distance horizontale du pied de la colonne faut-il se placer pour voir la colonne et le mât sous des angles égaux?

— Une sphère et un cube ont même surface. Trouver le rapport de leurs volumes.

— AB et AC sont les cordes des arcs de 60 et de 90° dans un cercle de centre O. Montrer que si l'on prolonge AB et OC jusqu'à leur rencontre en D, l'arc dont la corde est DC a son cosinus égal à sa corde.

— Si l'on pose $A + B + C = 2S$, on a

$$\cos 2S + \cos 2(S - A) + \cos 2(S - B) + \cos 2(S - C) = 4 \cos A \cos B \cos C.$$

— Si a, b, c, sont les côtés d'un triangle dont l'angle C est droit, on a l'égalité

$$\cos (2A - B) = \frac{a}{c^2} (3c^2 - 4a^2).$$

— Si a et a' sont les côtés homologues de deux triangles semblables inscrits et circonscrits au même triangle, on a

$$\frac{a}{a'} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

— Si les tangentes des demi-angles d'un triangle plan sont en progression arithmétique, démontrer que les cosinus des angles entiers sont aussi en progression arithmétique.

— Si l'on a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, avec

$$\sin^3 \theta = \sin (\alpha - \theta) \sin (\beta - \theta) \sin (\gamma - \theta),$$

on a aussi $\cot g\, \theta = \cot g\, \alpha + \cot g\, \beta + \cot g\, \gamma$

ou $\text{coséc}^2\, \theta = \text{coséc}^2\, \alpha + \text{coséc}^2\, \beta + \text{coséc}^2\, \gamma$.

— Si les côtés d'un triangle sont $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$, a, b, c, A, B, C étant les éléments d'un autre triangle, les angles du premier sont les suppléments des angles 2A, 2B, 2C.

— Si A', B', C' sont les angles sans lesquels on voit les côtés d'un triangle du centre du cercle inscrit, on a la relation

$$4 \sin A' \sin B' \sin C' = \sin A + \sin B + \sin C.$$

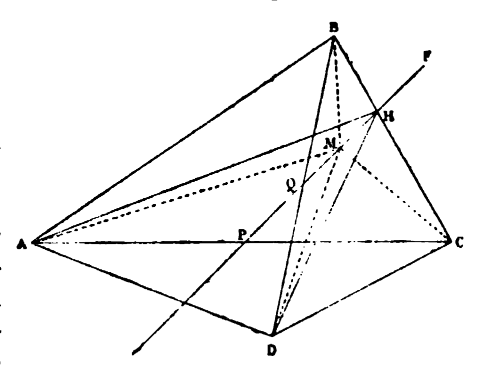
QUESTION 169

Solution, par M. Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées.

Dans un quadrilatère ABCD, *la ligne* EF *qui joint les milieux des diagonales coupe en* H *le côté* BC. *Démontrer que le triangle* AHD *est équivalent à la moitié du quadrilatère.*

(Barrieu.)

Si l'on prend un point M dans l'intérieur du quadrilatère et sur la ligne qui joint les milieux des diagonales, et si l'on joint ce point aux quatre sommets par les droites MA, MB, MC, MD, on sait que la somme des deux triangles MAD, MBC qui ont M pour sommet commun et pour bases les côtés opposés AD et BC du quadrilatère, est équivalente à la moitié du quadrilatère (page 29, 3me année, concours académiques de Paris, 1878, 1°).



A mesure que le point M se rapproche de H, le triangle MAD augmente et MBC diminue; mais dans toutes les positions que le point M peut occuper dans l'intérieur de la figure sur la droite EF, la somme des deux triangles MAD et MBC est constamment équivalente à la moitié du quadrilatère; donc quand les points M et H se confondent, l'aire du triangle MBC est nulle et le triangle HAD es équivalent à la moitié du quadrilatère donné.

Ce problème n'est donc qu'un cas particulier de la question résolue page 29.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Berthiot, Neret, Gangnery, de Sézanne (Marne); Hugot, de Lyon; Deslais, du Mans; Martin, de Passy.

QUESTION 171

Solution, par M. Hugot, de Lyon.

Dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, A étant l'angle moyen, on a

$$tg\,\frac{B}{2}\,tg\,\frac{C}{2} = \frac{1}{3};\quad cotg\,\frac{B}{2} + cotg\,\frac{C}{2} = 2\,cotg\,\frac{A}{2}.$$

(Burnier.)

Soit a le côté moyen, h la raison de la progression.

On a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a-h}{\sin B} = \frac{a+h}{\sin C} = \frac{3a}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

donc

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

ou $$\frac{1}{3} = \frac{\cos\frac{B+C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{tg}\,\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2}\right)$$

d'où $$\mathrm{tg}\,\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

En second lieu

$$r = \frac{a}{\mathrm{cotg}\,\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{C}{2}} = \frac{a-h}{\mathrm{cotg}\,\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{a+h}{\mathrm{cotg}\,\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{3a}{2\left(\mathrm{cotg}\,\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{C}{2}\right)};$$

donc $$3\left(\mathrm{cotg}\,\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

d'où
$$\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{A}{2}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question: MM. Blessel, à Paris; Renaud, à Bordeaux; Gindre, à Lons-le-Saunier; Gino-Loria, à Mantoue, Italie; Longueville, à Charleville; Martin, à Passy; Croneau, Lachesnay, à Versailles; Speckel, à Sedan; Dubief, à Cluny; Vermand, à Saint-Quentin; Sers, sergent d'infanterie de marine, à Cherbourg; Bucheron, à Sainte-Barbe; Vazou, collège Rollin.

QUESTION 172

Solution par M. DESLAIS, élève du Lycée du Mans.

Le produit des trois côtés d'un triangle rectangle évalués en nombres entiers est toujours divisible par 60.

Nous rappellerons la règle suivante, donnée par Proclus, pour trouver une expression rationnelle des côtés dun triangle rectangle.

En désignant le plus petit côté par un nombre impair, si du carré de ce nombre impair on retranche l'unité et qu'on divise le reste par 2, *on a le plus grand côté de l'angle droit. Enfin, ajoutant l'unité à cette formule, on a l'hypoténuse* (2[e] année, p. 50).

D'après ce qui précède le produit des trois côtés sera

$$2n(n+1)(2n+1)[2n(n+1)+1].$$

Pour que ce produit soit divisible par 60, il faut qu'il le soit par 3, 4, 5.

Or, on voit pour $n = M.3+1$, $2n+1 = M.3$.

Pour $n = M.3+2$, $n+1 = M.3$, enfin n entrant comme facteur, la proportion sera vraie pour $n = M.3$.

Ainsi, quel que soit n, ce produit est divisible par 3.

Maintenant si $n = M.2$, $2n = M.4$ et si $n = M.2+1$ $n+1 = M.2$; par suite $2n\,(n+1) = M.4$.

Par conséquent, pour toute valeur de n le produit est divisible par 4.

Enfin, supposons $n = M.5+1$; alors $2n = M.5+2$ et $n+1 = M.5+2$.

Par suite $2n(n+1)+1=(M.5+2)(M.5+2)+1=M.5$.

Pour $n=M.5+2$, $2n+1=M.5$.

Pour $n=M.5+3$, $2n=M.5+6$ et $n+1=M.5+4$. Par suite

$$2n(n+1)+1=(M.5+6)(M.5+4)+1=M.5.$$

Enfin, si $n=M.5+4$, $n+1=M.5$.

On voit donc que pour toutes les valeurs de n le produit considéré est divisible par 3, 4, 5.

Il est donc divisible par le produit $3\times4\times5=60$.

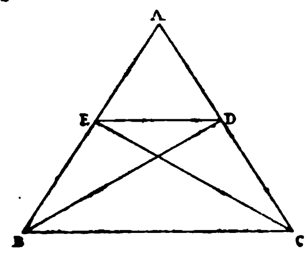
Nota. — Ont résolu la même question: MM. Lachesnais, Croneau, de Versailles; Bucheron, élève de Sainte-Barbe; Blessel, piqueur des ponts et chaussées.

QUESTION 173

Solution, par Gino-Loria, licencié de l'Institut Technique de Mantoue (Italie).

Si, dans un triangle, les bissectrices des angles à la base rencontrent les côtés opposés sur une parallèle à la base, le triangle est isocèle.

Soit ABC un triangle tel, qu'après avoir mené les bissectrices BD, CE des angles à la base, la droite ED soit parallèle à BC.



BD, CE étant bissectrices, on a :

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC};\ \frac{AE}{BE}=\frac{AC}{BC}.$$

Divisant ces égalités on a :

$$\frac{\frac{AD}{CD}}{\frac{AE}{BE}}=\frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

Mais ED est parallèle à BC, donc on aura :

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AE}{BE}$$

et par conséquent l'égalité (1) devient

$$\frac{AB}{AC}=1$$

d'où AB = AC. Donc le triangle est isocèle.

NOTA. — Ont résolu la même question: MM. Renaud, à Bordeaux; Fauré, soldat au 5e de ligne à Tarbes; Bompard, collège Stanislas; Gindre, à Lons-le-Saulnier; Tricon, à Marseille; Cosme, Lecouty, Deslais, Cattereau, au Mans; Huet, à Orléans; Pasquier, à Bruxelles; Croneau, à Versailles; Blessel, à Paris; Longueville, à Charleville; Johannet à Châteauroux; Sers, sergent d'infanterie de marine à Cherbourg; Dubief, école de Cluny; Bucheron, à Sainte-Barbe; Bonneville et Gerlié, à Toulouse; Lory, à Vendôme; Vazou, collège Rollin; Marin, à Agen; Chaulet, à Montauban; Vail, école Albert-le-Grand, Arcueil; Tinel, au Havre; Gossieaux, Lafond, Vermand, Boulogne, à Saint-Quentin; Montérou, à Pau.

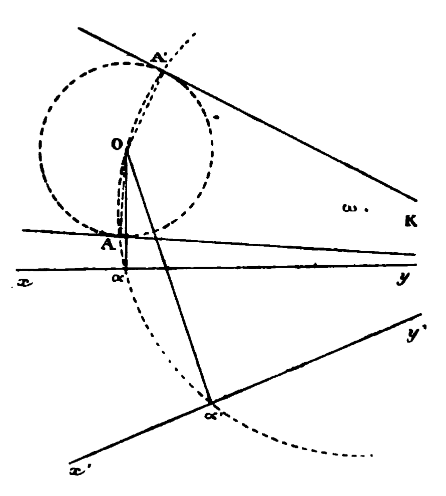
QUESTION 181

Solution par M. DESLAIS, élève au Lycée du Mans.

Étant données une circonférence O *et deux droites concourantes* xy, x′y′ *dont le point de concours n'est pas dans les limites du dessin, mener à la circonférence une tangente passant par le point de rencontre de* xy *et de* x′y′.

Du centre O, soient Oα, Oα' respectivement perpendiculaires sur les droites xy, $x'y'$.

Les points α et α' appartiennent à la circonférence ω décrite sur OK comme diamètre (K est le point de concours des droites xy, $x'y'$).



Connaissant les trois points O, α, α' de cette circonférence, il est facile de la construire; elle coupe la circonférence O en deux points A et A′. Joignant OA, OA′ et élevant des perpendiculaires à leurs extrémités, on obtient deux tangentes, passant par le point de concours de xy, $x'y'$.

NOTA. — Ont résolu la même question: MM. Craneau, lycée Fontanes; Gerlié, de Toulouse; La Chesnais, de Versailles; Paul d'Ocagne, collège Chaptal; Hugot, de Lyon; Lory, de Vendôme; Jolly, de Tarbes.

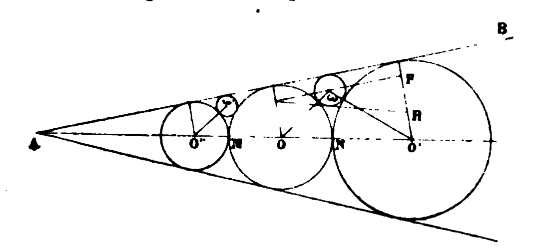
QUESTION 182

Solution par M. Hugot, élève du Lycée de Lyon.

Soit donné un cercle O *de rayon* r *inscrit dans un angle. On trace les deux cercles* O′, O″, *tangents aux côtés de l'angle et au cercle* O, *puis les cercles* ω, ω′ *tangents à l'un des côtés et en même temps tangents respectivement à* O, O′ *et à* O, O″. *Démontrer que* x *et* y *étant les rayons des cercles* ω, ω′, *on a la relation*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{r}.$$

Désignons par r' le rayon du cercle O′, par r'' celui du cercle O″; menons par ω une parallèle EF au côté AB de



l'angle et par E une parallèle EH à la ligne AO. Joignons ωO, ωO′.

Les triangles OEω, O′Fω donnent respectivement

$$\overline{\omega E}^2=(r+x)^2-(r-x)^2,\quad \text{ou}\quad OE=2\sqrt{rx}$$

$$\overline{\omega F}^2=(r'+x)^2-(r'-x)^2,\quad \text{ou}\quad \omega F=2\sqrt{r'x}$$

et le triangle EFH donne

$$\overline{EF}^2=(E\omega+\omega F)^2=(r+r')^2-(r-r')^2,$$

ou, en remplaçant ωE et ωF par leurs valeurs,

$$4rr'=4x(\sqrt{r}+\sqrt{r'})^2;$$

d'où

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{rr'}}{\sqrt{r}+\sqrt{r'}}.$$

On trouverait de même

$$\sqrt{y}=\frac{\sqrt{rr''}}{\sqrt{r}+\sqrt{r''}};$$

par suite

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{\sqrt{r}\,[\sqrt{rr'}+\sqrt{rr''}+2\sqrt{r'r''}]}{(\sqrt{r}+\sqrt{r'})(\sqrt{r}+\sqrt{r''})};$$

mais

$$\frac{r''}{r}=\frac{AO''}{AO}=\frac{AO''+r''}{AO+r}=\frac{AM}{AN}$$

$$\frac{r}{r'}=\frac{AO}{AO'}=\frac{AO+r}{AO'+r'}=\frac{AM}{AN};$$

donc

$$\frac{r''}{r}=\frac{r}{r'},\ \text{c'est-à-dire}\ r=\sqrt{r'r''},$$

par suite l'égalité précédente devient

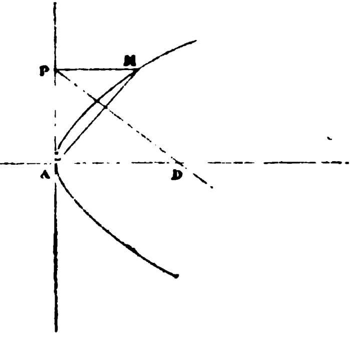
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{\sqrt{r}\,[\sqrt{rr'}+\sqrt{rr''}+2r]}{\sqrt{rr'}+\sqrt{rr''}+2r}=\sqrt{r}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Crosneau, lycée Fontanes; Blondin, à Rouen; Lavechin, au lycée Saint-Louis.

QUESTION 184

Solution par M. Hugot, élève du Lycée de Lyon.

Si, par la projection d'un point de la parabole sur la tangente au sommet, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur issu du sommet, ces perpendiculaires vont concourir en un même point.



Les triangles rectangles PMA, PDA sont semblables, car les angles PMA, DPA sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. On a par suite

$$\frac{MP}{PA}=\frac{PA}{AD}:$$

d'où $$AD = \frac{\overline{PA}^2}{MP};$$
quantité constante et égale à $2p$. Donc le point D est fixe et la propriété est démontrée.

QUESTION 188

Solution par M. Paul d'Ocagne, élève au Collège Chaptal.

Dans un triangle donné, inscrire un rectangle de diagonale minima et donner la longueur de la diagonale.

(W.-J.-C. Miller.)

Soit a la base du triangle donné, h sa hauteur, x la base du rectangle cherché et y sa hauteur.

Il faut trouver le minimum de la diagonale du rectangle, ou celui du carré de cette diagonale, c'est-à-dire $x^2 + y^2$.

Mais on a $$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$$
ou $$hx + ay = ah.$$

D'après un théorème démontré page 304, tome III, le minimum a lieu pour $\frac{x}{h} = \frac{y}{a}$.

On a donc à inscrire dans le triangle un rectangle semblable à un rectangle donné; problème connu.

D'après le même théorème, la diagonale minima a pour longueur $$\alpha = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Daguillon, Lesieur, lycée Henri IV; Schmidt, Pfister, école Lavoisier; Richebraque, au lycée Saint-Louis; Bonneville, à Toulouse; Boulogne, Gossieaux, à Saint-Quentin

---

QUESTION 191

Solution par M. Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées.

Partager un tronc de cône par un plan parallèle aux bases, de façon que la partie inférieure soit contenue n *fois dans le tronc tout entier.*

Posons CD = R, AB = r et MN = x ; représentons par V, V' et V'' les volumes des cônes respectivement engendrés par les triangles rectangles OCD, OMN et OAB dans leur mouvement de rotation autour de l'axe commun OC ; nous devons avoir, d'après les données du problème

$$\frac{V - V''}{V - V'} = n. \qquad (1)$$

Les cônes engendrés par des triangles semblables étant semblables, nous avons

$$\frac{V}{R^3} = \frac{V'}{x^3} = \frac{V''}{r^3}$$
$$= \frac{V - V'}{R^3 - r^3} = \frac{V - V'}{R^3 - x^3}. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit $\dfrac{R^3 - r^3}{R^3 - x^3} = n$;

d'où $$x = \sqrt[3]{\frac{R^3(n-1) + r^3}{n}}$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Deslais, du Mans.

QUESTION 193

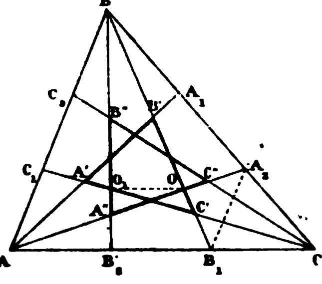
Solution par M. Deslais, élève du Lycée du Mans.

On joint les sommets A, B, C *d'un triangle aux points* A_1 *et* A_2, B_1 *et* B_2, C_1 *et* C_2, *qui divisent en trois parties égales les côtés opposés. Les droites* AA, BB_1, CC_1 *se coupent en trois points*

A', B', C', *les droites* AA_2, BB_2, CC_2, *en trois autres points* A'', B'', C''.

Démontrer que chacun des triangles $A'B'C'$, $A''B''C''$ *est le septième du triangle* ABC. (Corr. de Catalan.)

Soit O le point de rencontre des droites AA_2, BB_1. A_2B_1 étant parallèle à AB, on a



$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{A_2B_1}{AB} = \frac{1}{3}$$

Si O_1 est le point de rencontre des droites CC_1, BB_2, on a de même

$$\frac{O_1B_2}{O_1B} = \frac{1}{3}$$

La ligne OO_1 est donc parallèle à AC et l'on a

$$\frac{OO_1}{B_2B_1} = \frac{BO}{BB_1} = \frac{3}{4}.$$

Par suite $$\frac{AB_2}{OO_1} = \frac{A''B_2}{A''O_1} = \frac{4}{3},$$

d'où $$\frac{A''B_2}{O_1B_2} = \frac{4}{7}.$$

Or $O_1B_2 = \frac{BB_2}{4}$, par suite $\frac{A''B}{BB_2} = \frac{1}{7}$.

On voit ainsi que le triangle $AA''B_2$ est le septième du triangle ABB_2, ou $\frac{1}{21}$ du triangle total. On démontrerait de même que chacun des triangles $BB''C_2$, $CC''A_2$ est égal à $\frac{1}{21}$ du triangle ABC.

Si du triangle ABC on retranche le triangle BCC_2, plus les deux quadrilatères $AC_2B''B_2$, $CC''A''B_2$, il reste le triangle $A''B''C''$.

Or, S étant la surface du triangle ABC, on a:

$$BCC_2 = \frac{1}{3} S.$$

$$AC_2B''B_2 = \frac{1}{3} S - \frac{1}{21} S = \frac{2}{7} S.$$

$$CC''A''B_2 = \frac{1}{3} S - \frac{2}{21} S = \frac{5}{21} S.$$

Par suite $A'B'C' = S\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{7} - \frac{5}{21}\right) = \frac{1}{7} S$;

donc $A'B'C' = \frac{1}{7} ABC$.

Même démonstration pour le triangle A'B'C'.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

DIJON

— Étant donné un tétraèdre régulier, mener un plan parallèle à deux arêtes opposées, tel que la section soit maxima.

— Par les extrémités de l'un des côtés d'un carré, on fait passer une circonférence qui coupe le côté opposé ou son prolongement sous un angle donné ω. Trouver le rayon de cette circonférence en fonction du côté a et de ω.

— Couper une circonférence par une sécante passant par un point fixe de façon que le triangle qui a pour sommets les traces de cette droite sur la circonférence et le centre de la courbe ait une aire maxima.

LYON

— Un corps pesant est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de $3^m\,50$; à quelle hauteur parviendra-t-il? après combien de temps reviendra-t-il au point de départ?

— Inscrire dans une sphère de rayon R un cylindre dont la surface totale soit égale à la surface d'un cercle de rayon donné a. — Quelle relation doit exister entre R et a pour que le problème ait une ou deux solutions ?

CAEN

— On donne un triangle ABC; on joint les pieds E, D, F, des hauteurs. Trouver le rapport des surfaces des deux triangles ABC, DEF.

— La surface d'un rectangle est p et devient q lorsque l'angle aigu des diagonales devient double sans que ces diagonales changent de longueur. Trouver cette longueur et l'angle aigu des diagonales.

NANCY

— Connaissant les deux bases B et b d'un tronc de pyramide à bases parallèles, calculer la surface B' de la section menée par le milieu des arêtes. En appelant V le volume du tronc, démontrer la formule

$$V = \frac{H}{6}(B + b + 4B').$$

LILLE

— Par l'extrémité A du diamètre d'une demi-circonférence AB, on mène une corde AC. Quel doit être l'angle de cette corde et du diamètre, pour que le secteur BOC et le segment AMC engendrent, en tournant autour de AB, des volumes équivalents.

— On donne dans une ellipse le grand axe $2a$ et la distance focale $2c$; en un point M dont le rayon vecteur $FM = r$, on mène la tangente MT et la normale MN. On demande d'évaluer la distance NT des pieds de ces droites sur le grand axe. Quelle doit être la valeur de r pour que l'on ait $NT = 2c$?

— On donne dans une ellipse le grand axe $2a$ et la distance focale $2c$, et l'on considère un point dont la distance à l'un des foyers est r; déterminer la distance de ce point au centre, ainsi qu'à chacun des axes de la courbe.

— Par l'extrémité A du diamètre AB d'un demi-cercle, on mène une corde AC, faisant avec ce diamètre un angle x; déterminer cet angle de telle manière que les deux portions du demi-cercle engendrent des volumes égaux dans la rotation autour de AB. On évaluera cet angle à une seconde près.

BORDEAUX

— Trouver le volume engendré par un trapèze tournant autour de sa plus grande base, en fonction des quatre côtés.

— Trouver la valeur de x fournie par l'équation

$$\log\sqrt{7x+3} + \log\sqrt{3x+5} = 1 + \log 4{,}5.$$

— Partager une droite de longueur donnée a en deux parties x et y telles que $x^2 + 3y^2$ soit la plus petite valeur possible, et donner l'expression de cette valeur; appliquer à $a = 250$.

— Etant donnés les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, trouver le rayon du cercle inscrit. Trouver le rayon du cercle tangent au premier et à l'hypoténuse et un côté du triangle. Application $b = 20$; $c = 12$.

— Résoudre l'équation

$$\text{séc}\, x = \sin x + 2 \cos x.$$

PARIS

Novembre 1879.

— De tous les cônes de révolution inscrits dans une sphère, quel est celui dont la surface latérale est maxima? — On prendra comme inconnue la corde BA′ joignant un point B de la circonférence de base au point A′ symétrique du sommet par rapport au centre de la sphère.

— Étant donné un hémisphère, on propose de le couper par un plan parallèle à la base de façon, que le volume compris entre ce plan et la surface sphérique soit égal à la demi-somme des cônes ayant pour base commune le cercle d'intersection et pour sommets l'un le centre et l'autre l'extrémité du rayon perpendiculaire au plan.

— Une barre homogène AB, dont la longueur est 1 mètre, est mobile autour d'un point C placé au tiers de sa longueur, en sorte que AC = 2CB. On demande quel est le poids de cette barre, sachant qu'elle reste en équilibre quand on place un poids de 2 kilogr. en A et un poids de 5 kilogr. en B.

— Condition nécessaire et suffisante pour que la fraction $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ conserve la même valeur, quelle que soit la valeur de x.

— Soit AD la perpendiculaire abaissée du sommet A sur la base BC du triangle ABC. On connait le côté AB = 5; le côté AC = 4; on sait de plus que le produit des deux segments BD et DC de la base est égal à $\frac{135}{16}$; calculer la longueur de cette base.

— Déterminer le rayon de la sphère inscrite à un tétraèdre régulier de côté a.

— Un poids de 10 kilogr. glisse sur un plan incliné de 45° sur l'horizon, suivant une ligne de plus grande pente du plan; quel est le travail accompli par la pesanteur pendant que le poids se déplace de A en B, sachant que AB = 2 mètres?

— Étant donnée une sphère de rayon a, calculer la distance du centre O à un point A de telle sorte que la surface latérale du cône, ayant pour sommet le point A et circonscrit à la sphère, soit égale à la surface de la zone BDC qui a même base que le cône.

Avril 1880.

— Calculer le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et l'angle aigu B.

— Étant donné un triangle OAB, rectangle en O, trouver sur l'hypoténuse un point M tel que la différence $MP^2 - MQ^2$ entre les carrés de ses distances aux deux côtés de l'angle droit soit la plus petite possible en valeur absolue.

— Étant donné un cercle de centre O et de rayon OA, déterminer une corde AB telle que le volume engendré par le segment de cercle BMA soit dans un rapport donné avec le volume engendré par le triangle rectangle ABD (BD étant la perpendiculaire menée de B sur OA), quand ces deux figures tournent autour de OA.

— Étant données les deux bases parallèles a et b et la hauteur h du trapèze ABCD, calculer la longueur de la droite MN, parallèle aux bases et qui partage le trapèze en moyenne et extrême raison.

— Construire la directrice d'une parabole connaissant le foyer, une tangente et un point de la courbe.

— Dans un triangle ABC, l'angle A vaut 45°; les côtés b et c qui le comprennent

ont pour valeur $b = 4$. $c = \sqrt{2}$; calculer sans tables de logarithmes le sinus et le cosinus de chacun des angles B et C.

— On donne les deux équations $x^2 + ax + 1 = 0$; $x^2 + x + a = 0$; déterminer a de façon que les deux équations admettent une racine qui leur soit commune.

— Résoudre l'équation

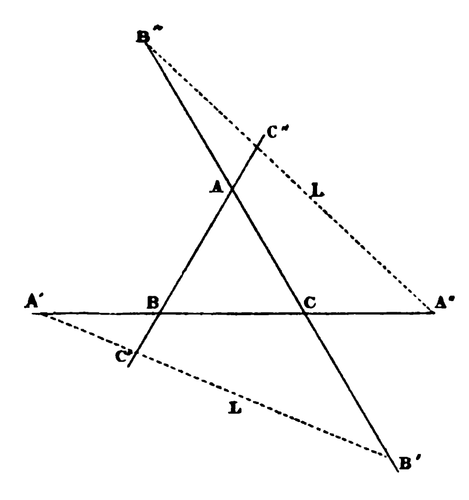
$$x + y = a; \quad xy(x^2 + y^2) = b.$$

— Les rayons de deux cercles sont 1 et 2; la distance de leurs centres est $\sqrt{7}$; calculer sans tables de logarithmes le cosinus de l'angle compris entre les tangentes menées à ces deux cercles par l'un de leurs points d'intersection. Trouver en outre le sinus, le cosinus et la tangente de la moitié de cet angle.

TRANSVERSALES RÉCIPROQUES ET APPLICATIONS

Par M. G. de Longchamps,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

1. Si l'on considère un triangle ABC coupé aux points A'B'C' par une transversale L, et si l'on prend le point A″ symétrique du point A' par rapport au milieu du côté BC : A″ et les deux points analogues B″, C″, sont situés sur une même droite L'. Cette propriété est la conséquence immédiate du théorème de Ménelaüs et de sa réciproque. Ces deux droites L, L', tellement liées l'une à l'autre qu'à la droite L correspond la droite L', et réciproquement, ont été autrefois considérées par nous (*) et, pour rappeler la propriété précé-

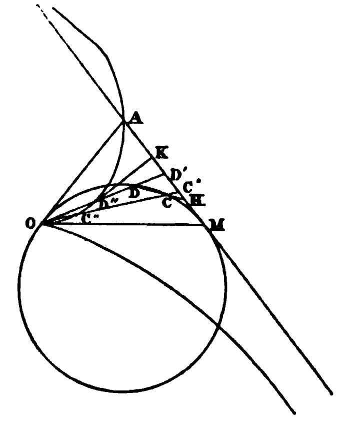


(*) *Annales de l'École normale*, t. III. 1867.

dente, nous les avons nommées *transversales réciproques*. On rencontre ces droites qui jouissent de différentes propriétés remarquables dans plusieurs questions de géométrie; nous nous proposons simplement de montrer ici comment on peut déduire, du théorème précédent, une construction de la tangente en un point pris sur quelques courbes célèbres : la *cissoïde*, droite ou oblique; la *strophoïde*, droite ou oblique; la *lemniscate de Bernoulli*; les *conchoïdes*.

2. Considérons d'abord la cissoïde. On sait que cette courbe est engendrée de la manière suivante :

Étant pris un cercle, un point O sur sa circonférence et une tangente quelconque AB; par le point O on mène une droite qui rencontre le cercle en C, la droite AB en C'; on prend enfin OC" = CC' le lieu du point C" est la cissoïde. Nous nous proposons de construire la tangente au point C".



Considérons, à cet effet, une droite OD'DD" voisine de la précédente; les points D, D', D" étant d'ailleurs définis comme les points C, C', C". Dans le triangle OD'C' les droites CD, C"D" sont deux transversales réciproques; elles coupent donc la base C'D' en deux points H et K symétriques par rapport au milieu de C'D'. Que l'on suppose maintenant que OC, OD se rapprochent et viennent se confondre, DC devient la tangente au cercle au point C; D"C" à la cissoïde au point C" et les points K, H sont, à la limite, deux points de la droite AB également distants du point C'. De cette remarque, on peut déduire la construction suivante :

Une cissoïde étant donnée et définie par son point de rebroussement O, *la tangente* OM *en ce point, et l'asymptote* AMB; *on construit le cercle qui passe par les points* O *et* M, *et qui, en ce point* M, *est tangent à la droite* AB. *Par le point* O, *on trace*

une droite rencontrant ce cercle, l'asymptote et la cissoïde, respectivement aux points C, C', C''; *ce dernier point étant obtenu en prenant* OC'' = CC'. *Ceci fait et pour avoir la tangente en ce point* C'', *il suffira de mener la tangente au cercle au point* C; *cette droite rencontre l'asymptote en un certain point, on prend le symétrique de celui-ci par rapport à* C' *et l'on joint ce dernier point à* C'' : *cette droite est la tangente demandée.*

3. La règle précédente s'applique évidemment à toutes les courbes transformées d'une courbe donnée par la loi suivante : On donne un point O, une droite AB, et une courbe *f*; par O, on trace une droite quelconque rencontrant la courbe *f* en C, AB en C' et l'on prend OC'' = CC'; le lieu du point C'' est une courbe φ transformée de *f*, et la tangente à φ au point C'' s'obtient comme nous l'avons indiqué tout à l'heure pour la cissoïde.

On peut encore, et comme me l'a fait observer un de mes collègues (*), supposer que le point C'', qui se déduit des points C, C', est défini par l'égalité

$$\frac{OC}{CC'} : \frac{OC''}{C'C''} = K,$$

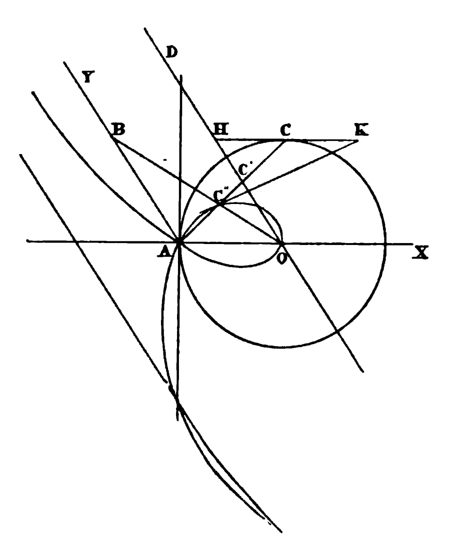
K désignant une constante qui est égale à 1, dans le cas particulier qui nous a servi à définir la cissoïde. Les deux droites CD, C''D'' ne sont plus des transversales réciproques, mais, comme il est facile de le vérifier, elles jouissent encore de la propriété, la seule qui soit essentielle à notre construction, d'aller couper la droite AB en deux points symétriques par rapport au milieu de C'D'.

4. Considérons maintenant la strophoïde.

On sait qu'étant données deux droites Ax, Ay, et un point O sur Ax; si par ce point O on mène la droite OB et que l'on prenne BC'' = BA, le point C'' ainsi obtenu appartient à une strophoïde qui peut encore être engendrée de la manière suivante. Du point O comme centre avec OA pour rayon, décrivons un cercle et par O menons OE paral-

(*) M. Walecki, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Nancy.

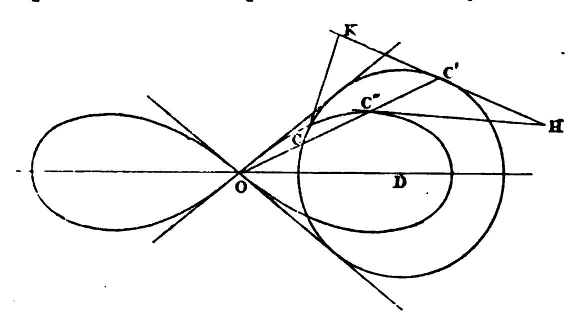
lèle à Ay; la droite AC″ rencontre le cercle en C et OD en C′ : je dis que CC′ = AC″. En effet, les deux triangles AOC″, OC′C, ont : OA = OC; les angles OAC, ACO sont égaux; enfin le triangle ABC″ étant, par hypothèse, isocèle, il en est de même du triangle C′OC″. De là, on conclut l'égalité des angles AC″O, CC′O, par suite celle des triangles AOC″, COC′; donc CC′ = AC″.



De cette génération, point par point, de la strophoïde oblique, et des remarques générales qui viennent d'être exposées, on peut conclure que la tangente à la strophoïde, au point C″, et la droite fixe OD rencontrent la tangente au cercle au point C en deux points H, K symétriques par rapport à C. Si nous ajoutons que, pour des raisons évidentes, la droite OD est symétrique de l'asymptote par rapport au point A et que les tangentes au point double A sont les deux droites rectangulaires qui joignent ce point aux points de rencontre de OD avec le cercle, on déduira des remarques précédentes la construction point par point de la strophoïde et celle de la tangente en un point donné de cette courbe supposée définie par les éléments suivants : 1° le point double; 2° l'asymptote; 3° les tangentes au point double, qui sont d'ailleurs rectangulaires.

5. Si d'un point O pris dans le plan d'un cercle, de centre D, on mène une sécante rencontrant le cercle aux points C, C′; et si, sur cette droite, à partir du point O, on porte OC″ = CC′; le lieu du point C″ est une courbe dont l'équation

polaire, est, en prenant pour axe polaire le diamètre du point O,
$$\rho^2 = 4R^2 - 4\,d^2 \sin^2 \omega,$$
R désignant le rayon du cercle; d la distance OD. Dans le cas particulier où le point O est tellement placé que, de ce point, le cercle est vu sous un angle droit; si l'on a, par conséquent,
$$d^2 = 2R^2$$
l'équation précédente devient :
$$\rho^2 = 2d^2 \cos 2\,\omega.$$
et le lieu du point C″ est donc une *lemniscate de Bernoulli*, ayant O pour centre et D pour l'un de ses foyers.



De cette remarque on déduit la construction, point par point, de la lemniscate et celle de la tangente en chacun de ses points, par la règle suivante :

Une lemniscate étant donnée et définie par son centre O *et son foyer* D ; *par le point* O *on mène deux droites inclinées de* 45° *sur* OD, *et, du point* D *comme centre, on décrit un cercle tangent à ces deux droites : ayant tracé par le point* O *une sécante rencontrant le cercle aux points* C, C′, *on prendra sur cette droite* OC″ = CC′ ; *le point* C″ *est un point de la lemniscate. Pour avoir la tangente en* C″, *on trace les tangentes au cercle aux points* C, C′, *soit* K *leur point de rencontre, on prend* C′H = C′K *et* HC″ *est la tangente cherchée.*

6. Nous ferons remarquer en terminant que les considérations précédentes s'appliquent encore aux *conchoïdes* et aux courbes que nous avons nommées (*) *conchoïdales*, parce

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique ;* t. V, mai 1879.

qu'elles sont des conchoïdes dans un cas particulier. Pour engendrer une conchoïdale il faut imaginer trois courbes f, φ, ψ; une tangente à f au point O rencontre φ et ψ respectivement en C et C′ : on prend OC″ = CC′; le lieu du point C″ quand la droite considérée roule sur f est une conchoïdale. Si la courbe f se réduit à un point, la tangente au point C″ s'obtient par la règle que nous venons de donner pour la lemniscate, qui est une conchoïdale quand f est un point et que φ et ψ sont confondues avec un seul et même cercle vu du point f sous un angle droit. Les conchoïdes ordinaires se déduisent des conchoïdales en supposant : 1° que f est un point: 2° que φ est un cercle ayant son centre en f; ψ restant d'ailleurs une courbe arbitraire.

NOTE

SUR LE NOMBRE DES POINTS D'INFLEXION RÉELS DES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **J. Collin**, ancien élève de l'École polytechnique, professeur de mathématiques.

Nous nous proposons de donner une démonstration directe et fort simple de ce théorème bien connu :

Théorème. — *Une courbe du troisième degré ne peut pas avoir plus de trois points d'inflexion réels; et si elle en a trois, ils sont en ligne droite.*

Pour le démontrer, nous allons établir le lemme suivant :

Lemme. — *Si une courbe du troisième degré a deux points d'inflexion réels, elle en a forcément un troisième, situé sur la droite qui joint les deux premiers.*

En effet, 1° supposons d'abord qu'en ces deux points d'inflexion A et B, les tangentes ne soient pas parallèles. Prenons ces tangentes respectivement pour axes des x et des y; l'équation de la courbe sera

$$(y - b)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x - a)^2 + xy\,(my + nx + p) + b^2 = 0$$

c'est-à-dire $(ay + bx - ab)^2 + xy \, . \, R = 0$,
R étant un polynôme linéaire; or, cette forme met le lemme en évidence.

2° Supposons maintenant que les tangentes en A et B soient parallèles. Prenons alors pour axe des x la droite AB, et pour axe des y la tangente en A. L'équation de la courbe sera $y^3 + myx^2 + nx^3 = maxy + px^2 + x(na - p)a$.
c'est-à-dire $y^3 + x(x - a)R = 0$;
ce qui démontre encore le lemme.

Cela posé, passons au théorème, soit une courbe quelconque du troisième degré : 1° Elle ne peut pas avoir plus de trois points d'inflexion en ligne droite; 2° Elle ne peut pas avoir trois points d'inflexion non en ligne droite; car, en vertu du lemme précédent. elle en aurait alors une infinité.

Donc, au plus, elle peut avoir trois points d'inflexion en ligne droite;

c. q. f. d.

DU NOMBRE

QUI EXPRIME COMBIEN IL Y A DE NOMBRES PREMIERS A UN NOMBRE DONNÉ n ET COMPRIS ENTRE ZÉRO ET p

Par M. **Minine.**

(Société mathématique de Moscou, séance du 15 janvier 1880.)

Nous emploierons le symbole $\left(\varphi(N)\right)_0^P$ pour désigner combien il y a de nombres premiers à N dans la suite 1, 2, 3,... P; nous désignerons par E (x) le plus grand entier contenu dans une quantité quelconque x, et nous représenterons l'expression $E\left(\frac{n}{x}\right)$ symboliquement par $nE\frac{(1)}{x}$.

N étant égal à $a^\alpha . b^\beta . c^\gamma . d^\delta \ldots$, écrivons la suite des nombres entiers

$$1, 2, 3, 4, \ldots, P - 1, P. \qquad (1)$$

Si des P nombres de cette suite je retranche les nombres qui sont divisibles par a; du reste, les nombres qui sont divisibles par b; du reste, les nombres qui sont divisibles par c, etc..., les nombres restants, dans la suite (1), seront en nombre $\left(\varphi(N)\right)_0^P$. Or dans la suite (1) il y a $E\left(\frac{P}{a}\right)$ nombres qui sont divisibles par a. Retranchant ces nombres, il vient $$P - E\left(\frac{P}{a}\right) = P\left(1 - E\,\frac{(1)}{a}\right).$$

Retranchons du reste $E\left(\frac{P}{b}\right)\left(1 - E\,\frac{(1)}{a}\right)$ nombres qui sont divisibles par b, il vient :

$$P\left(1 - E\,\frac{(1)}{a}\right) - E\left(\frac{P}{b}\right)\left(1 - E\,\frac{(1)}{a}\right)$$
$$= P\left(1 - E\frac{(1)}{a}\right)\left(1 - E\,\frac{(1)}{b}\right).$$

Retranchons du reste les nombres qui sont divisibles par c, il vient $P\left(1 - E\frac{(1)}{a}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{b}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{c}\right)$ et ainsi de suite.

On a donc

$$\left(\varphi(N)\right)_0^P = P\left(1 - E\frac{(1)}{a}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{b}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{c}\right)$$
$$\left(1 - E\frac{(1)}{d}\right)\ldots \qquad (2)$$

Il faut remarquer que dans cette formule l'opération de la multiplication peut se faire dans un ordre quelconque, car

$$E\frac{E\frac{n}{x}}{y} = E\frac{E\frac{n}{y}}{x} = E\frac{n}{y}.$$

Si P est divisible par $a, b, c\ldots$, la formule (2) se réduit à

$$\left(\varphi(N)\right)_0^P = P\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)\ldots$$

P étant égal à N, la même formule donne la formule connue

$$\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)\ldots$$

Exemple. — Soient $N = 12$, $P = 37$. La formule (2) donne

$$\left(\varphi(12)\right)_0^{37} = 37\left(1 - E\frac{(1)}{3}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{2}\right)$$
$$= 37 - E\frac{37}{3} - E\frac{37}{2} + E\frac{37}{2.3}$$
$$= 37 - 12 - 18 + 6 = 13.$$

Remarque. — Soient N, N′, N″... des nombres premiers entre eux deux à deux; on conclut de la formule (2) que le symbole $\left(\varphi(N)\right)_0^P$ jouit de la propriété suivante:

$$\left(\varphi(N)\right)_0^P\left(\varphi(N')\right)_0^{P'}\left(\varphi(N'')\right)_0^{P''}\ldots = \left(\varphi(N.N'.N''\ldots)\right)_0^{P.P'.P''\ldots}$$

Si dans cette formule on fait $P = N$, $P' = N'$, $P'' = N''\ldots$, on trouve l'équation connue

$$\varphi(N)\,\varphi(N')\,\varphi(N'')\ldots = \varphi(N.N'.N''\ldots).$$

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Jouanne**, professeur au Lycée de Caen.

Équation du cercle passant par trois des pieds des normales menées d'un point à une conique à centre.

Soient α et β les coordonnées du pied d'une normale issue d'un point (X, Y);

Il en résulte les identités,

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0, \quad c^2\alpha\beta X - a^2\beta Y + b^2\alpha = 0.$$

En prenant pour origine le point $(\alpha\beta)$ les équations qui donnent les pieds des normales sont :

(1) $$a^2y^2 + b^2x^2 + 2a^2\beta y + 2b^2\alpha x = 0,$$

(2) $$c^2xy - y(a^2X + \alpha b^2) + x(b^2Y + \beta a^2) = 0.$$

L'équation du cercle cherché qui passe par les trois autres pieds est : $x^2 + y^2 + 2Mx + 2My + P = 0$;

M, N et P sont des fonctions de $\alpha\beta$, X et Y qu'il faut déterminer.

A cet effet, cherchons d'abord l'équation aux abscisses et posons pour plus de simplicité $A = a^2X + \alpha b^2$, $B = b^2Y$

$+ \beta a^2$; cette équation est fournie par l'élimination de y entre (1) et (2); et par un calcul facile, on trouve :

$$c^4b^2x^3 + 2c^2b^2(c^2\alpha A)x^2 + [a^2B(B - 2a^2\beta) + Ab^2(A - 4c^3\alpha)]x$$
$$+ 2A(a^2\beta B + b^2\alpha A) = 0 \quad \text{et } x = 0.$$

L'équation du troisième degré donne les abscisses des trois pieds situés sur le cercle.

J'obtiendrai une autre forme de cette équation en tenant compte de ce que les coordonnées de ces points doivent satisfaire simultanément aux trois équations suivantes :

$$(c^2x - A)y + Bx = 0$$
$$a^2y^2 + 2a^2\beta y + b^2x^2 + 2b^2\alpha x = 0$$
$$y^2 + 2Ny + x^2 + 2Mx + P = 0$$

Pour remplir cette condition, il suffit en considérant y et y^2 comme deux variables linéaires d'écrire que le déterminant est nul : savoir

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2x - A & Bx \\ a^2 & 2a^2\beta & b^2x^2 + 2b^2ax \\ 1 & 2N & x^2 + 2Mx + P \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on a cette autre équation du troisième degré :

$$c^4x^3 + c^2[2(Ma^2 - b^2\alpha) - A]x^2 + [c^2a^2P - 2A(Ma^2 - b^2x)$$
$$+ 2a^2\beta P - 2Na^2B]x - Aa^2P = 0.$$

Les racines étant les mêmes que celles de la précédente, on est conduit en identifiant aux équations suivantes :

$$\frac{1}{b^2} = \frac{2(Ma^2 - b^2\alpha) - A}{2b^2(c^2\alpha - A)}$$
$$= \frac{c^2a^2P - 2A(Ma^2 - b^2\alpha) + 2a^2\beta B - 2Na^2B}{a^2B^2 - 2a^2c^2\beta B + A^2b^2 - 4b^2c^2\alpha A}$$
$$= \frac{-a^2P}{2(a^2\beta B + b^2\alpha A)}.$$

Ces équations donnent les valeurs de M, N et P, savoir :

$$2M = \frac{2a^2\alpha - A}{a^2}, \quad 2N = \frac{2b^2\beta - B}{b^2},$$

$$P2 = -2\left(\frac{\beta B}{b^2} + \frac{\alpha A}{a^2}\right).$$

Alors, l'équation du cercle est la suivante,

$$x^2 + y^2 + \left(2\alpha - \frac{A}{a^2}\right)x + \left(2\beta - \frac{B}{b^2}\right)y - 2\left(\frac{\alpha A}{a^2} + \frac{\beta B}{b^2}\right) = 0.$$

En y substituant les coordonnées du point diamétralement opposé à l'origine $x = -2\alpha$, $y = -2\beta$, on met immédiatement en évidence le théorème de Joachimstal.

Cette équation permet encore de vérifier le théorème de de M. Laguerre, à savoir que le cercle passe par le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la conique sur la tangente menée au point de Joachimstal.

A cet effet on ramène l'équation du cercle au centre de la conique et pour cela il suffit de poser $x = x' - \alpha$, $y = y' - \beta$, $X = X' - \alpha$, $Y = Y' - \beta$. Ce qui donne en faisant disparaître les accents

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y - Xx - \gamma y - \frac{\alpha b^2}{a^2} x - \frac{\beta a^2}{b^2} y - \alpha X - \beta Y - \frac{\alpha^2 b^2}{a^2} - \frac{\beta^2 a^2}{b^2} = 0,$$

en remarquant qu'on a $C^2\alpha\beta = a^2\beta X - b^2\alpha\gamma$ on en tire $Y = \frac{a^2}{b^2}\frac{\beta}{\alpha} X - \frac{c^2}{b^2}$, β et en substituant l'équation du cercle devient $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y - \frac{Xa^2}{\alpha}\left(\frac{Xx}{a^2} + \frac{\beta y}{b}\right)$

$$- X\frac{a^2}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) + \frac{c^2\beta}{b^2} y + \frac{c^2\beta^2}{b^2} - \frac{\alpha x b^2}{a^2} - \frac{\beta y a^2}{b^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{b^2} - \frac{\beta^2 a^2}{b^2} = 0.$$

Les coordonnées du pied de la perpendiculaire sont données par les équations

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = -a^2b^2;$$
$$b^2\alpha y - a^2\beta x = 0.$$

En posant $$d^2 = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}}$$

$x = -\frac{d^2\alpha}{a^2}$ $y = -\frac{d^2\beta}{b^2}$: si on substitue on a :

$$d^2 - d^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) + \frac{Xa^2}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}\right)d^2$$

$$- \frac{Xa^2}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) - \left[\frac{c^2\beta^2}{b^4} - \frac{\alpha^2 b^2}{a^4} - \frac{\beta^2 a^2}{b^4}\right]$$

$$+ \left[\frac{c^2\beta^2}{a^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{b^2} - \frac{\beta^3 a^2}{c^2}\right] = 0$$: car les termes entre cro-

6

chets sont nuls et les termes entre parenthèses se détruisent.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Géométrie à deux dimensions.

— Étant donnés le pied de la directrice d'une parabole sur l'axe et un point de la courbe, trouver le lieu des sommets de toutes les paraboles ayant ces deux points communs; *à priori*, combien les données constituent-elles de conditions?

— Étant donnés une conique et un cercle tangents tous deux à l'axe des x à l'origine, on demande les sécantes communes à la conique et au cercle.

— Former l'équation du cercle qui passe par les pieds des trois normales qu'on peut généralement mener d'un point extérieur à la parabole.

— Par un point d'une hyperbole on mène deux droites parallèles à des directions fixes données; on joint les seconds points d'intersection de ces droites avec la courbe; et on demande le lieu des milieux des cordes ainsi obtenues, lorsque le premier point choisi sur l'hyperbole parcourt la courbe.

— Former l'équation générale des coniques ayant pour centre l'origine des axes et passant par deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $x' = a$, $y' = b$, $x'' = a\sqrt{-1}$ et $y'' = b\sqrt{-1}$.

— En un point M d'une parabole on mène une normale MA; par le sommet de la courbe, on mène à cette normale une parallèle sur laquelle on prend une longueur égale à la portion de la normale interceptée par la parabole. Trouver le lieu de l'extrémité de cette parallèle.

— On demande de chercher les foyers et les directrices de la courbe $xy - x + 1 = 0$.

— Etant donnés une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et un cercle $x^2 + y^2 + 2dx + 2ey = 0$ qui passe par le centre de l'ellipse, on demande la relation qui doit exister entre a, b, d et e pour que l'une des cordes communes aux deux courbes soit vue du centre sous un angle droit.

— Former l'équation générale des coniques qui ont un foyer sur Ox et l'autre sur Oy, qui coupent l'axe Ox en A et l'axe Oy en B. — Lieu des sommets situés sur l'axe focal,

— Etant donnés une hyperbole équilatère et un cercle concentrique, trouver le lieu des milieux des cordes de l'hyperbole qui sont tangentes au cercle.

— Trouver la condition qui doit exister entre les coefficients de l'équation générale du 2e degré à 2 variables pour que la distance d'un foyer à la directrice correspondante soit égale à une longueur donnée δ.

— Lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée $y = mx$. dans la courbe $y = x^3$.

— On considère une ellipse et un point P mobile sur cette ellipse. Ayant joint le point P aux extrémités A et A' du grand axe, on abaisse du point A une perpendiculaire AH sur A'P, et du point A' une perpendiculaire A'H' sur AP; trouver le lieu du point M de rencontre de ces deux perpendiculaires quand le point P décrit l'ellipse. — Vérifier le résultat obtenu en supposant que l'ellipse devienne un cercle.

— On considère une série d'hyperboles, ayant les mêmes asymptotes; on demande le lieu des contacts des tangentes menées d'un point du plan à toutes ces hyperboles.

— Etant données deux coniques $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ et une courbe quelconque $F(x, y) = 0$, on demande le lieu des points tels que leurs polaires par rapport aux deux coniques données concourent sur la courbe $F(x, y) = 0$. — La courbe $F(x, y) = 0$. étant elle-même une conique, on demande ce que devient le lieu trouvé.

— Etant données trois coniques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, on demande le lieu du point tel que ses polaires par rapport aux trois coniques soient concourantes. Le lieu du point de concours des trois polaires diffère-t-il du précédent? — Montrer que si les trois coniques données ont un point commun, le lieu cherché passe par ce point. — Quelles conséquences tire-t-on de ce fait?

— Soit un point P extérieur à une ellipse; trouver sur l'ellipse un point M tel qu'en joignant PM et prolongeant PM jusqu'à l'autre point de rencontre M' avec l'ellipse le rapport $\frac{PM}{PM'}$ soit égal à un rapport donné. — Quel est le lieu que décrit le point P quand on le suppose variable?

— On donne deux axes rectangulaires, et un point A sur l'axe Ox. — Trouver le lieu du foyer des coniques tangentes en A à Ox, tangentes à Oy en un point non donné, et dont une directrice passe à l'origine. Peut-on prévoir à priori que la deuxième condition donnée n'influera pas sur le lieu? — A priori, quel est ce lieu?

Géométrie analytique à trois dimensions.

— Etant donnée une droite fixe dans l'espace, trouver l'équation de la surface engendrée par un cercle dont le centre reste constamment sur la droite donnée, dont le plan tourne autour de cette droite, et dont la circonférence s'appuie sur les axes des x et des y.

— Equation générale des surfaces du second degré, qui contiennent l'axe des z, et une parallèle à l'axe des y.

— Dans le plan bissecteur du dièdre OZ, on donne un cercle ayant son centre à l'origine et de rayon connu. Ce cercle rencontre OZ en deux points A et A'; par le point A, on mène une parallèle à Ox, et par le point A' une parallèle à Oy. On demande la surface engendrée par une droite assujettie à rencontrer le cercle et les deux droites fixes. — Vérifier à priori le résultat obtenu. Chercher le second système de sections circulaires de la surface, et interpréter le résultat obtenu.

— Lieu des points équidistants de l'axe des Z et d'un plan quelconque $Ax + By + Cz + D = o$.

— Etant donné un cube, on forme les équations des diagonales BA et BC, menées dans deux faces du solide à partir d'un même sommet. On demande de calculer la valeur de l'angle ABC de ces deux lignes.

— On coupe l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, par le plan $z = mx + ny + p$; par chaque point de la section on mène une tangente horizontale à l'ellipsoïde; trouver l'équation de la surface formée par l'ensemble de ces tangentes.

— Soient, en coordonnées rectangulaires

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d.$$
$$S' = x^2 + y^2 + z^2 + a'x + b'y + c'z + d'.$$
$$\text{et } P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \quad P' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'.$$

On demande de discuter l'équation $\frac{S}{S'} = \frac{P}{P'}$. Propriétés de la surface que la forme de l'équation met en évidence.

— Quelles sont les propriétés de la surface dont l'équation est

$$z = ax + by + c \pm \sqrt{x^2 + y^2}\,?$$

— Chercher si l'on peut placer des droites sur la surface

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = 1.$$

Discuter la question.

— Equation du cylindre circonscrit à la surface $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$ parallèlement à la droite $(x = o,\ y + z = o)$.

— On donne un ellipsoïde et un plan : trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde et dont la section par le plan donné est une parabole. — Reconnaître par des raisonnements géométriques à priori la nature du lieu. Quel serait le lieu si l'on demandait que la section fût un cercle? — Chercher par des considérations géométriques, puis par le calcul, quel sera le lieu si l'on veut que la section soit une hyperbole équilatère.

— On donne deux points A et A' sur l'axe OZ, et une courbe $f(x, y) = o$ dans le plan des xy; on demande l'équation de la surface engendrée par un cercle assujetti à passer constamment par les deux points A et A' et à toucher la courbe $f(x, y) = o$. — Discuter suivant la nature de cette dernière courbe.

QUESTIONS PROPOSÉES

248. — Dans un quadrilatère ABCD, nous désignerons par a, b, c, e, d et d' les deux diagonales, ω leur angle; h_1 et h_2 les perpendiculaires abaissées des sommets sur la diagonale d; h_3 et h_4 les perpendiculaires abaissées sur la diagonale d'; démontrer les formules suivantes :

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = (d + d') \sin \omega.$$

$$\frac{h_1 + h_2}{h_3 + h_4} = \frac{d'}{d}.$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{(h_1 + h_2)(h_3 + h_4)}{\sin \omega}.$$

$$h_1\ h_2\ h_3\ h_4 = \frac{a^2\ b^2\ c^2\ e^2}{d^2\ d'^2} \sin A \sin B \sin C \sin D$$

249. — Si, dans un triangle ABC, un angle C est double d'un autre angle A, la projection du côté BC sur la bissectrice intérieure de l'angle C est égale à la moitié du côté AB. *(Launoy.)*

250. — Si dans un triangle, la bissectrice intérieure d'un angle est égale à l'un des côtés de l'angle, la projection de l'autre côté sur cette bissectrice est égale à la demi-somme des côtés de l'angle. *(Launoy.)*

251. — On donne un carré ABCD et un cercle ayant pour centre le sommet A de ce carré, et pour rayon le côté du carré; à ce cercle, on mène une tangente quelconque PQ, qui rencontre les côtés BC, CD du carré aux points P Q. Trouver le lieu géométrique décrit par le centre du cercle circonscrit au triangle APQ. *(de Longchamps.)*

252. — ABCD est un quadrilatère; M et N sont les milieux des diagonales AHC, BHD qui se coupent en H. Les cercles AHB, CHD se coupent en P; les cercles HBC, HDA se coupent en Q. Démontrer que les cinq points M, N, H, P, Q sont sur un même cercle. *(The Educational Times.)*

Mathématiques spéciales.

253. — Etant donnés dans un plan un parallélogramme et une droite, on demande de construire, avec la règle et le compas, les points où la droite rencontre une ellipse inscrite au parallélogramme et touchant ses quatre côtés en leurs milieux. *(Concours général 1813.)*

254. — Si l'on désigne par S_n la somme

$$S_n{}^2\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n},$$

démontrer les identités suivantes :

1° $$nS_n = n + \left[\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \ldots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right]$$

2° $$S_{2p} = \frac{3}{2p} + 2p\left[\frac{1}{1\,(2p-1)} + \frac{1}{2\,(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{(p-1)\,(p+1)}\right]$$

3° $$S_{2p} = (2p+1)\left[\frac{1}{1\,.\,2p} + \frac{1}{2\,(2p-1)} + \frac{1}{3\,(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{p\,(p+1)}\right]$$

4° $$S_{2p} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{2p - C_2^2} + \frac{1}{3p - C^{32}} + \ldots + \frac{1}{p^2 - C_{p}^{2}}\right]$$

5° $$S^n = \frac{n+1}{2} + \left[\frac{2}{n(n-1)(n-2} + \ldots + \frac{n-2}{2\,.\,3}\right]$$

6° $$(n-1)\,S_n = (n+1)\left[\frac{n-1}{1\,.\,n} + \frac{n-2}{2(n-1)} + \frac{n-3}{3(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)2}\right]$$

7° $$S_n = n - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right]$$

8° $$S_n = 1 + \frac{n+2}{n-2}\left[\frac{1}{2\,.\,n} + \frac{1}{3(n-1)} + \ldots + \frac{1}{(n-1).3}\right]$$

9° $$2S_n = n + 1 - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{n-2}{n}\right]$$

10° $$S_n - S_p = \frac{n+p+1}{n-p+1}\left[\frac{n-p}{n(p+1)} + \frac{n-p-1}{(p+2)(n-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(p+1)}\right]$$

(de Longchamps.)

255. — Trouver la surface engendrée par une droite s'appuyant constamment sur l'axe OZ, sur la droite $x = 1$, $z = 1$, et sur le cercle $z = 0$, $x^2 = y^2 = R^2$. Étudier les sections faites dans la surface par des plans parallèles aux plans de coordonnées, et particulièrement par le plan $z = h$; les sections obtenues dans ce dernier cas sont des conchoïdes de Nicomède. On propose de le démontrer géométriquement.
(de Longchamps.)

256. — On donne une ellipse dont les axes sont OA et OB; la tangente en un point M de la courbe rencontre les axes en C et D; on construit le rectangle OCPD, et on joint le sommet P au point M. Démontrer que si du centre on abaisse une perpendiculaire sur PM, cette perpendiculaire rencontre la normale en M en un point I, qui est le centre du cercle osculateur de l'ellipse au point M.
(de Longchamps.)

257. — Démontrer le théorème suivant, dû à M. Mannheim : A partir du point a où la normale en m rencontre l'un des axes, nous menons une perpendiculaire à cette normale; cette droite rencontre le diamètre qui passe en m en un point d; nous abaissons de ce point d une perpendiculaire sur l'axe dont nous avons considéré le point de rencontre avec la normale; cette perpendiculaire rencontre la normale au centre du cercle osculateur à la courbe en m.
(Cours de géométrie de l'Ecole Polytechnique.)

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 11174-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE
DE LA PARABOLE
ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 241 et suiv.)

V

PROPRIÉTÉS DES TANGENTES

XLIII. **Théorème.** — *La tangente à la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur et avec la parallèle à l'axe menée par le point de contact.*

Soit *(fig. 19)* M un point d'une parabole définie par son foyer F et sa directrice D, MC la tangente en M; on démontrerait, comme pour l'ellipse, que le quadrilatère MFCP est inscriptible dans un cercle et que par suite les angles CMF et CMP sont égaux.

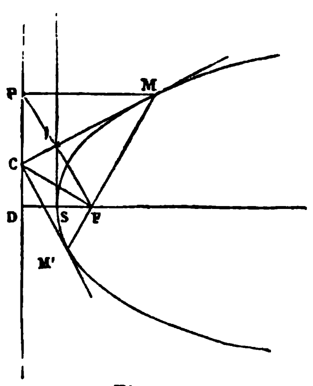


Fig. 19.

Remarque I. — *Le lieu des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.* En effet, le triangle PMF est isoscèle, MI est bissectrice de l'angle PMF, donc le point I est le milieu de PF et appartient à la tangente au sommet.

Remarque II. — *Le lieu du point symétrique du foyer par rapport aux tangentes est la directrice*; en effet IP = IF.

Remarque III. — *La tangente est bissectrice de l'angle que fait la directrice avec la droite qui joint le foyer au point où cette tangente rencontre la directrice.* En effet, il est facile de voir que les angles FCM et PCM sont égaux.

Il est inutile de rappeler ici les différentes constructions de la tangente à la parabole; on les trouvera dans tous les ouvrages de géométrie élémentaire.

XLIV. **Théorème.** — *La polaire d'un point de la directrice par rapport à une parabole passe par le foyer.*

En effet, la ligne CF *(fig. 19)* est perpendiculaire à la fois sur les rayons vecteurs FM et FM'; donc ces deux lignes ne peuvent en faire qu'une M'FM qui est la polaire du point C.

Remarque. — *Les tangentes issues d'un point de la directrice sont rectangulaires.* En effet CM et CM' sont les bissectrices de deux angles supplémentaires. (XLIII, Remarque III.)

XLV. **Théorème.** — *La droite qui joint le foyer au point de rencontre de deux tangentes est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs des points de contact.*

MA et MB *(fig. 20)* sont deux tangentes à la parabole qui,

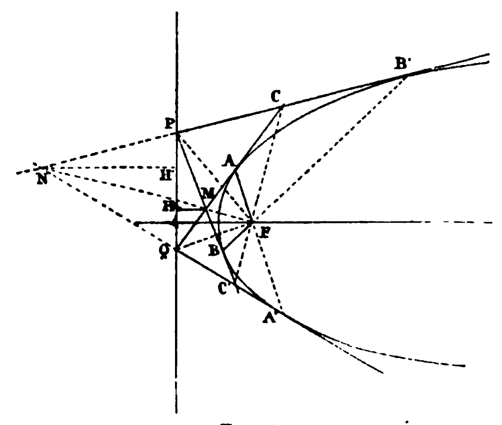


Fig. 20.

prolongées, rencontrent la directrice en Q et en P. Si l'on joint P et F, Q et F, on a le triangle PFQ dans lequel les lignes PM et QM sont bissectrices des angles FPQ et FQP (XLIII, Remarque III); le point M est alors le centre du cercle inscrit au triangle PQF et la ligne FM est bissectrice de l'angle PFQ; d'où résulte l'égalité des angles PFM et QFM.

Les triangles rectangles PFB et QFA montrent que les angles PFM et QFM sont complémentaires des angles MFB et MFA et de l'égalité des deux premiers résulte évidemment l'égalité des deux derniers.

XLVI. **Théorème.** — *Le lieu du point de concours de deux tangentes faisant entre elles un angle constant est une hyperbole qui a même foyer et même directrice que la parabole.*

Le point M (*fig. 20*) est, comme on vient de le voir, le centre du cercle inscrit au triangle PFQ; la distance du point M au côté PQ est son rayon; cette distance MH est aussi celle du point M au côté PF, de sorte que la surface du triangle PFM a pour expression

$$\frac{PF \times MH}{2}.$$

De ce que FM est bissectrice de l'angle PFQ, cette surface a encore pour expression

$$\frac{1}{2} MF \times FP \sin \frac{PFQ}{2}.$$

Égalant ces deux expressions et divisant les deux termes par $\frac{1}{2}$ PF, on trouve

$$MH = MF \sin \frac{PFQ}{2}$$

ou

$$\frac{MH}{MF} = \sin \frac{PFQ}{2}$$

Or, il est facile de voir sur la figure que dans le triangle PFQ on a

$$PFQ = \pi - 2(QPM + PQM) = \pi - 2(\pi - PMQ) = 2PMQ - \pi,$$

et si l'on désigne l'angle constant PMQ par α, on a

$$PFQ = 2\alpha - \pi$$

et

$$\sin \frac{PFQ}{2} = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), = -\cos\alpha,$$

donc le rapport $\frac{MH}{MF}$ est constant et égal à $-\cos\alpha$; ce rapport étant inférieur à 1, le lieu cherché est une hyperbole.

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, MH $= 0$ et le point M décrit la directrice :

donc, *le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une parabole est la directrice.*

XLVII. **Théorème.** — *La droite qui joint le foyer au point de concours de deux tangentes est moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs des points de contact.*

Soit (*fig. 20*) AFA' la polaire du point Q; les deux droites FM et FC' bissectrices des angles supplémentaires AFB et BFA' sont rectangulaires; alors le quadrilatère QMFC' est inscriptible dans un cercle et les angles FMC' et FQC' sont égaux; mais dans le triangle rectangle AQA', la hauteur est QF et les angles FQC' et A'AQ sont égaux comme ayant même complément QA'A; on peut donc écrire la suite des égalités

$$FMC' = FQC' = QAF.$$

Les deux triangles MFB et MFA sont semblables, ayant deux angles égaux chacun à chacun (FM est bissectrice de l'angle AFB); d'où la proportion

$$\frac{MF}{FB} = \frac{FA}{MF},$$

qui donne

$$\overline{MF}^2 = FA \times FB.$$

Corollaire. — Si l'une des tangentes est la tangente au sommet, l'un des rayons vecteurs, FB par exemple, devient $\frac{p}{2}$, MF est la distance du foyer à la tangente au point A; on a alors

$$\overline{MF}^2 = \frac{p}{2} \times FA$$

c'est-à-dire que *la distance du foyer à une tangente est moyenne proportionnelle entre le demi-paramètre et le rayon vecteur du point de contact.*

Remarque I. — Soit BFB' la corde focale, polaire du point P, *c* le point de rencontre de PB' et de QA; les lignes MF et FC sont rectangulaires et les trois points C, F, C' sont en ligne droite. Si l'on prolonge les tangentes PB et QA' jusqu'à leur rencontre en N, les trois points N, M, F sont également en ligne droite; car FN, bissectrice de l'angle A'FB' (XLV), l'est aussi de l'angle AFB, puisque les angles AFB' et A'FB sont égaux; donc les lignes FN et FM sont confondues.

REMARQUE II. — D'après la détermination du point N, l'angle PNQ est supplémentaire de PMQ; si ce dernier est constant et égal à α, l'autre sera également constant et égal à $\pi - \alpha$. Soit NH' la distance du point N à la directrice de la parabole; on a, d'après le théorème XLVI,

$$\frac{NH'}{NF} = \cos \alpha.$$

Donc si le point M décrit une hyperbole, le point N en décrira une également; mais si l'on se reporte à l'équation (I) qui a servi à déterminer l'hyperbole d'une manière générale, on verra que cette détermination est indépendante du signe du rapport désigné par $\frac{m}{n}$ et qui est ici $-\cos\alpha$ ou $\cos\alpha$ selon que l'on considère le point M ou le point N. Ces deux points doivent donc appartenir à la même courbe; le point M considéré seul ne décrit qu'une branche d'hyperbole, le point N décrit l'autre.

Ces deux points sont tels que

$$\frac{MH}{MF} + \frac{NH'}{NF} = 0.$$

XLVIII. **Théorème**. — *Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer.*

Soient *(fig. 21)*, MA, MB deux tangentes coupées en D et D' par une troisième dont le point de contact est I; on sait (XLVII) que les deux angles IDF et DAF sont égaux; pour la même raison, les angles MAF et BMF ou D'MF sont égaux; donc les angles D'MF et D'DF, tous deux égaux à MAF, sont égaux entre eux et le quadrilatère MDFD' est inscriptible dans un cercle, ce qu'il fallait démontrer.

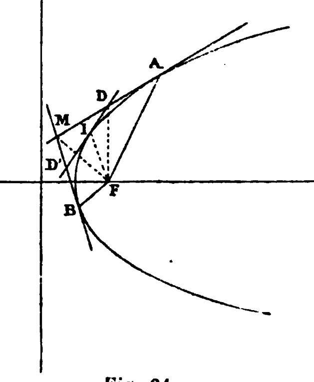


Fig. 21.

Corollaire I. — *Si d'un point de la circonférence d'un circonscrit à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les*

trois côtés, les trois points obtenus sont en ligne droite. — En effet, le point considéré peut être pris pour foyer d'une parabole tangente aux trois côtés du triangle et les trois perpendiculaires appartiennent à la tangente au sommet de cette parabole (XLII, Remarque I).

Corollaire II. — *Une parabole est déterminée par quatre tangentes.* — En effet, deux de ces droites et l'une des deux autres déterminent un triangle auquel on peut circonscrire un cercle; les deux premières et la quatrième déterminent un second cercle qui coupe le premier en deux points; l'un de ces points est le sommet commun aux deux triangles; l'autre est le foyer d'une parabole tangente aux quatre droites, ces quatre droites considérées trois à trois donnent quatre cercles pareils, qui ont un point commun; de ce point, on abaisse des perpendiculaires sur les quatre tangentes; les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite. Cette droite rencontrant les quatre premières peut donner naissance à six nouveaux triangles et par suite à six nouveaux cercles indépendants des quatre premiers; ces six cercles passent également par le point considéré.

XLIX. **Théorème.** — *L'angle sous lequel est vue du foyer une tangente mobile limitée à deux tangentes fixes est constant et égal au supplément de l'angle des tangentes fixes.*

On vient de voir (*fig. 21* et théor. XLVIII) que le quadrilatère MDFD′ est inscriptible; donc l'angle DFD′ est supplémentaire de l'angle AMB. Si donc on donne l'angle fixe AMB et si autour du point F on fait tourner un angle égal au supplément de AMB, les points d'intersection D et D′ détermineront à chaque instant une droite DD′ tangente à une parabole de foyer F et tangente également aux côtés de l'angle AMB.

Remarque. — DF étant bissectrice de l'angle IFA, on a

$$IFD = \frac{IFA}{2}$$

pour la même raison $$IFD = \frac{IFB}{2}$$

et en additionnant membre à membre

$$IFD + IFD' \text{ ou } DFD' = \frac{AFB}{2}.$$

Or, on vient de voir que DFD' est supplémentaire de l'angle AMB, par conséquent

$$\pi - AMB = \frac{AFB}{2}.$$

Donc, *l'angle de deux tangentes qui ne contient pas la courbe est la moitié de l'angle sous lequel on voit du foyer la corde des contacts.*

L. **Problème.** — *Déterminer le foyer d'une parabole connaissant deux tangentes et leurs points de contact.*

Soient *(fig. 22)* MA et MB les deux tangentes données, A et B les points de contact et F le foyer cherché ; on sait : 1° que FM est bissectrice de l'angle AFB (théor. IX) ; 2° que l'angle AFB est égal à deux fois l'angle A'MB (XIII, Rem.) ; d'où la construction suivante. Sur AB, on décrira un segment capable de l'angle double A'MB ; cette construction déterminera le milieu C de l'arc AB ; en joignant le point C au point D on aura une droite qui coupera le segment au foyer cherché, car les deux angles BFC et AFC ayant même mesure sont égaux.

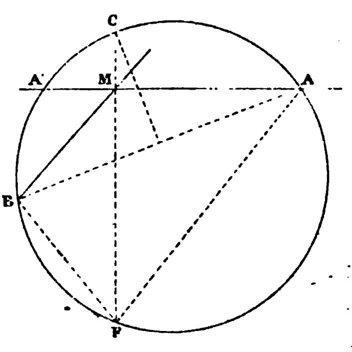


Fig. 22.

Le problème n'admet qu'une solution.

LI. **Problème.** — *Déterminer le foyer d'une parabole, connaissant trois tangentes et le point de contact de l'une d'elles.*

Soient *(fig. 23)* MD, MD', DD' les tangentes données, I le point de contact de DD', F le foyer cherché ; A étant le point de contact de MD, on a vu (XLVII) que les angles DAF et IDF sont égaux ; or sur le cercle circonscrit au triangle DMD', l'angle DAF a pour mesure

$$\frac{\text{arc MF} - \text{arc DA}'}{2},$$

l'angle IDF $\dfrac{\text{arc D'F}}{2} = \dfrac{\text{arc MF} - \text{arc MD}'}{2}$;

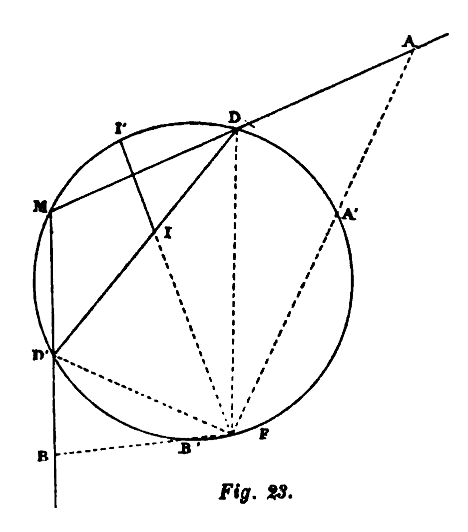


Fig. 23.

ces deux angles étant égaux, il en est de même des arcs MD′ et DA′; de plus, FD étant bissectrice de l'angle IFA, les arcs DA′ et DI′ sont égaux, donc il en est de même des arcs MD′ et DI′. On démontrerait également que B étant le point de contact de MB′, les arcs DM et D′B′ sont égaux et par suite D′I′ et MD; d'où la construction suivante : après avoir construit le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes, on porte, à partir d'un sommet pris sur la tangente dont le contact est connu et sur le plus petit des arcs sous-tendus par l'autre tangente issue de ce sommet, un arc égal au plus petit des arcs sous-tendus par la troisième tangente; la droite qui joint le point obtenu au point de contact donné rencontre le cercle au foyer cherché.

Le problème n'admet qu'une solution.

Dans le cas où le point de contact donné se trouve sur le prolongement d'un des côtés du triangle formé par les tangentes, en A, par exemple, on prend à partir du sommet D un arc DA′ égal à MD′ sur le plus grand des arcs sous-tendus par la corde MD; la ligne AA′ donne également le foyer F. Le point A′ peut ainsi être le foyer d'une parabole tangente aux trois droites données; dans ce cas, le problème admet deux solutions.

Remarque. — Étant donnés trois tangentes et le foyer d'une parabole, il est facile de déterminer les points de contact; il suffit, d'après ce qui précède, de prendre à partir de D et D′, de part et d'autre de ces points, des arcs respectivement égaux à MD′ et à MD, sur la circonférence circonscrite au triangle des tangentes et de joindre les points obtenus au foyer. Les trois droites ainsi construites rencontrent les tangentes aux points de contact.

Corollaire I. — Si le triangle MDD′ est isoscèle, les côtés MD et MD′ étant les côtés égaux, le point I′ coïncide avec le point M; alors on en conclut la propriété suivante : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle isoscèle, la droite menée par le sommet de ce triangle et par le point de contact de sa base passera constamment par le foyer de la courbe.* (Steiner, *Annales de Gergonne.*)

Corollaire II. — De ce corollaire, on déduit le suivant : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites qui joignent les points de contact des côtés du triangle avec les sommets respectivement opposés concourent toutes trois au foyer de la courbe*, et par conséquent : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites menées par les sommets et par les points de contact des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point, et le lieu de ce point est la circonférence du cercle circonscrit.* (Id., id.) *(A suivre.)*

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir page 246 et suiv.)

III

RELATIONS DONNÉES PAR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE QUELCONQUE.

Dans un triangle quelconque ABC, nous appellerons :
R le rayon du cercle inscrit;
h_a, h_b, h_c les hauteurs correspondant respectivement aux côtés a, b, c;

h'_a, h'_b, h'_c, les portions des hauteurs comprises entre les sommets et le point de concours.

h''_a, h''_b, h''_c, les autres portions des hauteurs;

En appelant A′, B′, C′ les pieds des hauteurs, posons :

$BA' = p_a$; $CB' = p_b$; $AC' = p_c$;

$CA' = q_a$; $AB' = q_b$; $BC' = q_c$.

Enfin appelons α, β, γ les angles du triangle A′B′C′; et a_1, b_1, c_1 ses côtés, S_1 sa surface, R_1 son rayon.

Cela posé, on a les relations suivantes :

16. — La similitude des triangles rectangles nous donne

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C}{A'C}$$

d'où l'on tire $$\frac{a}{b} = \frac{p_b}{q_a}$$

On a de même $$\frac{a}{c} = \frac{q_c}{p_a}.$$

17. — Les quatre points A, C′, A′ C étant sur une même circonférence, on a

$$AH \,.\, A'H = HC \,.\, HC',$$

ou bien $$h'_a\, h''_a = h'_c\, h''_c\,.$$

On aurait de même $$h'_a\, h''_a = h'_b\, h''_b\,.$$

18. — Les points H, B′, C, A′ étant sur une même circonférence on déduit $a \,.\, p_a = h_b \,.\, h'_b\,.$

On a de même $a \,.\, q_a = h_c \,.\, h'_c\,.$

On a les quatre formules analogues pour les autres côtés.

19. — Les triangles rectangles A′HB, ACA′ ont leurs côtés perpendiculaires par suite ; on a

$$\frac{BA'}{AA'} = \frac{HA'}{CA'},$$

ou bien $$p_a\, q_a = h_a\, h''_a\,.$$

On a de même $$p_b\, q_b = h_b\, h''_b.$$

$$p_c\, p_c = h_c\, h''_c.$$

20. — On sait que l'on a

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2AB \,.\, AC'.$$

Or, on a $c \,.\, p_c = h_a\, h_a.$

Donc, on aura $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2h_a\, h'_a.$

On mettra le signe + ou le signe —, suivant qu'il s'agira d'un angle obtus ou d'un angle aigu. On peut, du reste, mettre toujours le signe —, et considérer le produit comme positif, si les distances AH, AA′ sont comptées dans le même sens, et comme négatif dans le cas contraire.

On a donc, dans ce cas,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2h_a h'_a,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2h_b h_b,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2h_c h'_c.$$

Ajoutons membre à membre, il vient, après réduction,

$$h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

21. — Si l'on considère le triangle AHC formé par les segments h'_a, h'_c, le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est R; on a donc $h'_a \,.\, h'_c = 2h''_b \,.\, \mathrm{R}$;
en prenant les autres triangles analogues au triangle AHC, et multipliant membre à membre les égalités ainsi obtenues, on a $(h'_a h'_b h'_c)^2 = 8\mathrm{R}^3 h''_a h''_b h''_c.$

Si on ajoute ces égalités au lieu de les multiplier, on trouve $h'_a h'_b + h'_b h'_c + h'_c h'_a = 2\mathrm{R}(h''_a + h''_b + h''_c).$

22. — On a les relations

$$2\mathrm{S} = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}.$$

Puis on a aussi

$$2\mathrm{S} = \frac{h_a}{\frac{1}{a}} = \frac{h_b}{\frac{1}{b}} = \frac{h_c}{\frac{1}{c}} = \frac{h_a+h_b+h_c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

En égalant ces valeurs, on a

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$= \left(h_a + h_b + h_c\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right).$$

23. — Appelons K le point où AA′ rencontre C′B′. Comme B′H est bissectrice de l'angle en B′, on a

$$\frac{\mathrm{A'H}}{\mathrm{HK}} = \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{B'K}}.$$

De même, la droite C′A étant bissectrice extérieure de l'angle en C′, on a $\frac{A'A}{AK} = \frac{A'C'}{C'K}$.

Multiplions membre à membre, en remarquant que le quadrilatère C′HB′A est inscriptible ; il vient

$$h_a h''_a = b_1 c_1$$

de même

$$h_b h''_b = c_1 a_1;$$

$$h_c h''_c = a_1 b_1.$$

24. — Les deux triangles AHC, C′B′C sont semblables comme ayant les angles égaux, puisque l'angle C est commun et que, les quatre points A, C′, H, B′ étant sur une même circonférence, l'angle en C′ est égal à l'angle en A. Donc

$$AH \cdot CC' = AC \cdot C'B;$$

ou bien

$$h'_a \cdot h_c = a_1 b.$$

D'autre part, on a $ab = 2Rh_c$.

Multiplions membre à membre, il vient

$$ah'_a = 2Ra;$$

on aura de même

$$bh'_b = 2Rb,$$

$$ch'_c = 2Rc_1.$$

Multiplions membre à membre, il vient

$$a_1 b_1 c_1 = \frac{abc \cdot h'_a h'_b h'_c}{8R^3} = \frac{abch''_a h''_b h''_c}{h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c}$$

Mais, en vertu des égalités déjà établies

$$ap_a = h_b h'_b \; ; \; bp_b = h_c h'_c \; ; \; cp_c = h_a h'_a \, ,$$

on a

$$\frac{a\ b\ c}{h'_a\ h'_b\ h'_c} = \frac{h_a\ h_b\ h_c}{p_a\ p_b\ p_c}.$$

On a donc, d'après des égalités précédentes

$$a_1\ b_1\ c_1 = \frac{h_a\ h''_a\ h_b\ h'_b\ h_c\ h'_c}{p_a\ p_b\ p_c} = q_a\ q_b\ q_c\,.$$

On en tirerait de même

$$a_1\ b_1\ c_1 = p_a\ p_b\ p_c\,.$$

Enfin, en multipliant membre à membre

$$(a_1\ b_1\ c_1)^2 = h_a\ h_b\ h_c\ h'_a\ h'_b\ h'_c\,.$$

CONCOURS ACADÉMIQUES DE 1880

ACADÉMIE D'AIX

— Vérifier l'égalité

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

— On donne un triangle ABC, et on propose de lui circonscrire un triangle A'B'C' semblable à un triangle donné. Le problème a une infinité de solutions. On demande : 1° de construire une de ces solutions; 2° de construire le triangle A'B'C' dont la surface est la plus grande possible; on examinera le cas particulier où le triangle A'B'C' est semblable au triangle ABC, les côtés homologues étant désignés par les mêmes lettres accentuées.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

— Étant donnés deux cercles, trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de l'un quelconque des points aux deux cercles soient dans un rapport donné. En s'appuyant sur ce qui précède, résoudre la question suivante : Etant données trois sphères, trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de l'un quelconque de ces points aux trois sphères soient proportionnelles à des longueurs données.

ACADÉMIE DE BORDEAUX

— On considère un ellipsoïde de révolution et les droites Δ qui coupent cet ellipsoïde en deux points tels que les plans tangents menés en ces points soient rectangulaires. On demande de trouver le cône qui contient les droites Δ qui passent par un point M. Discussion du lieu lorsque le point M occupe toutes les positions possibles.

ACADÉMIE DE POITIERS

Mathématiques élémentaires.

— On fait tourner autour de leurs bases les faces latérales SAB, SBC, SCA d'une pyramide régulière triangulaire de manière à les amener en C'AB, A'BC, B'CA et alors chacun de ces triangles forme avec la projection sur le plan ABC un même angle $\varphi > \alpha$ angle dièdre à la base de la pyramide. On représente par $2a$ le côté AB, par l la hauteur du triangle isoscèle SAB, c'est-à-dire l'apothème de la pyramide et on demande d'exprimer au moyen de φ, l, a le volume limité par les triangles équilatéraux ABC, A'B'C' et les triangles isoscèles C'AB, A'BC, B'CA, CA'B, AB'C' BC'A'.

— Pour quelle valeur de φ compris entre α et 2π le volume est-il maximum?

— Dessiner la projection sur le plan ABC du polyèdre maximum dans le cas particulier où la pyramide est un tétraèdre régulier.

ACADÉMIE DE RENNES

Mathématiques élémentaires.

— Déterminer deux points AA', connaissant leur distance $2c$, le produit b^2 de leurs distances à une droite donnée ox, celui b'^2 de leurs distances à une seconde droite également donnée ox' perpendiculaire à la première, enfin celui K^2 de leurs distances au point o où se croisent ces deux droites. — La question admet-elle toujours des solutions?

On considère en outre les plus courts chemins par lesquels on puisse aller de A en A' en passant soit par ox, soit par ox', et on demande d'en déterminer les longueurs.

Si K^2 varie, comment se déplacera le milieu de AA', et comment varieront les longueurs des plus courts chemins?

Pour chaque valeur de K^2, ou, ce qui est la même chose, pour chaque système de position des points AA', on peut construire deux ellipses admettant l'une et l'autre ces points pour foyers et touchant l'une la droite ox, l'autre la droite ox'; voir ce que ces ellipses présentent de particulier.

COMPOSITION POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE

Géométrie.

Exposer brièvement la suite des théorèmes qui conduisent à la mesure du volume d'un parallélépipède quelconque.

Faire ressortir l'enchaînement de ces propositions.

Insister sur ce qu'on entend par la mesure d'un volume.

Comme application, calculer le poids d'un parallélépipède rectangle dont la hauteur $= 1^m352$, dont la base $= 2^{mq}35622$ et dont le poids d'un décimètre cube $= 0$ kil. 661.

Statique.

Soit un triangle équilatéral pesant ABC dont le côté est a et qui n'est susceptible de se mouvoir que dans un plan vertical.

Au milieu M du côté AB on attache un fil de longueur $OM = l$ dont l'autre extrémité est fixée en un point O du mur vertical VV'.

La tension du fil donne lieu à une force T appliquée au triangle dans la direction MO. Le sommet A s'appuie sans frottement sur le mur vertical VV', c'est-à-dire que la réaction du mur donne lieu à une force normale N appliquée au sommet A.

On demande de trouver les positions d'équilibre du triangle ABC

Tracé graphique.

Étant donnés un point (a, a') et une droite (BB'), dont les positions sont déterminées comme il suit :

$$\begin{aligned} \alpha a &= 0{,}020 \\ \alpha a' &= 0{,}050 \\ \alpha p &= 0{,}0035 \\ \alpha q &= 0{,}0155 \\ P &= 56^\circ{,}30' \\ Q &= 60^\circ \end{aligned}$$

1° Mener par le point a, a' une droite XX' perpendiculaire à la droite (BB') et faisant avec la ligne de terre un angle $\varphi = 49^\circ$.

2° Construire la plus courte distance de la droite (BB') et de la droite (XX').

3° Construire sur cette plus courte distance et sur les deux droites (BB'), (XX') un parallélépipède rectangle dont les côtés pris respectivement le long de (BB') et de (XX') ont pour longueur 0,030 et 0,035.

Remarque. — Le problème admet plusieurs solutions. On choisira celle des droites (XX') qui est la moins inclinée sur le plan horizontal, et pour parallélépipède celui qui est le plus en haut et à gauche.

Arithmétique.

Calculer le volume qu'occupent 565 francs en pièces d'argent de 2 francs et de 1 franc, sachant que la densité de l'argent est 10,47 et celle du cuivre 8,95.

Algèbre.

Elle donne une équation du second degré :

$$y^2 + (1 - e^2)\,x^2 = a^2\,(1 - e^2)$$

dans laquelle a et e sont des constantes, e étant < 1 — et les deux relations :

$$x = ae + r \cos V$$
$$y = r \sin V$$

dans lesquelles r et V sont deux nouvelles variables.

On demande d'exprimer le plus simplement possible r en fonction de V et de déterminer les valeurs de V pour lesquelles r atteint des valeurs maximum et minimum.

Calcul numérique de trigonométrie.

On connait dans un triangle B, c, a ; calculer les autres éléments du triangle, c'est-à-dire A, C, B et la surface.

$$\begin{aligned} B &= 39^\circ{,}47'{,}56'' \\ a &= 857{,}649 \\ c &= 703{,}625 \end{aligned}$$

QUESTION 170.

Solution par M. Pasquier, Institut Léopold, à Bruxelles.

Déterminer le rayon de la sphère à laquelle appartient une calotte sphérique de surface constante, de manière que le volume du segment à une base limitée par cette calotte soit maximum.

Si c est la corde d'une calotte, on sait que celle-ci a pour surface πc^2, donc c est constant quelle que soit la sphère sur laquelle elle est tracée.

Le segment sphérique, limité par cette calotte, doit être maximum. Soit x le rayon de la sphère sur laquelle il faut la prendre et y la hauteur du segment; nous aurons

$$\pi y^2 \left(x - \frac{y}{3}\right) = \text{maximum}.$$

Or $$2xy = c^2,$$

donc $$y = \frac{c^2}{2x}.$$

par suite $$\frac{\pi c^4}{24}\left(\frac{6x^2 - c^2}{x^3}\right) = \text{maximum}.$$

d'où $$x = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

ou $$c = x\sqrt{2}.$$

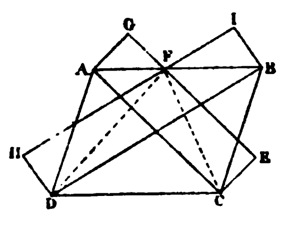
Ce qui nous montre que la corde est celle d'un quadrant et que dès lors la zone embrasse la demi-sphère sur laquelle elle est tracée.

QUESTION 174.

Solution par M. Croneau, élève du Lycée de Versailles.

Étant donné un parallélogramme, on construit sur les diagonales des rectangles tels que les côtés opposés aux diagonales se coupent sur l'un des côtés du parallélogramme. Démontrer que la somme

des deux rectangles est équivalente au parallélogramme.



Soient ACEB, BDHI deux rectangles construits sur les diagonales du parallélogramme ABCD tels que les côtés GE, HI opposés aux diagonales se coupent en F sur le côté AB du parallélogramme. Je joins FC, FD

$$AGEC = 2AFC, \ BDHI = 2BFD = 2BCF$$

d'où $AGEC + BDHI = 2AFC + 2BCF = 2ABC = ABCD.$

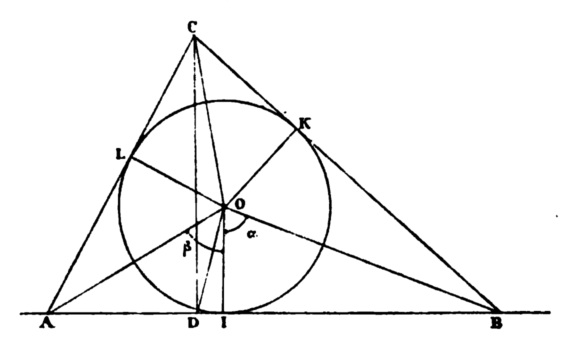
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Marin, d'Agen; Paquier, de Bruxelles; Longueville, de Charleville; Deslais, au Mans; Dubief, de Cluny Sers, à Cherbourg; Bucheron, à Sainte-Barbe; Long, à Vendôme.

QUESTION 175

Solution par M. Chavanon, élève du Lycée de Lyon.

On donne un cercle et une tangente fixe à ce cercle, en un point I. *Sur cette tangente on prend deux points mobiles* A *et* B *tels que le produit* AI × BI *soit constant. Par les points* A *et* B *on mène des tangentes qui se coupent en* C *dont on demande le lieu géométrique.*

Soit r le rayon du cercle donné O, C un point du lieu. Abaissons de ce point la perpendiculaire CD sur la tangente.



Menons les rayons OI, OK, OL et proposons-nous de calculer CD, AC, BC.

Posons AI $= m$, BI $= n$, on aura d'abord :

$$mn = K^2$$

Joignons BO, CO, AO et soit BOI $=$ BOK $= \alpha$ et AOI $=$ AOL $= \beta$. Dès lors KOC $= 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Les triangles rectangles BIO, AOI donnent respectivement

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{r}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{m}{r}$$

donc

$$\operatorname{tg} \text{KOC} = \frac{\dfrac{m+n}{r}}{\dfrac{mn}{r^2} - 1} = \frac{(m+n)\,r}{mn - r^2}$$

Le triangle rectangle CKO donne alors :

$$\text{KC} = r^2 \, \frac{m+n}{mn - r^2}$$

Par conséquent

$$\text{BC} = n + r^2 \, \frac{m+n}{mn - r^2}$$

$$\text{AC} = m + r^2 \, \frac{m+n}{mn - r^2}$$

Dès lors comme

$$\frac{1}{2}\,\text{AB} \,.\, \text{CD} = r \, \frac{\text{AB} + \text{BC} + \text{CA}}{2}$$

ou

$$(m+n)\,\text{CD} = r\left[(m+n) + (m+n) + \frac{2r^2\,(m+n)}{K^2 - r^2}\right].$$

On en déduit

$$\text{CD} = 2r\left[1 + \frac{r^2}{K^2 - r^2}\right] = \text{constante.}$$

Donc le lieu est une parallèle à la tangente menée à une distance de celle-ci égale à

$$2r\left[1 + \frac{r^2}{K^2 - r^2}\right] = 2r\,\frac{K^2}{K^2 - r^2}$$

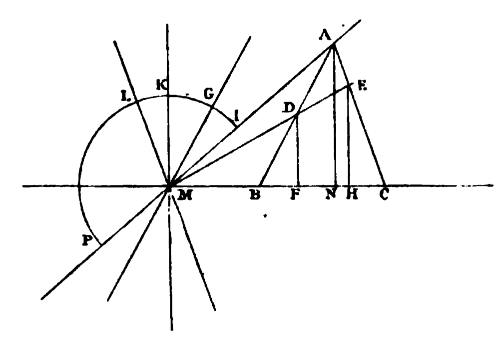
Nota. — La même question a été résolue par M. Dupuy, de Grenoble.

QUESTION 176

Solution par M. H. Sers, sergent d'infanterie de marine (Cherbourg).

Par un point pris sur le prolongement d'un côté d'un triangle, mener une droite qui coupe les deux autres côtés et qui soit telle que la projection sur le premier de la partie interceptée entre les deux autres côtés soit égale à une longueur donnée.

Supposons le problème résolu; soit ABC le triangle, M le point donné sur le prolongement de BC et FH $= a$ la longueur donnée, projection de DE sur BC.



Abaissons les perpendiculaires DF, AN, EH et soit MF $= x$. La connaissance de MF donne la solution du problème, car si en F on élève la perpendiculaire sur BC, son intersection avec AB donne un second point de la droite ME.

A cause des triangles semblables on a

$$\frac{x + a}{x} = \frac{\text{EH}}{\text{DF}},$$

$$\frac{\text{EH}}{\text{AN}} = \frac{\text{CH}}{\text{CN}} = \frac{\text{MB} + \text{BC} - a - x}{\text{CN}},$$

$$\frac{\text{DF}}{\text{AN}} = \frac{\text{MF} - \text{BM}}{\text{BC} - \text{CN}} = \frac{x - \text{MB}}{\text{BC} - \text{CN}};$$

de là on tire

$$\frac{\text{EH}}{\text{DF}} = \frac{(\text{MB} + \text{BC} - a - x)(\text{BC} - \text{CN})}{\text{CN}(x - \text{MB})} = \frac{x + a}{x}$$

d'où BC $x^2 - x[BC(MN - a)] - a \,.\, CN \,.\, MB = o$.
dès lors
$$x' + x'' = MN - a$$
$$x'x'' = -\frac{a.CN.MB}{CB}.$$

Une de ces valeurs est négative; en appelant x''' sa valeur absolue, on peut écrire
$$x' - x''' = MN - a$$
$$x'x''' = \frac{a.CN.MB}{BC}.$$

Pour construire ces racines on cherche d'abord la quatrième proportionnelle aux longueurs a, MB, BC; puis la moyenne proportionnelle entre CN et cette quatrième proportionnelle. Le problème revient donc à construire deux lignes dont la différence et le produit sont donnés.

Puisque, dans ce cas, il n'y a qu'une valeur de x, la solution négative ne saurait être interprétée.

Remarque. — Ce problème a quatre solutions, si on considère les côtés prolongés soit dans un même sens, soit en sens contraire à partir du sommet A, opposé à BC.

En effet, considérons la sécante ME faisant une révolution complète dans le sens ILP : 1° de MA en MG, le rapport $\frac{x+a}{x}$ qui égale $\frac{ME}{MD}$ part de l'unité pour devenir infiniment grand, quand ME devient MG parallèle à AB. Les deux côtés sont alors prolongés dans le même sens à partir du point A; a passe donc une première fois par toutes les valeurs possibles; 2° de MG à MK, le rapport devenu $\frac{a-x}{x}$ part d'une valeur infiniment grande pour devenir voisine de l'unité à mesure que MG s'approche de MK perpendiculaire à BC, car alors l'intersection a lieu avec les côtés prolongés en sens contraire; lorsque ME devient MK, $\frac{a-x}{x} = \frac{o}{o}$; $a = x = o$. Donc après être parti de l'infini a devenant encore nul, a passé par toutes les valeurs possibles : 3° de MK à ML, parallèle à AC, le rapport $\frac{a-x}{x}$ nul d'abord redevient infi-

niment grand et les côtés sont prolongés comme dans le cas précédent; a a donc de nouveau passé par toutes les valeurs : 4° de ML à MP, l'intersection a lieu avec les côtés prolongés, dans le même sens et le rapport est devenu $\frac{x+a}{a}$; a d'abord indéfiniment grand s'est annulé quand $\frac{x+a}{x}$ est devenu égal à l'unité. Il a donc subi toutes les variations possibles de grandeur.

Toute autre position est la même que l'une de celles déjà examinées.

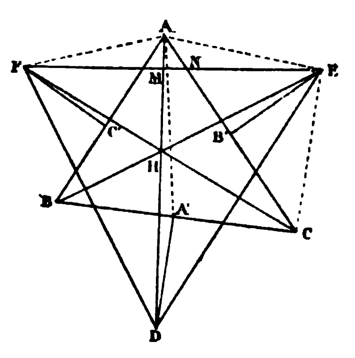
Pour que la sécante puisse être menée à l'intérieur du triangle, il faut que a soit moindre que le troisième côté BC.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Croneau, de Versailles; Paquier, institut Léopold, Bruxelles.

QUESTION 177

Solution par M. LONGUEVILLE, élève du Collège de Charleville.

Soit un triangle ABC; *aux points milieux* A', B', C' *de côtes on élève des perpendiculaires à ces côtés sur lesquels on prend* $A'D = \frac{1}{2} BC$; $B'E = \frac{1}{2} AC$; $C'F = \frac{1}{2} AB$ *Ces perpendiculaires sont menées extérieurement au triangle. — Démontrer : 1° que les droites telles que* EF *et* AD *sont égales; 2° qu'elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre; 3° que les trois droites* AD, BE, CF *se coupent en un même point.* (Nomy.)



Soient a, b, c les côtés du triangle ABC, $AA' = l$ une médiane, S sa surface.

On a $FA = \frac{c}{2}\sqrt{2}$ $AE = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ $FAE = 90 + BAC$.

Le triangle FAE donne

$$FE^2 = FA^2 + AE^2 - 2FA \,.\, AE \cos(90 + BAC)$$

ou $$FE^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} + b.c \sin A \qquad (1)$$

de même le triangle AA'D donne

$$AD^2 = l^2 \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{4} - 2l \frac{a}{2} \cos AA'D; \qquad (2)$$

mais cos DA'A = cos (90 + AA'B) = — sin AA'B remplaçant dans l'égalité (2) cos DA'A par — sin AA'B; et l^2 par $\frac{b^2}{2} + - \frac{a^2}{4}$. On a

$$\overline{AD}^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + 2\frac{al}{2} \sin AA'B. \qquad (3)$$

On voit donc que le second membre de l'égalité (1) est égal au second membre de l'égalité (3), puisque

$$2l\frac{a}{2} \sin AA'B = 2S = bc \sin A,$$

donc $$AD = EF.$$

On démontrerait de même que ED = FC; BE = FD.

2° AMN = 90°. En effet, les deux triangles AEE, FEC sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun;

$$AE = EC, \quad ED = FC, \quad AD = FE;$$

donc $$EAD = FEC$$

ou comme

$$FEC = B'EC + B'EN \quad \text{et } DAE = MAN + NAE$$

$$45° + B'EN = 45° + MAN$$

$$B'EN = MAN.$$

Dès lors, les triangles AMN et NEB' ont deux angles égaux chacun à chacun, NAM = B'EN; B'NE = ANM.

Donc les troisièmes sont aussi égaux et

$$AMN = NB'E = 90°.$$

Donc, AD est perpendiculaire sur FC.

De même FC est perpendiculaire sur DE; et FD est perpendiculaire sur BE.

3° Les droites AD, FC, EB pouvant dès lors être considérées

comme les hauteurs du triangle FED se coupent en un même point H.

NOTA. — MM. Deslais, du Mans; Sers, de Cherbourg, ont résolu la même question.

QUESTION 178

Solution par M. SERS, sergent d'infanterie de marine, à Cherbourg.

Étant donné un parallélogramme ABCD, *on mène par le point* C *une sécante* PCQ *qui coupe en* P *et en* Q *respectivement les côtés* AB *et* AD. *Par* A *et* P, *on fait passer une circonférence tangente à* AD *au point* A; *par* A *et* Q, *on fait passer une autre circonférence tangente à* AB *au point* A.

Ces deux circonférences se coupent en un point M *dont on demande le lieu géométrique lorsque la sécante* PCQ *tourne autour du point* C.

Menons le faisceau des droites MQ, MD, MA et MB que je prolonge en E.

Les triangles semblables AMQ et AMP donnent

$$\frac{MP}{AM} = \frac{AP}{AQ}$$

De même APQ et BPC donnent

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BC} \text{ ou } \frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{AD};$$

donc

$$\frac{MP}{AM} = \frac{BP}{AD}$$

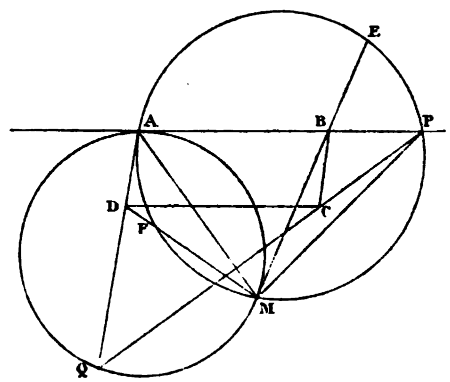
Dès lors les triangles DAM et MBP ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables; donc

arc EP = arc AF.

Dans le quadrilatère ABDM, les angles opposés en A et en M ont alors pour mesure la moitié de la circonférence AMP; ils sont supplémentaires et le quadrilatère ABMD est inscriptible.

Le lieu géométrique des points tel que M est donc la

circonférence passant par les trois autres sommets du parallélogramme.



Remarque. — Il était facile, à priori, de s'apercevoir que les points A, B, D appartenaient au lieu géométrique demandé, si l'on considérait ce que devenait M lorsque la sécante occupait l'une des trois positions, AC, BC, DC.

NOTA. — M. Tricon, de Marseille, a résolu la même question.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS A SAINT-CYR

— Si α, β, γ sont trois angles plans quelconques, on a

$$\cos 2\alpha \cos^2(\beta + \gamma) + \cos 2\beta \cos^2(\gamma + \alpha) + \cos 2\gamma \cos^2(\alpha + \beta)$$
$$= 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\beta + \gamma) \cos(\gamma + \alpha) + \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$$

— Si l'on a $$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}, \text{ et } \operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \varphi,$$

l'angle φ est moyen arithmétique entre α et β.

— Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, r le rayon du cercle inscrit, on a $$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

— Résoudre un triangle connaissant la somme des côtés AC et CB, la perpendiculaire abaissée du sommet C sur la base AB, et la différence des segments faits sur la base par la perpendiculaire.

— Exprimer la formule $a \cos \theta + b \cos (\theta + \alpha)$ sous la forme
$$A \cos (\theta + \beta)$$
et déterminer la valeur de A et de β.

— Prouver que $\sin\theta + \sin\varphi = \sin(\theta + \varphi)$ ne peut être vérifié que si $\theta + \varphi$ est un multiple de 360°.

— On donne l'équation

$$ax^2 + bx + c + h(a'x^2 + b'x + c') = 0,$$

dont on représente les racines par deux longueurs OA, OA' portées sur une droite à partir d'un point O. Soit h' la valeur de h pour laquelle l'une des racines de l'équation est infinie et OP la racine finie correspondante. Démontrer que le produit PA . PA' est constant, quel que soit h.

— On donne deux axes et un point M. Mener AB de façon que le triangle OAB ait : 1° un périmètre donné ; 2° une surface donnée.

— Étant donné un demi-cercle AMB, mener par le point A trois sécantes qui divisent le demi-cercle en quatre parties telles que si l'on fait tourner le demi-cercle autour de AB, ces quatre parties décrivent des volumes égaux.

— Étant donné un cercle O, une tangente TT' au cercle, on demande de mener par l'extrémité du diamètre ML, perpendiculaire à la tangente, une corde LA telle que le triangle MLA tournant autour de TT', décrive un volume maximum.

— Résoudre par logarithmes, sans employer d'angles auxiliaires, l'équation

$$\cos x - \sin\alpha \cot\beta \sin x = \cos\alpha.$$

— On extrait la racine cubique d'un nombre A. On a trouvé a pour racine et r pour reste, de sorte que $A = a^3 + r$. Comment fera-t-on la preuve par 11 de cette opération ?

— Le produit de trois nombres entiers consécutifs est divisible par 6.

— Que faut-il pour qu'un nombre soit divisible par 36 ?

— On donne 7^{158} ; on voudrait savoir, sans faire l'opération, quel sera le premier chiffre à droite du produit ?

— Le plus grand commun diviseur des nombres A, B, C est-il le même que celui des nombres $A + nC$, B, C ?

— Dans le produit $3{,}14 \times (0{,}842)^2$, le nombre 3,14 est connu à $\frac{1}{100}$ près et le nombre 0,842 à $\frac{1}{1000}$ près. Sur quel degré d'exactitude peut-on compter ?

— Le nombre 0,85 est connu à $\frac{1}{100}$; avec quel degré d'approximation pourra-t-on obtenir la racine carrée de ce nombre ?

— Assigner une limite de la différence $\sqrt{842} - \sqrt{840}$. — Si le nombre 842 est connu à une dizaine près, sur quelle exactitude peut-on compter à la racine ?

— On a un poids p d'alliage d'argent et de cuivre au titre t par rapport à l'argent. On demande quelle quantité de cuivre il faut ajouter pour que l'alliage ait le titre t' par rapport à l'argent.

— Démontrer que, étant donnée une fraction $\frac{a}{b}$, on peut toujours trouver un nombre x tel que $\frac{a+c}{b+x} = \frac{a}{b}$. On examinera deux cas suivant que $\frac{a}{b}$ est ou n'est pas irréductible.

— A quelle puissance au moins faut-il élever 60 pour obtenir un nombre divisible par 72^3 ?

— Si un nombre est divisible par trois nombres consécutifs, est-il divisible par leur produit ?

— Etant donnée la quantité $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, a, b, c étant premiers entre eux, la somme sera-t-elle une fraction irréductible ?

— Trouver une valeur de m telle que $2(2 + m)$ soit un carré parfait.

— Trouver deux nombres qui soient entre eux comme 30 est à 48, et dont le plus grand commun diviseur soit 21.

— Un cube terminé par 4 ou par 8 a un chiffre pair de dizaines; un cube terminé par 6 ou 2 a un chiffre impair de dizaines; un cube terminé par 5 a pour chiffre des dizaines 2 ou 7.

— Un nombre a qui a pour exposant une puissance de 2, est un multiple de $(a^2 - 1)$ augmenté d'une unité.

— Simplifier l'expression

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

puis calculer x à 0,001 près.

— Calculer à un centimètre près le côté du carré équivalent à la surface totale d'un cône dont la base a un mètre de rayon, et dont l'apothème est le côté du carré inscrit dans la base.

— Ayant calculé le nombre a des dizaines d'une racine carrée, R étant le reste correspondant, on a une limite inférieure des unités en prenant $\frac{R}{10(2a + 1)}$.

Equations à résoudre.

$$2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0.$$

$$\sqrt{2\sqrt{5} + x} = \sqrt{\sqrt{5} + x} + \sqrt{\sqrt{5} - x}.$$

$$3\sqrt{x + 8} - \sqrt{x - 8} = 2\sqrt{2x + 2}.$$

$$\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2.$$

$$\frac{x - 8}{x} + \frac{x}{x - 8} = \frac{26}{5}.$$

$$(x + \sqrt{x})^4 - (x + \sqrt{x})^2 = 159600.$$

$$1 + \sqrt{2x + 15} = 3 + \sqrt{x + 8}.$$

$$3\sqrt{x + 15} = 7\sqrt{x - 5} - 5\sqrt{x - 17}.$$

$$\sqrt{2x + 7} + \sqrt{3x - 18} = \sqrt{7x + 1}.$$

$$[(x - 5)^2 - x]^2 + 6 = 7(x - 5)^2 - 7x.$$

$$\sqrt{x^2 + 17} - \sqrt[4]{x^2 + 17} = 6.$$

$$\sqrt{(1 - a)}\sqrt[4]{\frac{1 + x}{1 - x}} - \sqrt{1 + a}\sqrt[4]{\frac{1 - x}{1 + x}} \times 2\sqrt[4]{1 - a^2} = 0.$$

$$\sin x - \cos x = 4\cos^2 x \sin x.$$

$$\sin x + \cos x = 1{,}36602.$$

$$3\sin x + 2\cos^2 x = 3.$$

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2(a + x) - \operatorname{tg}^2(a - x).$$

RECHERCHES

SUR LES

COURBES PLANES DU TROISIÈME DEGRÉ

AYANT AU MOINS UNE ASYMPTOTE A DISTANCE FINIE

Par M. J. Collin, ancien élève de l'Ecole polytechnique,
Professeur de Mathématiques.

(*Suite* et *fin.*)

La deuxième méthode ressemble à celle que nous avons employée déjà pour les courbes à point singulier.

Théorème IV. — *Toute courbe* (M) *ou* (M_1), *peut se construire à l'aide d'une conique fixe et de deux droites parallèles fixes.*

Soit en effet une courbe

$$1 = \frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{l}{y - m''x - n}$$

où nous supposons indifféremment m, m', m'' inégaux ou égaux, de manière à avoir ainsi toutes les espèces de courbes (M) ou (M_1).

Si nous passons aux coordonnées polaires, le rayon vecteur d'inclinaison ω coupera cette courbe en deux points M' et M'' donnés par l'équation

$$\rho^2 - \rho\left\{\frac{n + l}{\sin\omega - m''\cos\omega} + \frac{a\cos\omega + b\sin\omega}{(\sin\omega - m\cos\omega)(\sin\omega - m'\cos\omega)}\right\}$$
$$+ \frac{n(a\cos\omega + b\sin\omega)}{(\sin\omega - m\cos\omega)(\sin\omega - m'\cos\omega)(\sin\omega - m''\cos\omega)} = ;$$

dont nous appellerons les racines ρ' et ρ''.

Or ce même rayon vecteur rencontre respectivement la conique directrice, l'asymptote directrice $y - m''x = l + n$, et la droite parallèle $y - m''x = n$ aux points M_1, M_2, M_3; et l'on a

$$OM_1 = \rho_1 = \frac{a\cos\omega + b\sin\omega}{(\sin\omega - m\cos\omega)(\sin\omega - m'\cos\omega)}$$

$$OM_2 = \rho_2 = \frac{l + n}{\sin\omega - m' \cos\omega}$$

$$OM_3 = \rho_3 = \frac{n}{\sin\omega - m' \cos\omega}$$

De là, nous concluons

$$\rho' + \rho'' = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho'\rho'' = \rho_1\rho_3$$

et nous arrivons ainsi à la construction suivante des points M′ et M″.

Sur M_1M_3 on décrira un premier cercle. On décrira ensuite un deuxième cercle ayant son centre γ sur le rayon vecteur, à une distance $O\gamma$ de O égale à $\dfrac{OM_1 + OM_2}{2}$, et, pour axe radical avec le premier, la perpendiculaire élevée en O au rayon vecteur. Les deux points d'intersection de ce second cercle et du rayon vecteur seront les points cherchés M′ et M″. Il va sans dire, d'ailleurs, que dans l'expression $\dfrac{OM_1 + OM_2}{2}$ on doit prendre $OM_1 + OM_2$ avec des signes conformes à leur direction, et cette longueur se trouve de suite sur la figure si l'on a tracé d'avance la symétrique S de l'asymptote.

Cette méthode est bien préférable à la première; elle fait apparaître facilement la forme de la courbe.

Quant à la tangente, on pourrait encore au besoin l'obtenir à l'aide de la sous-normale; car les deux sous-normales en M′ et M″ sont données par un système d'équations du premier degré déduites des relations ci-dessus: mais cette construction serait peu simple.

— Une troisième méthode de construction des courbes (M) ou (M_1) consisterait à les regarder comme définies par le

système $$\left\{\begin{aligned} &\frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} = \lambda \qquad (\zeta)\\ &y - m'x - n = \frac{l}{1 - \lambda} \qquad (\zeta_1)\end{aligned}\right.$$

dont toutes les coniques (ζ) passent par l'origine, ont leurs centres en ligne droite et leurs axes parallèles.

— Il nous reste encore à construire les courbes (E_2) auxquelles les procédés précédents ne s'appliquent pas. Si l'on

change d'axes, ces courbes peuvent s'écrire :

$$y_1 x_1^2 = A_1(y_1 - p_1 x_1)_1 + D_1 y'' x_1 + E_1 x_1 + F$$

c.-à-d. $$y_1 = \frac{-A_1 p_1 x_1^2 + E_1 x_1 + F}{x_1^2 - A_1 x_1 - D_1},$$

ce qui d'abord peut toujours se construire. Si le racines du dénominateur sont réelles, on aura aussi bien, en appelant a, b ces racines,

$$y_1 = -A_1 p_1 + \frac{h}{x_1 - a} + \frac{k}{x_1 b}$$

c.-à-d. $$y_1 = y_2 + y_3 + \text{constante}$$

et l'on appliquera ainsi la méthode de Finck, qui donne la tangente.

— Nous nous arrêtons ici. Il eût été intéressant de résoudre divers problèmes sur les tangentes en comparant les courbes $1 = \frac{d}{P} + \frac{d'}{\varphi} + \frac{d''}{R}$ avec les coniques $o = \frac{\lambda}{P} + \frac{\mu}{\varphi} + \frac{\nu}{R}$; nous en laissons le soin au lecteur.

De même, nous aurions pu étendre à un certain nombre de courbes de degré m les procédés de construction indiqués ici pour les courbes du troisième ordre.

Qu'il nous suffise, en terminant, de réparer une omission, et de démontrer une propriété des courbes à point singulier.

$$1 = \frac{2Rx}{x^2 + y^2} + \frac{a}{x}$$

pour en déduire une construction de la tangente.

Ces courbes peuvent en effet être regardées comme définies par

$$\left| \begin{array}{l} \lambda^2(x - 2a)^2 + (\lambda^2 - 8aR)\, y^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 8aR) \\ x^2 + y^2 = \lambda^2. \end{array} \right.$$

Donc toute courbe de cette espèce jouit de la propriété suivante: la distance d'un quelconque de ses points M au point singulier O est la demi-somme de ses distances aux deux points ($x = 2a$, $y = \pm 2\sqrt{2ar}$). On peut donc construire la tangente par la règle de Tchirnhausen.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

Par M. E.-J. Boquel.

(*Suite*, voir p. 164).

Autres applications. — Si l'on se reporte à la formation de la forme adjointe, on sait qu'il faut éliminer x_1, x_2, ... x_n entre les relations

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - X_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - X_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n - X_n = 0 \\ X_1x_1 + X_2x_2 + \dots + X_n x_n - f = 0 \end{array}$$

Le résultat de cette élimination est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & X_n \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n & f \end{vmatrix} \quad \text{égal à zéro.}$$

De cette équation, on déduit $f = \frac{F}{\Delta}$, F étant une fonction homogène et du 2e degré en X_1, X_2, ... X_n, et Δ l'invariant de la forme f.

Comme nous l'avons dit, F est la forme adjointe de f.

Or, en ordonnant le déterminant par rapport aux éléments de la dernière ligne ou de la dernière colonne, on a :

$$A + \Delta \, . \, f = 0$$

Donc $F = - A$. Mais A n'est autre chose que le déterminant ci-dessus, où l'on a remplacé f par o ; la forme adjointe peut donc s'écrire sous forme de déterminant, comme il suit :

$$F = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & X_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & X_n \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n & 0 \end{vmatrix}$$

Cette remarque permet d'indiquer une forme intéressante et très usuelle que l'on peut donner à la forme adjointe. Il suffit pour cela de développer ce dernier déterminant, en observant qu'il est symétrique, et que l'invariant Δ de la forme f est également symétrique.

Or, en appliquant à un déterminant symétrique la règle connue pour former la dérivée d'un déterminant quelconque, il sera facile d'obtenir la dérivée d'un déterminant symétrique par rapport à l'un quelconque de ses éléments.

Si l'élément est sur la diagonale principale, on a immédiatement $\Delta'_{(a_{ii})} = \alpha_{ii}$, α_{ii} étant le mineur d'ordre $n - 1$ relatif à l'élément considéré; toutes les autres dérivées fournies par l'application du théorème général étant évidemment nulles.

Si l'élément occupe une place quelconque, a_{ik}, par exemple, on a à considérer l'élément symétrique égal a_{ki}, et toutes les dérivées fournies par l'application du théorème général sont nulles, sauf celles qui proviennent des deux éléments égaux a_{ik} et a_{ki}; ces dernières sont égales et l'on a: $\Delta'_{(a_{ik})} = 2\,\alpha_{ik}$ ou $2\,\alpha_{ki}$, ce qui est la même chose, en raison de la symétrie.

Cela posé, le développement du déterminant $-$ F sera :

$$\Delta'_{(a_{11})} X_1^2 + \dots + \Delta'_{(a_{ik})} X_i X_k + \dots$$

Cherchons par exemple le coefficient du terme en $X_i X_k$.

Si l'on prend l'élément X_i dans la dernière colonne, son coefficient est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{vmatrix}$$

La colonne de rang $n+1$ et la ligne de rang i ayant été supprimées dans le déterminant général, on a, pour fixer le signe du coefficient précédent, le facteur $(-1)^{n+1+i}$.

Pour avoir le coefficient du terme en $X_i X_k$, il suffit de chercher dans ce dernier déterminant le coefficient de X_k. Ce coefficient est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & a_{i-1n} \\ a_{i+1,1} & a_{1i+2,} & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & a_{i+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n2} & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

multiplié par le facteur $(-1)^{n+k}$.

Le coefficient du terme en $X_i X_k$ est donc $(-1)^{n+1+i+k}\alpha_{ik}$ ou $(-1)^{2n+i+k+1}\alpha_{ik}$, α_{ik} étant le coefficient de a_{ik} dans le déterminant Δ, c'est-à-dire dans l'invariant de la forme f. Or α_{ik} est égal au même déterminant multiplié par le facteur $(-1)^{i+k}$; le coefficient de $X_i X_k$ est donc $-\alpha_{ik}$.

D'autre part ce même terme s'obtiendra en prenant X_k dans la dernière colonne et X_i dans la dernière ligne; son coefficient sera donc $-\alpha_{ki}$; mais $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$; donc le coefficient du terme en $X_i X_k$ est $2\alpha_{ik}$, c'est-à-dire $\Delta'_{(a_{ik})}$.

La forme adjointe prend donc bien la forme suivante :

$$\Delta'_{(a_{11})} X_1^2 + \Delta'_{(a_{22})} X_2^2 + \ldots + \Delta'_{(a_{ik})} X_i X_k + \ldots$$

Cela posé, reprenons la forme quadratique ternaire $f(x, y, z)$, et supposons que dans cette forme on substitue à la place de z la valeur $-\dfrac{\alpha x+\beta y}{\gamma}$ tirée de la relation $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$; le résultat obtenu ne dépendra plus que de deux variables, et sera $f\left(x, y, -\dfrac{\alpha x+\beta y}{\gamma}\right)$, soit $F(X, Y, Z)$ la forme adjointe de f; je dis que l'invariant de la forme binaire qui provient de la substitution $z=-\dfrac{\alpha x+\beta y}{\gamma}$ aura pour valeur $\dfrac{F(\alpha,\beta,\gamma)}{\gamma^2}$.

En effet, la substitution $x=x'$, $y=y'$, $z=-\dfrac{\alpha}{\gamma}x'$

$-\frac{\beta}{\gamma}y'$, est tout à fait analogue à celle de Cauchy; car il suffit de poser dans celle-ci $t = x'$, $u = y'$, avec $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$, $\alpha'' = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\beta'' = -\frac{\beta}{\gamma}$, pour qu'elle se réduise à la substitution qui nous occupe. Or, nous avons démontré que l'invariant de la nouvelle forme obtenue est précisément la valeur que prend la forme adjointe de la proposée quand on y remplace X, Y, Z par les binômes $\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$, $\alpha''\beta - \beta''\alpha$ et $\alpha\beta' - \beta\alpha'$.

Mais on a :

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = \frac{\alpha}{\gamma} \qquad \alpha''\beta - \beta''\alpha = \frac{\beta}{\gamma} \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

L'invariant cherché est donc $F\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1\right)$ ou $\frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{\gamma^2}$.

A l'aide de ce résultat, proposons-nous de trouver les longueurs des axes de la section d'une surface du deuxième ordre par un plan central.

Je considère la forme

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$- s(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 3zx\cos\mu + 2xy\cos\nu).$$

Si j'imagine que le plan sécant soit pris pour plan des xy, les axes des x et des y dans ce plan étant les axes mêmes de la section, et l'axe des z étant la normale au plan, la transformation des coordonnées s'exprimera par une substitution linéaire, et la forme nouvelle f' sera :

$$f' = pX^2 + p'Y^2 + 2p''Z^2 + 2qYZ + 2q'ZX - s(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Le terme en XY manquera parce que la courbe de section par le plan Xoy est rapportée à ses axes, et le facteur de s se transformera identiquement en $(X^2 + Y^2 + Z^2)$ parce que les deux expressions représentent toutes deux la distance d'un même point à l'origine, laquelle n'a pas changé.

Les deux expressions f et f' sont identiques en vertu de la substitution linéaire qui a transformé f en f', et l'identité entre elles continuera de subsister si l'on établit entre x, y, z une relation quelconque, pourvu qu'on établisse entre X, Y, Z la relation analogue (c'est-à-dire celle qui résulte de la première relation transformée au moyen de la substi-

tution linéaire qui a changée f en f'). La relation entre x, y, z est l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ du plan sécant, relation dont l'analogue après transformation est $Z = 0$. La forme f, en vertu de l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, ne dépend plus que de deux variables x et y ; je détermine s par la condition que cette forme devienne un carré parfait, c'est-à-dire que son invariant soit égal à zéro ; soit $\varphi(s) = 0$ l'équation en s ainsi obtenue ; je dis que ses racines sont p et p'.

En effet, f et f' étant identiques, si la première devient carré parfait, il en sera de même de la seconde ; or, pour $Z = 0$, la forme f' se réduit à $(p - s)\ X^2 + (p' - s)Y^2$; et pour qu'elle devienne carré parfait, il faut qu'on ait $s = p$ ou $s' = p'$. Ces valeurs sont aussi les racines de $\varphi(s) = 0$.

Il faut donc former $\varphi(s)$ quand on remplace z par $-\dfrac{\alpha x + \beta y}{\gamma}$. Pour cela, je prends, d'après les considérations développées précédemment, la forme F adjointe de f, et j'y remplace X, Y, Z, par les valeurs α, β, γ ; j'aurai $\varphi(s) = \dfrac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{\gamma^2}$.

L'équation cherchée sera donc $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Si l'on admet que la surface ait pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1,$$

on aura $p = \dfrac{1}{a^2}$ et $p' = \pm \dfrac{1}{b^2}$;

l'équation $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ admettra donc pour racines les inverses des carrés des demi-axes de la section par le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Or pour avoir $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, il suffit de former la forme adjointe de f, et d'y remplacer XYZ par α, β, γ ;

La forme adjointe F, mise sous forme de déterminant, est :

$$\begin{vmatrix} A - s & B'' - s\cos\nu & B' - s\cos\mu & X \\ B'' - s\cos\nu & A' - s & B - s\cos\lambda & Y \\ B' - s\cos\mu & B - s\cos\lambda & A'' - s & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}$$

L'équation cherchée sera donc :

$$\begin{vmatrix} A - s & B'' - s\cos\nu & B' - s\cos\mu & \alpha \\ B'' - s\cos\nu & A' - s & B - s\cos\lambda & \beta \\ B' - s\cos\mu & B - s\cos\lambda & A'' - s & \gamma \\ X & Y & Z & o \end{vmatrix} = o$$

— Observons encore qu'on peut avoir facilement les projections des deux axes de la section sur le plan des xy.

En effet, si l'on reprend l'identité

$$f\left(x, y, -\frac{\alpha x + \beta y}{\gamma}\right) = f'(X, Y, o)$$

en remplaçant s par p, le second membre qui est $(p - s)X^2 + (p' - s)Y^2$ se réduit à $(p' - p)Y^2$; on aura donc Y en extrayant la racine carrée de f après y avoir remplacé s par p, qui est l'une des racines de l'équation établie plus haut. Il en sera de même de X.

L'application que nous venons de faire est d'autant plus remarquable, au point de vue de la simplicité du calcul, que nos lecteurs savent combien il est difficile d'arriver par les voies ordinaires à l'équation qui donne en *coordonnées obliques* les carrés des demi-axes de la section d'une surface du second ordre par un plan central.

Si l'on calcule cette équation pour le cas de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on vérifie que l'on retombe sur l'équation connue $\frac{\alpha^2}{\frac{1}{a^2} - s} + \frac{\beta^2}{\frac{1}{b^2} - s} + \frac{\gamma^2}{\frac{1}{c^2} - s} = o$

c'est-à-dire en posant $s = \frac{1}{\rho^2}$:

$$\frac{a^2\alpha^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{b^2\beta^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{c^2\gamma^2}{\rho^2 - c^2} = o.$$

(A suivre.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1880

Mathématiques.

Soient M et N les points où l'axe des x rencontre le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points M et N; menons par un point Q, pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole; soient A et B les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites QA et QB, l'une est parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe P.

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante qui passe par par les points M et N est déterminée; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point P décrit la droite $y = x$, quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.

Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a 19 centimètres, et dont la base ABC est située dans le plan horizontal de projection. Le point A est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans BCD. L'arête BD est parallèle aux génératrices d'un cylindre dont la trace horizontale est le cercle décrit du point B comme centre avec un rayon égal à 6 centimètres. On demande de représenter en projection horizontale le corps qui reste lorsque l'on supprime dans le tétraèdre la partie comprise dans le cône et la partie comprise dans le cylindre. On indiquera à l'encre rouge la construction faite pour trouver un point de l'intersection du cône et du cylindre et la tangente en ce point.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE 1880

Mathématiques.

— Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A de cette surface et la génératrice B du même système qui est perpendiculaire à la première; par les points a et b où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes A′ et B′ de l'autre système; soient a' et b' les points où les deux droites A′ et B′ sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.

1° Trouver le lieu des points a et b, et celui des points a' et b', quand la droite A décrit la paraboloïde.

2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites A et B′, ou A′ et B.

3° Calculer le rapport des longueurs $a'b'$ et ab des perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.

Physique.

— Un manomètre à air comprimé a ses deux branches d'inégale section; la branche fermée a une section S, et la branche ouverte une section n fois plus grande. La différence de niveau dans les deux branches est y. La pression extérieure ne changeant pas, on demande ce qui se passera si on ajoute un poids P de mercure dans la branche ouverte,

On calculera numériquement l'exemple suivant:

S = 1 centimètre carré.

$n = 2$.

$y = 4$ centimètres.

V = 1 centimètre cube et demi (1 cc., 5).

P = 20 gr., 4.

D = 13.6, densité du mercure.

— Trouver le foyer principal d'une sphère en verre de rayon R et d'indice n. (On comptera la distance focale à partir de la face de sortie des rayons.)

L'expérience étant supposée faite à zéro, on demande de combien se déplacera le foyer si la température est portée à t degrés, en supposant que l'indice — 1 soit proportionnel à la densité $\left(\frac{n-1}{D} = \text{const.}\right)$. On désignera par K le coefficient de dilatation cubique du verre.

On calculera ensuite ce déplacement pour $n_0 = \frac{3}{2}$.

QUESTION 215

Solution par M. Colin, sergent au 82e de ligne, élève de mathématiques spéciales à Sainte-Barbe (classe de M. Vazeille).

Démontrer que pour trouver la dérivée d'un déterminant dont tous les éléments sont fonctions d'une même variable, il suffit de faire la somme des déterminants obtenus en remplaçant dans le déterminant proposé tous les éléments d'une colonne par leurs dérivées.

Soit un déterminant d'ordre n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^\alpha & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^\alpha & a_2^n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_\alpha^1 & a_\alpha^2 & a_n^\alpha & a_\alpha^n \\ a_\alpha^1 & a_n^1 & a_n^\alpha & a_n^n \end{vmatrix}$$

dont nous supposerons tous les éléments fonctions d'une même variable x.

Un terme quelconque est de la forme

$$a_1^\alpha \, a_2 \ldots a_n^\nu \qquad (1)$$

et par conséquent le déterminant lui-même et la somme $\Sigma a_1^\alpha \, a_2^\beta \ldots a_n{}^\nu = \Delta$, dans laquelle Σ porte sur toutes les valeurs différentes de α, β, ... n, depuis 1 jusqu'à n, dans un ordre quelconque.

En prenant la dérivée du terme (1), on a :

$$\begin{array}{l} (a_1^\alpha)' \, a_2^\beta \ldots a_n^\nu \\ + \, a_1^\alpha \, (a_2^\beta)' \ldots a_n^\nu \\ + \, a_2^\alpha \, a_2^\beta \, (a_3^\gamma)' \ldots a_\nu^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \, a_1^\alpha \, a_2^\beta \ldots (a_n^\nu)' \end{array}$$

Pour avoir la dérivée du déterminant, il suffit de faire, pour tous les termes, les sommes des résultats analogues au précédent. Ces sommes sont les suivantes :

$$\Sigma(a_1^\alpha)' \, (a^\beta) \ldots a_n^\nu.$$

$$\Sigma a_1^\alpha \, (a_n)' \ldots a_n^\nu, \text{ etc.}$$

Or $\Sigma(a_1^\alpha)' \, (a_2^\beta) \ldots (a_n^\nu)$ est le déterminant proposé dans lequel on a remplacé la colonne α par les divisées de chacun de ses éléments. Il en est de même pour $\Sigma(a^\alpha)(a_2^\beta)' \ldots$, etc. ; donc le théorème est démontré.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lestoquoy, à Saint-Quentin ; Arnaud, à Nice ; Haure, lycée Louis-le-Grand ; Jourdan, lycée de Rouen.

QUESTION 216

Solution par M. V.-M. Arnaud, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Nice.

Trouver les dérivés des fonctions circulaires inverses arc sin x, arc cos x, arc tg x, *en s'appuyant seulement sur la définition de la dérivée et sur les formules inverses de l'addition des arcs :*

$$arc\ sin\ x + arc\ sin\ y = arc\ sin\ (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},)$$

$$arc\ cos\ x + arc\ cos\ y = arc\ cos\ (xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},)$$

$$arc\ tg\ x + arc\ tg\ y = arc\ tg\ \frac{x+y}{1-xy} \qquad \text{(Picquet.)}$$

1° **Arc sin x.** — Donnons à l'arc x un accroissement Δx, la fonction $y = \text{arc sin } x$ prendra un accroissement Δy, et nous aurons : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc sin }(x + \Delta x) - \text{arc sin } x}{\Delta x}$.

Prenons les sinus des numérateurs des deux membres, il viendra :

$$\frac{\sin \Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}.$$

Multiplions les deux termes du deuxième membre par $(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$, nous aurons :

$$\frac{\sin \Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2(1-x^2) - x^2[1-(x+\Delta x)^2]}{\Delta x[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}$$

Développons et réduisons :

$$\frac{\sin \Delta y}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}.$$

Si nous faisons tendre Δx vers 0, $\sin \Delta y$ tend vers Δy, et $\frac{\sin \Delta y}{\Delta x}$ tend vers la dérivée y'. Faisons donc Δx égal à 0, il viendra :

$$y' = \frac{2x}{x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

— On trouverait de même la dérivée de arc cos x.

— **Arc tg x.** — Donnons à x l'accroissement Δx, $y = \text{arc tg } x$ prendra l'accroissement Δy; nous aurons alors :

$$\Delta y = \text{arc tg }(x + \Delta x) - \text{arc tg } x.$$

Prenons les tangentes des deux membres :

$$\text{tg } \Delta y = \frac{\Delta x}{1 + x(x+\Delta x)}.$$

Divisons par Δx; il vient :

$$\frac{\text{tg } \Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1 + x(x+\Delta x)}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro, tg Δy tendra vers Δy et $\frac{\text{tg}\,\Delta y}{\Delta x}$ tendra ve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

Donc, à la limite, quand $\Delta x = 0$, on a : $y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

QUESTION 220

Solution par M. Camille Leroux, élève au Lycée Louis-le-Grand.

Soit la fonction $y = \frac{x - a}{x^2 + 1}$.

1° *Démontrer qu'en désignant par* y', y'', ... $y_{(n)}$ *les dérivées successives de* y, *on a entre trois dérivées consécutives la relation*

$$(x^2 + 1)y_{(n)} + 2nxy_{(n-1)} + n(n-1)y_{(n-2)} = 0.$$

Je prends la dérivée de la fonction y, j'ai

$$y' = -\frac{2x(x-a)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$$

et pour avoir une relation entre deux dérivées consécutives, j'élimine le rapport $\frac{x-a}{x^2+1}$, entre y et y'; j'ai

$$y' = -\frac{2xy}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

d'où (1) $$y'(x^2+1) + 2xy - 1 = 0.$$

Pour avoir une relation entre les dérivées $y_{(n)}$, $y_{(n-1)}$, $y_{(n-2)}$, je prends la dérivée $(n-1)^{me}$ de (1).

La dérivée de $y'(x^2+1)$ donnée par la formule de Leibnitz

$$Z_{(n-1)} = u_{(n-1)}v + \frac{n-1}{1}u_{(n-2)}v'$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{12}u_{(n-3)}v'' + \ldots + uv_{(n-1)}$$

dans laquelle on pose

$$Z = y'(x^2+1) \qquad u = y' \qquad v = x^2 + 1$$

est

$$y_{(n)}(x^2+1) + 2\frac{(n-1)}{1}xy_{(n-1)} + (n-1)(n-2)y_{(n-2)}.$$

La dérivée $(n-1)^{me}$ de $2xy$ est

$$2\left[y_{(n-1)}x + \frac{n-1}{1}y_{(n-2)}\right]$$

d'où en ajoutant et égalant à o, on a

$$y_{(n)}(x^2+1) + 2(n-1)xy_{(n-1)} + (n-1)(n-2)y_{(n-2)}$$
$$2 + \left[y_{(n-1)}x + \frac{n-1}{1}y_{(n-2)}\right] = 0$$

ou $\quad y_{(n)}(x^2+1) + 2nxy_{(n-1)} + n(n-1)y_{(n-2)} = 0$

c. q. f. d.

2° *Démontrer que si l'on pose*

$$y_{(n)} = (-1)^n\, 123\, \ldots\, n \frac{V_{(n+1)}}{(1+x2)^{n+1}}$$

V_{n+1} *est un polynôme en* x *du degré* $(n+1)$ *dont le premier terme est* x^{n+1} *et que, entre trois polynômes consécutifs, on a*

$$V_n - 2xV_{n-1} + (1+x^2)V_{n-2} = 0.$$

On a

$$y = \frac{x-a}{x^2+1} = (x-a)\left[\frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}\right]$$

en posant $\quad \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{A}{x+i} + \dfrac{B}{x-i}$

on a $\quad A = -\dfrac{1}{2i} \qquad B = \dfrac{1}{2i}$

et

$$y = \frac{x-a}{2i}\left\{(x-i)^{-1} - (x+i)^{-1}\right\}$$

$$y' = \frac{1}{2i}\left\{(x-i)^{-1} - (x+i)^{-1} + (x-a)[-1(x-i)^{-2} + 1(x+i)^{-2}]\right\}$$

$$y'' = \frac{1}{2i}\left\{\begin{array}{l}-1(x-i)^{-2} + 1(x+i)^{-2} + [-1(x-i)^{-2} + 2(x+i)^{-2}] \\ \qquad + (x-a)[12(x-i)^{-3} - 12(x+i)^{-3}]\end{array}\right\}$$

. . . .
. . . .

$$y_{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}123\ldots n}{2i(x^2+1)^{n+1}}\left\{\begin{array}{l}(x-i)(x+i)^{n+1} - (x+i)(x-i)^{n+1} - (x-a)[(x+i)^{n-1} \\ \qquad - (x-i)^{n+1}]\end{array}\right\}$$

ou

$$(x+i)^{n+1} = x^{n+1}\ \frac{n+1}{1}ix^n + \frac{n+1}{1\,.\,2}i^2x^{n-1} + \ldots.$$

$$(x-i)^{n+1} = x^{n+1} - \frac{n+1}{1}ix^n + \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}i^2x^{n-1} + \ldots$$

d'ou effectuant $(x+i)^{n+1}$ et $(x-1)^{n+1}$, y^n devient

$$y_n = (-1)\,123\ldots n \left\{ \frac{x^{n+1} \frac{n(n+1)}{1.2} x^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1(n-2)}{1.2.3.4} x^{n-3}}{(x^2+1)^{(n+1)}} - \ldots\; a\left[\frac{n-1}{1} x^n - \ldots\ldots\right] \right\}$$

on voit donc que

$$V_{n+1} = x^{n+1} - \frac{(n)(n+1)}{12} x^{n-1} + \ldots\; a\left[\frac{n+1}{1} x^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{123} x^{n-2} + .\right]$$

Portant dans la relation

$$y_{(n)}\,(x^2+1) + 2nxy_{(n-1)} + n(n-1)y_{(n-2)} = 0,$$

les valeurs $\quad y_n = (-1)^n \dfrac{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;n.}{(x^2+1)^{n+1}}\, V_{n+1}$

$$y_n - 1 = \frac{(-1)^{n-1}\, 1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}{(x^2+1)^n}\, Vn$$

$$y_n - 2 = \frac{(-1)^{n-2}\, 1.2.3\ldots(n-2)}{(x^2+1)^{n-1}}\, Vn-1.$$

On a

$$\frac{(-1)^n\;1.2.3\ldots n}{(x^2+1)^n}\, V_{n+1} + \frac{2nx(-1)^{n+1}\, 1.2.3\ldots(n-1)}{(x^2+1)n}\, V_n$$
$$+\, n(n-1)\,\frac{(-1)^{n-2}\, 1.2.3\,(n-2)}{(x^2+1)^{n-1}}\, Vn - 1 = 0.$$

d'où $\qquad V_{n+1} - 2x\, V_n + (x^2+1)\, V_{n-1} = 0,$

relation qu'il fallait établir.

3° En posant $V = 1$ *, le théorème de Sturm s'applique à la suite des polynômes* V_n, V_{n+1} *etc. et les racines de l'équation* $V_n = 0$ *séparent celles de l'équation* $V_{n-1} = 0$.

J'ai $\qquad V_{n+1} = 2x\, V_n - (x^2+1)\, V_{n-1}$

$\qquad\quad V_n = \;= 2x\, V_{n-1}\, (x^2+1)\, V_{n-2}$

. . . .

. . . .

$\qquad\quad V^2 \quad = 2x\, V_2 - (x^2+1)\, V_1$

$\qquad\quad V_2 \quad = 2x\, V_1 - (x^2+1)\, V$

Je vais examiner les différentes propositions suivantes :

1° Ce qui arrive quand une des fonctions s'annule :

Quand une fonction intermédiaire V_{p-1} s'annule pour $x = k$, les deux fonctions qui la comprennent sont de signes contraires pour $x = k$.

2° Deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler pour la même valeur de x.

Car si V_p, V_{p-1} s'annulaient pour $x = k$, V_{p-2} s'annulerait aussi, et de proche en proche on voit que V s'annulerait, ce qui est impossible car $V = 1$.

3° La suite V_p, V_{p-1}, V_{p-2} ..., ne perd ni ne gagne de variations quand x passe par une racine de l'équation $V_{p-1} = 0$, V_{p-1} étant une fonction intermédiaire quelconque.

En effet si k est une racine de l'équation $V_{p-1} = 0$, on pourra toujours trouver un nombre $h > 0$ et assez petit pour que x variant de $k - h$ à $k + h$ il n'y ait pas de racines de $V_p = 0$ et de $V_{p-2} = 0$; or pour $x = k$, V_p et V_{p-2} sont de signes contraires ; donc aussi pour $k - h$ et $k + h$; il y aura donc une seule variation pour $x = k - h$ et $x = k + h$; car il y a en a un nombre impair, et une suite de trois termes devant présenter un nombre impair de variations n'en peut présenter qu'une ; il n'y a donc ni perte ni gain de variations Ces propriétés montrent l'identité de ces fonctions et de celles de Sturm.

La perte ou le gain de variations ne peut donc provenir que de V_{n+1}. Donc s'il y a entre deux nombres donnés v variations perdues ou gagnées, il y aura *au moins* v racines de l'équation $V_{n+1} = 0$ entre ces deux nombres.

Substituant dans la suite V_{n+1}, V_n, V_{n-1}, ..., V $-\infty$ et $+\infty$ on a les signes suivants :

1° n pair	$-$	$+$	$-$	$+$	....	pour $x = -\infty$
2° n impair	$+$	$-$	$+$	$-$	....	» »
n pair ou impair	$+$	$+$	$+$	$+$	....	pour $x = +\infty$

il y a donc, que n soit pair ou impair, perte de $(n + 1)$ variations; donc l'équation $V_{n+1} = 0$ a au moins $(n + 1)$ racines réelles; or elle est du degré $(n + 1)$, donc elle a toutes ses racines réelles. — De plus on peut en conclure que le quotient $\frac{V_n}{V_{n-1}}$ passe du négatif au positif au moment où x atteint et dépasse une racine de l'équation $V_n = 0$; donc les racines de l'équation $V_n = 0$ **séparent les racines** de l'équation $V_{n-1} = 0$.

4° Les coefficients de V *sont des fonctions linéaires de la constante* a *et en posant*

$$V_{(n+1)} = P_{(n+1)} - Q_{(n+1)}$$

on a, si $x = cotg\ \varphi$,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = cotg\ (n+1)\varphi$$

En conclure les expressions trigonométriques des racines de l'équation $V_{n+1} = 0$.

On a trouvé pour V_{n+1}

$$x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{1.2}x^{n-1} + \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}x^{n-3}$$

$$- \ldots - a\left[\frac{n+1}{1}x^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}x^{n-2} + \ldots\right] = 0.$$

Si l'on pose par exemple

$$x = \text{cotg}\ \varphi \text{ ou } = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

on a
$$\frac{\cos^{(n+1)}\varphi}{\sin^{(n+1)}\varphi} - \frac{n(n+1)}{1}\frac{\cos^{n-1}\varphi}{\sin^{n-1}\varphi} + \ldots$$

$$- a\left[\frac{n+1}{1}\frac{\cos^n\varphi}{\sin^n\varphi} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{\cos^{n-2}\varphi}{\sin^{n-2}\varphi} + \ldots\right] = 0.$$

ou
$$\cos^{n+1}\varphi - \frac{n(n+1)}{1.2}\cos^{n-1}\varphi\sin^2\varphi + \ldots$$

$$- a\left[\frac{n+1}{1}\cos^n\varphi\sin\varphi - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\cos^{n-2}\varphi\sin^3\varphi + \ldots\right] = 0$$

d'où
$$a = \text{cotg}\ (n+1)\varphi.$$

Soit α le plus petit des arcs ayant pour cotangente a, on a

$$(n+1)\varphi = \alpha + k\pi.$$

$$\varphi = \frac{\alpha + k\pi}{n+1}$$

en donnant à k les $(n+1)$ valeurs $0, 1, 2, \ldots n$, on a les $n+1)$ racines trigonométriques de l'équation $V_{n+1} = 0$.

5° On propose d'établir que le polynôme Vn *satisfait aux deux équations suivantes.*

$$nV_{n-1} = 2nx\ V_n - (1 + x^2)V'_n,$$

$$(1 + x^2)V''_n - 2(n-2)\ xV'_n + n(n-1)V_n = 0.$$

J'ai trouvé la relation

$$V_{n+1} = 2n\ V_n - (1 + x^2)\ V_{n-1}. \qquad (1)$$

Je calcule V'_n. J'ai

$$V_n = \left[x^n - \frac{n(n-1)}{12}x^{n-2} + \frac{n(n\ 1)(n-2)(n-3}{1234}x^{n-4}\right]$$
$$- a\left[\frac{n}{1}x^{n-1} \ldots\right]$$

d'où $\quad V'_n = n\,V_{n-1} \quad V_{n-1} = \frac{V'_n}{n}.$

portant dans (1), on a

$$nV_{n-1} = 2nxV_n - (1 + x^2)\,V'_n.$$

De même on trouverait :

$$V''_n = n(n-1)\,V_{n-2}.$$

portant les valeurs $V_{n-1} = \frac{V'_n}{n}$, $V_{n-2} = \frac{V''_n}{n(n-1)}$, dans la relation

$$V_n = 2xV_{n-1} - (1 + x^2)\,V_{n-2},$$

j'ai $(1 + x^2)\,V''_n - 2(n-1)x\,V'_n + n(n-1)\,V_n = 0;$

c. q. f. d.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Mathématiques élémentaires.

— Chercher combien il y a de fractions équivalentes à une fraction donnée et ayant des termes plus petits que ceux de cette fraction donnée.

— Trouver tous les nombres entiers x tels que $x^2 - 1$ soit divisible par un certain nombre premier p.

— a étant un nombre tel que $a^3 - 2$ soit divisible par 7, on demande s'il est toujours possible de trouver un nombre plus petit que a qui soit divisible par 7.

— Trouver les solutions entières de l'équation $x^2 - y^2 = 9$.

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ étant des fractions irréductibles, et b et d étant différents, on demande si la somme des deux fractions peut ou ne peut pas être un nombre entier.

— Etant donnés un plan P, et un triangle ABC ayant un côté BC dans le plan P, et dont le plan fait avec le plan P un angle φ, on projette le sommet A en a sur le plan P, et on demande, connaissant tous les éléments du triangle de l'espace et l'angle φ, de calculer l'angle BaC du triangle projeté.

— p étant un nombre premier absolu, et a un nombre premier avec p, on peut toujours trouver une puissance entière de a qui, divisée par p, donne pour reste l'unité.

— Mener par un point donné un cercle tangent à deux droites données.

— De combien de manières peut-on décomposer le nombre $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$?? en produits de facteurs différents?

— Couper un angle solide à quatre faces par un plan de manière que la section soit un parallélogramme.

— Etant donnés trois nombres a, b, c, trouver une progression arithmétique à termes entiers telle que les nombres a, b, c, en fassent partie.

— Soient deux nombres $N = a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\gamma} \ldots$ et $N' = a'^{\alpha} \cdot b'^{\beta} c'^{\gamma'} \ldots$ comment peut-on trouver tous les diviseurs communs à ces deux nombres, et combien y a-t-il de ces diviseurs?

— Démontrer que la division harmonique est projective.

— Volume engendré par un octogone régulier tournant autour d'un de ses côtés.

Algèbre.

— A et A' étant deux valeurs approchées d'un nombre x, l'une par excès, l'autre par défaut, on réduit A et A' en fractions continues; établir que les quotients incomplets communs à A et A' sont ceux que fournirait la réduction de x en fraction continue.

— Sachant que $f(x)$ est un polynôme qui, égalé à zéro, a toutes ses racines inégales et autres que ± 1, on demande de décomposer l'expression

$$\frac{1}{(x^2 - 1)[f(x)]^2}$$

en fractions simples.

— Racine carrée de l'imaginaire $1 - 2\sqrt{-1}$.

— Séparer les racines de l'équation $x^3 + x^2 + \lambda x - 3 = 0$. Discussion, quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Pour quelles valeurs de x la série $1 + x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots$ est-elle convergente?

— Diviseurs du second degré en x du polynôme $x^4 + ax^2 + bx + c$.

— Valeur de l'expression $x^n Lx$ pour $x = 0$.

— Pour quelles valeurs de x la série

$$1 + x \cos\varphi + \frac{x^2 \cos 2\varphi}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 \cos 3\varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n \cos n\varphi}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

est-elle convergente?

— Calculer les dérivées des fonctions $y = \text{arc sin} \frac{x+1}{x^2+1}$ et $y = \text{arc sin} \frac{x(1+x)}{x^2+1}$, x étant un arc compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

— Limite de l'expression $\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 3y}$ quand x et y augmentent simultanément et croissent tous deux jusqu'à l'infini.

— Soit la fraction $\frac{1}{a - x}$; trouver une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et telle qu'elle soit convergente pour des valeurs assez petites de x, la limite étant $\frac{1}{a-x}$.

Même question pour $\frac{1}{(a-x)^2}$.

— Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles l'expression

$$\frac{1}{a^n}\ \frac{nx^{n-1}(a-x)+x^n}{(a-x)^2}$$

tend vers zéro?

Géométrie analytique à deux dimensions.

— Étant donnée l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$, calculer l'angle des deux droites qu'elle représente, et former l'équation homogène du 2ᵉ degré qui représente le système de leurs bissectrices.

— On donne en coordonnées rectangulaires l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots + F = 0$ d'une conique, et l'équation $ax + by + c = 0$ d'une droite; trouver les conditions que doivent remplir a, b, c, pour que la droite soit un diamètre de la courbe, et qu'elle fasse avec son conjugué l'angle θ.

Conditions pour que $\theta = 90°$.

— Par un point M d'une ellipse, on mène les deux rayons vecteurs MF et MF' ainsi que la normale ML; trouver le lieu des points P situés sur la normale et tels que l'on ait $\overline{MP}^2 = MF \times MF'$.

— Former l'équation qui représente le système des 4 normales qu'on peut mener d'un point $(\alpha\beta)$ à une ellipse, ou à une hyperbole donnée.

— Par un point fixe pris à l'intérieur d'une ellipse, on mène une sécante; sur une perpendiculaire élevée à cette sécante par le point fixe, on porte à partir de ce point une longueur égale à la moyenne géométrique des deux segments de la sécante. On demande le lieu des extrémités de ces longueurs quand on fait tourner la sécante autour du point fixe.

— Par un point M quelconque pris sur une ellipse on mène la normale MAB qui coupe le grand axe en A, et le petit axe en B. Démontrer qu'on a, quel que soit M, $MA \times MB = MF \times MF'$.

F et F' étant les deux foyers.

— Établir par le calcul qu'une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent à angle droit.

— Dans quelles régions du plan d'une hyperbole faut-il placer le point d'où l'on mène deux tangentes à la courbe pour que ces tangentes touchent la même branche de l'hyperbole?

Rechercher si un point donné $(\alpha\beta)$ est intérieur ou extérieur à la parabole $(ax + by)^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

— Trouver dans le plan de la parabole un point tel que les normales menées de ce point à la courbe fassent deux à deux entre elles des angles de 120°.

— Lieu des pôles des normales :

1° à l'ellipse; 2° à l'hyperbole; 3° à la parabole.

— Trouver les points de la courbe $\rho = a\sqrt{\cos 2\omega}$ où la tangente est parallèle à l'axe polaire.

— Construire géométriquement les éléments principaux d'une parabole dont on connait :

1° L'axe et 2 points;

2° 3 points et la direction de l'axe.

— Soit l'équation $y^2 = 2px + qx^2 + R$ (en coordonnées rectangles) p et q étaient connus, déterminer R de manière que l'origine soit un foyer et calculer l'abscisse de l'autre foyer.

— Le produit des aires du parallélogramme inscrit à l'ellipse et du parallélogramme circonscrit correspondant est égal à $8a^2b^2$.

Géométrie analytique à trois dimensions.

— Génération du paraboloïde elliptique par le mouvement d'un cercle. — Ce mode de génération peut-il donner tous les paraboloïdes elliptiques?

— Lieux des centres des sections obtenues en coupant la surface $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x$ par des plans passant : 1° par un point donné ; 2° par une droite donnée.

— Trouver les divers lieux des points tel que le rapport de leurs distances :
1° à un point et à un plan fixes;
2° à une droite et à un plan fixes;
3° à une droite et à un point fixes;
4° à deux droites fixes,
soit constant.

— Lieu des perpendiculaires menées par le sommet du cône $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ à tous les plans tangents.

— Si un trièdre trirectangle a son sommet au centre de l'ellipsoïde, la somme des carrés des inverses des segments déterminés par la surface sur les trois arêtes du trièdre est constante.

— Le cône formé par les normales menées aux sections centrales d'aire constante dans l'ellipsoïde n'est pas de révolution; trouver les plans cycliques.

— Cônes du deuxième degré qui passent par la rencontre de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et du cylindre $y^2 + x^2 - Rx = 0$. Combien y en a-t-il?

— Etant données trois axes rectangulaires et un point sur chacun d'eux, calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit et celles du centre du cercle inscrit, au triangle formé par les trois points.

— Etablir que si un cône a pour sommet un point d'un hyperboloïde de révolution et équilatère, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, et pour base le cercle de gorge, les sections antiparallèles sont perpendiculaires au plan du cercle de gorge.

— Par une droite ($x = az + p$, $y = bz + q$) mener les plans tangents à une surface du deuxième ordre et former l'équation qui représente le système de ces plans tangents.

Appliquer à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

— Former l'équation générale des surfaces du deuxième ordre qui contiennent deux droites données, et deux points donnés.

Distinguer entre le cas où les deux droites données sont dans un même plan, et celui où elles ne se rencontrent pas.

— Former l'équation du paraboloïde hyperbolique contenant l'axe des z, une parallèle à l'axe des x, et un point sur chacun des axes ox et oy.

— Former l'équation de l'hyperboloïde à une nappe rapporté aux deux génératrices rectilignes qui passent par un point de la surface, et au diamètre conjugué de leur plan.

Même question pour le paraboloïde hyperbolique.

— On donne la parabole ($z = 0$, $y^2 = 2p$) et on demande le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes rencontrent le plan xoy sur la parabole donnée.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 13272-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE
DE LA PARABOLE
ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 289 et suiv.)

LII. **Théorème.** — MD, MD′, DD′ (fig. 23) *sont trois tangentes à une parabole,* I *le point de contact de* DD′, F *le foyer; on a* $FD \times FD' = FM \times FI$.

Les triangles IDF et D′MF sont semblables, car, d'après le problème précédent, les angles IFD et MFD′ sont égaux, et il en est de même des angles IDF et D′MF qui ont même mesure; on en conclut la proportion $\frac{DF}{MF} = \frac{FI}{D'F}$; d'où la relation proposée.

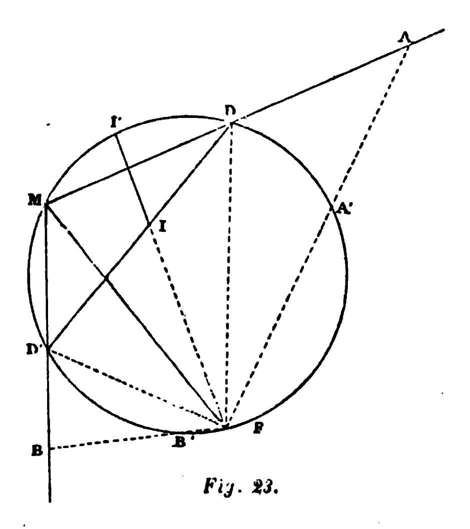


Fig. 23.

LIII. **Théorème.** — *Si deux tangentes* (fig. 23) *issues du point* M *et dont les points de contact sont* A *et* B, *sont coupées par une troisième tangente en* D *et* D′, *on a la proportion*

$$\frac{MD}{DA} = \frac{BD'}{MD'}.$$

Les triangles DFA et MFD′ sont semblables, car ils ont : 1° les angles DAF et D′MF égaux comme étant tous deux égaux à l'angle IDF (XLVII et LI); 2° les angles DFA et MFD′

égaux (LI); on en conclut la proportion

$$\frac{DA}{DF} = \frac{MD'}{D'F}.$$

De même, les triangles D'FB et MDF sont semblables comme ayant : 1° les angles D'FB et MFD égaux, puisqu'ils ont pour mesure des arcs égaux B'D' et MD (LI); 2° les angles FBD' et DMF égaux comme tous les deux égaux à l'angle DD'F; d'où la proportion

$$\frac{MD}{DF} = \frac{D'B}{D'F}.$$

En divisant ces deux proportions membre à membre, il vient

$$\frac{MD}{DA} = \frac{BD'}{MD'},$$

c'est-à-dire la proportion donnée.

Corollaire. — Si l'on a MA = MB, c'est-à-dire si les tangentes limitées à leur point de rencontre et à leurs points de contact sont égales, on peut, d'après une propriété connue des proportions, écrire la précédente

$$\frac{DA + MD}{MD} = \frac{MD' + D'B}{D'B}$$

et comme, par hypothèse

$$DA + MD = MD' + D'B,$$

en résulte $MD = D'B$

et aussi $MD' = DA.$

Donc, *si deux tangentes égales menées à une parabole sont coupées par une troisième, les segments déterminés sur ces tangentes sont égaux, mais les segments égaux ne sont pas placés de la même manière sur les tangentes.*

LIV. **Théorème de Steiner.** — *Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole se trouve sur la directrice.*

Lemme. — *Dans un triangle* ABC (fig. 24) *une hauteur* AD *rencontre la circonférence circonscrite en un point* O *symétrique par rapport au côté* BC, *du point de concours des hauteurs.*

En joignant BH et BO, on a deux triangles égaux BHD et BDO, car ils ont un côté commun BD; l'angle HBC

complémentaire de l'angle C est égal à l'angle DBO, complémentaire de l'angle O, et les deux angles O et C ont même mesure, donc DH = DO.

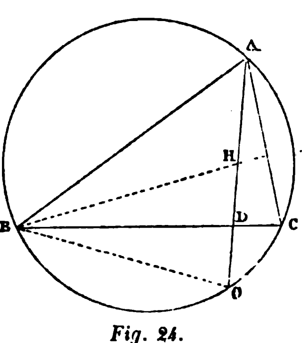


Fig. 24.

Soient *(fig. 24)* AB, BC, AC trois tangentes à une parabole de foyer F; la circonférence qui passe par les trois A, B, C passe aussi par le foyer F. Soient O le point de concours des hauteurs, G son symétrique par rapport à BC, I le point symétrique de F par rapport à BC, les deux droites IO et FG vont rencontrer évidemment la droite BC au même point N. On sait en outre (II, Remarque XLIII) que le point I appartient à la directrice.

D'abord, il s'agit de déterminer l'angle APN; extérieur au triangle NBP, il est égal à la somme des angles NBP et PNB
$$\text{APN} = \text{PNB} + \text{NBP};$$
mais, d'après la figure,
$$\text{PNB} = \text{CNG} = \text{CAG} - \text{FAB};$$
d'autre part, l'angle NBP, extérieur au triangle ABD, a pour valeur
$$\text{NBP} = \frac{\pi}{2} + \text{BAG}$$
et par suite
$$\text{APN} = \frac{\pi}{2} + \text{BAG} - \text{FAB} + \text{CAG} = \frac{\pi}{2} + \text{CAF}.$$

Si donc, laissant fixes l'angle A et le point F, on donne à BC toutes les positions pour lesquelles l'angle BFC est supplémentaire de l'angle A, cette droite BC, comme on l'a vu (XLIX), enveloppera une parabole de foyer F et tangente aux côtés de l'angle A. Dans ce mouvement la droite NPO restera fixe, puisque l'angle APN a une valeur indépendante de la position de BC; cette droite contenant tous les points symétriques du foyer par rapport à toutes les positions de la tangente BC est la directrice de la parabole; elle contiendra

également tous les points de concours des hauteurs de tous les triangles obtenus dans le mouvement de BC.

Corollaire I. — De ce qui précède, on déduit comme cas particulier: *les centres de tous les triangles équilatéraux circonscrits à une même parabole sont situés sur la directrice de cette parabole*, et: *les directrices de toutes les paraboles inscrites à un même triangle équilatéral donné passent toutes par le centre de ce triangle.*

Corollaire II. — Si l'on remarque que quatre droites données sur un plan peuvent être touchées par une même parabole (XLVIII, Corollaire II), on dira : *dans les quatre triangles que forment trois à trois quatre droites tracées sur un même plan, les points de concours des hauteurs appartiennent tous quatre à une même droite.* (Steiner.)

LV. **Théorème.** — *Si par le point* A (fig. 25) *de con-*

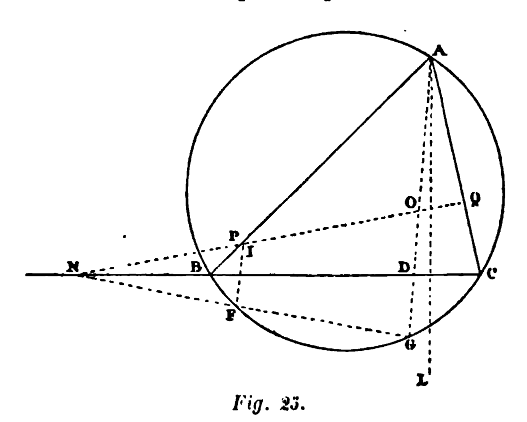


Fig. 25.

cours de deux tangentes on mène une parallèle à l'axe, l'angle LAC *que fait cette parallèle avec l'une des tangentes est égal à* FAB *que fait avec l'autre la ligne qui joint le foyer au point* A.

D'après le théorème précédent, la ligne NPO est la directrice de la parabole définie par le foyer F et les tangentes AB et AC; la parallèle AL à l'axe est perpendiculaire à cette directrice. Soit Q le point où NP rencontre AC, l'angle LAC a pour complément l'angle AQP; or l'angle APN extérieur

au triangle PAQ a pour valeur

$$APN = AQP + A,$$

d'où

$$AQP = APN - A,$$

ou à cause de la valeur de APN (LIV),

$$AQP = \frac{\pi}{2} - BAF$$

et par suite

$$LAC = BAF.$$

Corollaire I. — Dans le cas où le point F occupe le milieu de l'arc BFC, il est évident que la ligne AL coïncide avec AF; AL est l'axe lui-même de la parabole.

Corollaire II. — *Déterminer l'angle des axes de deux paraboles inscrites dans le même angle et de foyers donnés.*

Soient *(fig. 26)* A le point de concours des deux tangentes

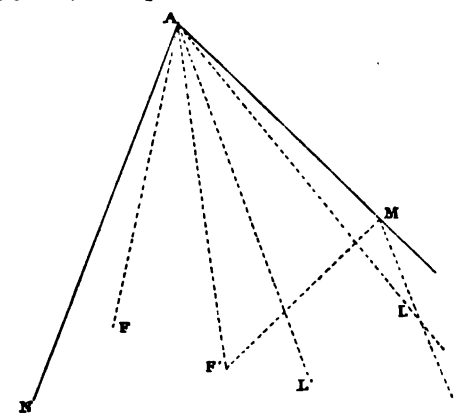


Fig. 26.

communes; F et F' les foyers; AL, AL' les parallèles aux axes menés par le point A: il est facile de voir que l'angle LAL' est égal à l'angle FAF'.

LVI. **Problème.** — *Étant donnée une parabole par son foyer et un angle circonscrit, construire une autre parabole inscrite dans le même angle dont l'axe fait avec celui de la première un angle donné, et connaissant: 1° ou son point de contact sur une des tangentes données; 2° ou une troisième tangente.*

Soient *(fig. 26)* A le sommet de l'angle circonscrit commun,

F le foyer de la première parabole ; dans les deux cas on mènera la ligne AF′ faisant avec AF l'angle donné (LV, Corollaire II) ; cette droite contiendra le foyer de la parabole cherchée ; cela fait, dans le premier cas, on mènera la ligne AL′ faisant avec l'une des tangentes, AM par exemple, un angle L′AM égal à l'angle F′AN; AL′ sera la direction de l'axe de la deuxième parabole (LV) ; par le point donné M, on mènera une parallèle à AL′ et par le même point une droite MF′ faisant avec AM le même angle que fait avec cette droite la parallèle précédente ; MF′ contiendra le foyer F′ (XLII) ; dans le second cas, le foyer sera au point de rencontre de AF′ et du cercle circonscrit aux trois tangentes. Connaissant le foyer et deux tangentes, la parabole est déterminée. Dans les deux cas, le problème n'admet qu'une solution.

VI

PROPRIÉTÉS DES NORMALES

LVII. **Théorème.** — *La normale en un point d'une parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et par la parallèle à l'axe menée par ce point.*

Cette propriété est une conséquence directe du théorème VII.

Soient *(fig. 27)* MD la normale en un point M d'une parabole, MF le rayon vecteur; le triangle MFD est évidemment isoscèle et I′ le milieu de MD est la projection du point F sur la normale ; I étant la projection du foyer sur la tangente, le quadrilatère MIFI′ est un carré et MI′ = FI ; par suite MD = 2FI; si l'on désigne par α l'angle FMD, le triangle ISF donne $IF = \frac{p}{2\cos\alpha}$ et alors $MD = \frac{p}{\cos\alpha}$,

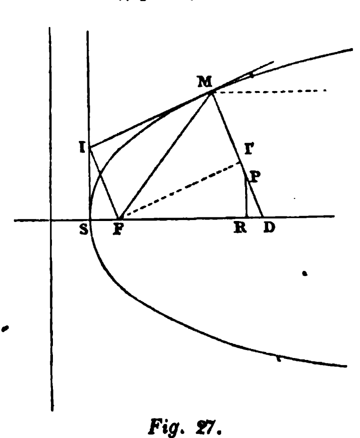


Fig. 27.

et si l'on remarque que MD cos α représente la projection de MD sur l'axe, projection que l'on appelle *sous-normale*, on dira que *dans la parabole la sous-normale est constante et égale au paramètre*. Cette projection est aussi celle de MD sur le rayon vecteur; elle est donc constante, quel que soit le point considéré.

LVIII. **Théorème.** — *Par un point pris dans le plan d'une parabole on peut, en général, mener trois normales à la courbe.*

Soient *(fig. 27)* P, le point considéré, PR sa distance à l'axe, positive si P est au-dessus de l'axe; la position de ce point sera déterminée par la longueur FR $= l$ et par PR $= d$. Le triangle PRD donne $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{\text{RD}}$;

on en tire facilement

$$\frac{\sin \alpha}{d} = \frac{\cos \alpha}{\text{RD}} = \frac{1}{\pm\sqrt{d^2 + \overline{\text{RD}}^2}};$$

d'où

$$\cos \alpha^2 = \frac{\overline{\text{RD}}^2}{d^2 + \overline{\text{RD}}^2}.$$

De plus, le triangle isoscèle FMD donne

$$\text{FD} = \frac{\text{MD}}{2 \cos \alpha} = \frac{p}{2 \cos^2 \alpha}$$

et il est à remarquer que cette expression n'est autre que celle du rayon vecteur FM.

En outre $\text{FD} = l + \text{RD}$;

égalant ces deux expressions de FD et résolvant par rapport à $\cos^2 \alpha$, il vient $\cos^2 \alpha = \frac{p}{2(l + \text{RD})}$.

Égalant aussi les deux expressions trouvées de $\cos^2 \alpha$ et ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de RD, on a

$$2\overline{\text{RD}}^3 + (2l - p)\,\overline{\text{RD}}^2 - pd^2 = 0. \quad (1)$$

Cette équation est du troisième degré, par rapport à RD; elle a donc trois racines; à chacune de ces racines correspond une normale issue du point P; donc de ce point partent trois normales.

Remarque. — *Si l'on porte sur l'axe d'une parabole, à partir du sommet, une longueur égale au rayon vecteur d'un point quel-*

conque de la courbe, et sur la perpendiculaire à l'axe menée du point obtenu une longueur égale à la normale au point choisi sur la courbe, l'extrémité de cette longueur est un point de la parabole.

Il suffit de remarquer qu'en vertu des expressions trouvées pour MF et pour MD, on a

$$\overline{MD}^2 = 2p \times MF \text{ (*)};$$

d'où la propriété énoncée, en vertu du théorème XLI.

LIX. **Théorème.** — *Pour tous les points d'où partent deux normales rectangulaires, la troisième normale se projette sur l'axe suivant une longueur constante.*

Soit *(fig. 28)* P un point d'où partent les normales PM, PM', PM", les deux premières étant rectangulaires; D, D', D" sont les points où ces normales rencontrent l'axe; d'après l'équation (1) du théorème précédent, le produit des distances du point R aux trois points D, D', D" a pour expression :

$$RD \times RD' \times RD'' = \frac{pd^2}{2};$$

or, le triangle DPD' est rectangle en P, donc

$$\overline{RP}^2 \text{ ou } d^2 = RD \times RD'$$

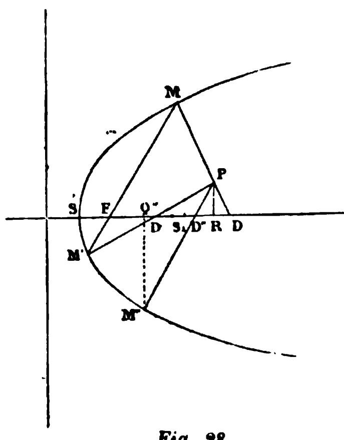


Fig. 28.

et la considération des deux relations précédentes donne

$$RD'' = \frac{p}{2}.$$

De plus, la sous-normale D"Q" étant égale à p, on a

$$RQ'' = \frac{3p}{2},$$

ce qui démontre le théorème.

(*) Cette propriété a été démontrée et utilisée par M. d'Ocagne; voy. *Journal de Math. élém.*, 3e année.

LX. **Théorème.** — *Le lieu du point d'où partent deux normales rectangulaires est une parabole.*

Il est évident, d'après le théorème précédent, que si le point P *(fig. 28)* est tel que la normale PM' a une projection sur l'axe égale à $\frac{3p}{2}$, les deux autres normales issues du même point sont rectangulaires. A la valeur de RD' égale à $\frac{p}{2}$ correspondent pour l et d des valeurs liées par une relation que l'on obtiendra en substituant à RD cette valeur $\frac{p}{2}$, dans l'équation (1) (XXIII); cette relation est

$$d^2 = \frac{p}{2}(l - p).$$

Si l'on prend à partir du point F un point S_1 tel que $FS_1 = p$, la distance du point R à ce point sera précisément $l - p$ et la relation précédente appliquée au point P s'écrira

$$\overline{RD}^2 = \frac{p}{2} RS_1,$$

ce qui prouve que, dans ces conditions, le point P se trouve sur une parabole de paramètre égal à la moitié de celui de la parabole primitive (XL).

LXI. **Théorème.** — *Le centre de gravité du triangle formé par les pieds des trois normales issues d'un même point se trouve sur l'axe.*

Soient *(fig. 29)* D_1, D_2, D_3 les points où les trois normales issues d'un point P rencontrent l'axe; on sait (LVIII) que ces points sont déterminés par l'équation

$$2\overline{RD}^3 + (2l - p)\overline{RD}^2 - pd^2 = 0 \qquad (1)$$

M_1 étant le pied d'une de ces normales, M_1Q_1 son ordonnée, les triangles semblables $M_1D_1Q_1$ et RPD_1 donnent la proportion

$$\frac{PR}{RD_1} = \frac{M_1Q_1}{Q_1D_1};$$

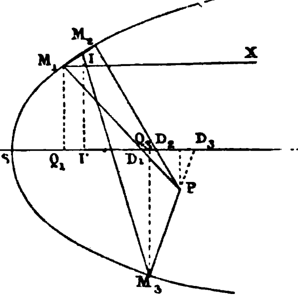


Fig. 29.

d'où, en vertu des notations employées,

$$RD_1 = \frac{pd}{M_1Q_1}.$$

Si dans l'équation (1) on remplace RD par l'expression $\frac{pd}{y}$, y désignant l'une quelconque des ordonnées des pieds des trois normales issues de P, puis multipliant tous les termes par y^2 et réduisant, on arrive à la nouvelle équation

$$y^3 - p(2l - p)y - 2p^2d = 0. \qquad (2)$$

Cette équation est privée de termes en y^2, donc la somme de ses racines est nulle; en les désignant par y_1, y_2, y_3, on a

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Pour que cette relation soit satisfaite, il faut que l'une de ces valeurs soit d'un signe contraire à celui des deux autres; dans le cas de la figure y_3 est négative, et alors

$$y_1 + y_2 = y_3.$$

Cela étant, soit I le milieu de M_1M_2; dans le trapèze $M_1Q_1Q_2M_2$, II' joint le milieu des côtés non parallèles, donc

$$II' = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_3}{2} = \frac{M_3Q_3}{2}$$

Soit G le point où la droite IM_3 rencontre l'axe et II' l'ordonnée du point I; les triangles semblables II'G et M_3Q_3G montrent que, en vertu des dernières égalités,

$$IG = \frac{M_3G}{2}$$

et par suite que le point G partage la médiane IM_3 en deux parties, dont l'une est le tiers de la ligne totale, c'est-à-dire que ce point est le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.

LXII. **Théorème.** — M_1, M_2, M_3 (fig. 29) *sont les pieds des normales menées d'un point* P *à une parabole : 1° la corde* M_1M_2 *qui joint les deux points situés d'un même côté de l'axe et la droite qui joint le troisième point* M_3 *au sommet sont également inclinées sur l'axe; 2° la corde qui joint deux points situés de part et d'autre de l'axe fait avec lui un angle supplémentaire de celui que fait avec cet axe la droite qui joint le sommet au troisième point.*

1° On a vu, en effet (XLI), que si θ désigne l'angle de M_1M_2

avec l'axe, on a $\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$

ou en vertu de la relation

$$y_1 + y_2 = y_3$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2p}{y_3},$$

Le point M appartenant à la parabole, on a aussi

$$y_3^2 = 2px_3 \text{ ou } \frac{y_3}{x_3} = \frac{2p}{y_3}$$

et par suite $\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y_3}{x_3} = \operatorname{tg}\theta'.$

θ' désignant l'angle de SM_3 avec l'axe, c'est-à-dire que $\theta = \theta'$.

2° Soit θ_1 l'angle de M_1M_3 avec l'axe ; la relation du théorème VI donne dans ce cas

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{2p}{y_1 - y_3},$$

puisque y_3 est négative; or on sait que

$$y_1 - y_3 = -y_2,$$

de sorte que $\quad \operatorname{tg}\theta_1 = -\frac{2p}{y_2}.$

Le point M_2 appartenant à la parabole, on a, comme dans le premier cas, en désignant par θ'_1 l'angle de SM_2 avec l'axe

$$\operatorname{tg}\theta'_1 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{2p}{y_2} = -\operatorname{tg}\theta_1,$$

c'est-à-dire que $\quad \theta'_1 = \pi - \theta_1.$

Corollaire. — *Le cercle qui passe par les pieds des trois normales issues d'un point et menées à une parabole, passe par le sommet.*

Par le point M_1, soit M_1X parallèle à l'axe ; l'angle $M_2M_1M_3$ est partagé par cette droite en deux parties; d'après ce qu'on vient de démontrer, l'angle

$$M_2M_1X = \theta = \theta' = M_3SR;$$

de même l'angle M_3M_1X supplémentaire de M_2M_3 avec l'axe est égal à θ'_1 ou à M_2SR; donc l'angle total $M_2M_1M_3$ est égal à l'angle M_3SM_2 et par suite le cercle qui passe par les trois points M_1, M_2, M_3 passe aussi par le point S.

LXIII. **Théorème.** — *Le produit des ordonnées et celui des abscisses de deux points dont les normales se coupent sur la courbe est constant.*

Le produit des racines de l'équation (2) (LXI) est donné par la relation $y_1 y_2 y_3 = 2p^2 d$
et si l'on suppose que le point P (*fig. 29*) d'où partent les normales vient coïncider avec M_3, on a $d = y_3$ et la relation précédente devient $y_1 y_2 = 2p^2$.

Comme les deux points M_1 et M_2 appartiennent à la parabole, on a $y_1^2 = 2px_1$ et $y_2^2 = 2px_2$
et par suite $y_1 y_2 = \sqrt{2px_1} \times \sqrt{2px_2} = 2p\sqrt{x_1 x_2}$;
d'où, en vertu de la valeur du produit $y_1 y_2$ qu'on vient de trouver $x_1 x_2 = p^2$,
ce qui justifie l'énoncé.

LXIV. **Théorème.** — *Les normales issues d'un point pris sur une parabole font avec les rayons vecteurs correspondants des angles* α, α', α'' *tels que*

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \pi.$$

En effet, si l'on divise par p les deux membres des deux expressions suivantes obtenues, théorèmes LXI et LXIII, savoir

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$
$$y_1 y_2 = 2p^2$$

auxquelles satisfont les ordonnées des pieds de ces normales, on voit facilement qu'elles donnent lieu aux deux suivantes

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha'' = 0$$
$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = 2.$$

En vertu de la seconde, on a

$$\operatorname{tg} (\alpha + \alpha') = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha'}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha'$$

ou, à cause de la première,

$$\operatorname{tg} (\alpha + \alpha') = -\operatorname{tg} \alpha'';$$

égalité qui ne peut avoir lieu que si

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \pi.$$

Corollaire. — *L'angle que fait une normale issue d'un point d'une parabole avec la normale en ce point est supplémentaire de l'angle que fait avec l'axe la seconde normale issue du même point.*

Soient *(fig. 15)* P le point d'où partent les normales PM_1, PM_2, A et B les points où elles rencontrent l'axe, C le point où la normale en P rencontre cet axe. Le triangle PBC renfermant les angles $\widehat{PBC} = \alpha'$, $\widehat{PCB} = \alpha'$, il faut, en vertu de la relation que l'on vient d'obtenir, que l'angle BPC soit égal à α; de même l'angle APC est égal à α'.

LXV. **Théorème.** — *Si sur chacune des deux normales issues d'un point* P *d'une parabole, autres que celle qui est normale en ce point, on porte, à partir du point* P *une longueur égale à la portion interceptée entre l'axe et la courbe, les deux points obtenus sont sur un cercle tangent en* P *à la parabole.*

Soient *(fig. 30)* A' et B' les points ainsi obtenus, c'est-à-dire tels que

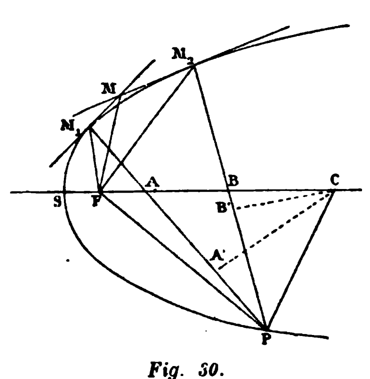


Fig. 30.

$$PB' = M_2B,\ PA' = M_1A;$$

on sait (LVII) que les longueurs M_1A et M_2B ont pour expressions

$$M_1A \text{ ou } PA' = \frac{p}{\cos\alpha}\ M_1A \text{ ou } PB' = \frac{p}{\cos\alpha'}$$

L'angle A'PC est d'après le corollaire du théorème précédent égal à α'; donc la portion de la normale PC qui se projette suivant PA' a pour expression

$$\frac{p}{\cos\alpha\cos\alpha'};$$

or de ce que l'angle CPB' est égal à α, la portion de PC qui se projette suivant PB' a la même valeur; donc les perpendiculaires élevées en A' et B' à PA et PB coupent PC au même point, et par suite les points P, A', B' sont sur un cercle dont le diamètre est la normale en P, c'est-à-dire tangent en P à la courbe.

Remarque. — L'expression obtenue dans le théorème LXIV, savoir

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha = 2,$$

peut s'écrire $\sin\alpha \sin\alpha' = 2 \cos\alpha \cos\alpha'$
ou

$$\cos\alpha \cos\alpha' = \sin\alpha \sin\alpha' - \cos\alpha \cos\alpha' = -\cos(\alpha + \alpha') = \cos\alpha''$$

en vertu de la relation

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \pi.$$

Il en résulte que le diamètre du cercle précédent a pour expression $\dfrac{p}{\cos\alpha \cos\alpha'} = \dfrac{p}{\cos\alpha''}$, c'est-à-dire la longueur de la normale en P, limitée à la courbe et à l'axe.

LXVI. **Théorème.** — *1° La bissectrice de l'angle des rayons vecteurs de deux points dont les normales se coupent en un point d'une parabole, est parallèle à la normale en ce point ; 2° le lieu du point de concours des tangentes en deux pareils points est une droite perpendiculaire à l'axe.*

1° On sait *(fig. 30)* que le triangle M_1FA est isoscèle et que l'angle M_1FA est égal à $\pi - 2\alpha$; de même $M_2FB = \pi - 2\alpha'$; si donc la ligne FM est bissectrice de l'angle M_1FM_2, l'angle MFA a pour expression $\dfrac{\pi - 2\alpha + \pi - 2\alpha'}{2} = \pi - (\alpha + \alpha') = \alpha''$, c'est-à-dire qu'il est égal à l'angle PCA ou que les droites FM et PC sont parallèles.

2° Soit M le point de concours des tangentes en M_1 et M_2; on sait que la ligne FM est bissectrice de l'angle M_1FM_2 (XLIV) et de plus (XLVI) que

$$\overline{FM}^2 = FM_1 \times FM_2;$$

or, on sait (LVIII), en employant les notations des théorèmes précédents, que

$$FM_1 = \frac{p}{2\cos^2\alpha}, \quad FM_2 = \frac{p}{2\cos^2\alpha'}$$

et comme, d'après la remarque du théorème XXX,

$$\cos\alpha \cos\alpha' = \cos\alpha'',$$

on a

$$\overline{FM}^2 = \frac{p^2}{4\cos^2\alpha''},$$

d'où

$$FM = \frac{p}{2\cos\alpha''}.$$

Cette longueur est précisément égale à la moitié de la normale PC; or on sait que celle-ci se projette sur l'axe suivant une longueur constante p; donc la ligne FM qui lui est parallèle, se projettera sur l'axe suivant une longueur égale à $\frac{p}{2}$, c'est-à-dire que le point M se projettera sur l'axe à la distance $\frac{p}{2}$ du foyer et, par suite se trouvera toujours sur une perpendiculaire à l'axe menée à cette distance du foyer.

LXVII. **Problème.** — *Construire les tangentes et les normales en deux points tels que ces normales se coupent sur la courbe en un point donné.*

On sait, d'après le théorème précédent, que le point M *(fig. 30)* de concours des tangentes est à la fois sur une parallèle à la normale en P, menée par le foyer, et sur une perpendiculaire à l'axe, distante du foyer de la longueur $\frac{p}{2}$; d'où les constructions suivantes : on construira à la distance $\frac{p}{2}$ du foyer une perpendiculaire à l'axe; la normale au point donné étant construite, on mènera par le foyer une parallèle à cette normale; les deux droites ainsi obtenues se couperont en un point qui sera le point de concours des tangentes cherchées; on construira ces tangentes d'après le procédé connu, et il suffira de joindre leurs points de contact au point donné pour avoir les normales correspondantes.

LXVIII. **Théorème.** — *Le cercle circonscrit au triangle* M_1M_2P (fig. 30) *et qui passe par le sommet* (LXII, Corollaire) *passe aussi par le pôle* M *de la corde* M_1M_2.

En effet, dans le quadrilatère MM_1MM_2 les angles PM_1M et PM_2M étant des angles droits, les deux angles M_1MM_2 et M_1PM_2 sont supplémentaires, et par suite le quadrilatère M_1PM_2M est inscriptible dans un cercle, ce qui démontre le théorème.

On déduit de ce qui précède une autre solution du problème XXXII; le cercle déterminé par les points P, S, M_1, M_2, M a évidemment pour diamètre la droite PM, par conséquent l'angle MSP est droit; d'où la construction suivante: la droite, lieu du point M étant menée, on élèvera en S une perpendiculaire à SP qui rencontrera la droite précédente au point M, d'où partent les tangentes cherchées.

LXIX. **Problème.** — *Construire dans une parabole la corde de longueur minimum normale à la courbe à une de ses extrémités.*

Soit *(fig. 30)* PM_1 une pareille corde; en menant les ordonnées des deux extrémités, on voit facilement que la longueur PM_1 a pour expression, d'après les notations employées,

$$PM_1 = \frac{y_1 - y_2}{\sin \alpha};$$

or, on sait que $y_1 = p \operatorname{tg} \alpha, \quad y_2 = p \operatorname{tg} \alpha''$;

donc $$PM_1 = \frac{p(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'')}{\sin \alpha}.$$

Mais en vertu des relations établies (LXIV), on a

$$\operatorname{tg} \alpha'' = -\operatorname{tg}(\alpha + \alpha') = -\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha' = -\operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$$

de sorte que, finalement, il vient

$$PM_1 = \frac{2p\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)}{\sin \alpha} = \frac{2p}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Cette expression montre que le minimum de PM_1 correspond au maximum du produit $\sin^2 \alpha \cos \alpha$, en appliquant à ce produit le principe de Fermat, on trouve facilement que, pour le cas du maximum, l'angle α doit satisfaire la relation $$\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 0,$$
d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{2}.$$

A cette valeur double de $\operatorname{tg} \alpha$ correspondent deux cordes symétriques par rapport à l'axe et répondant à l'énoncé.

Il est à remarquer que cette valeur est indépendante du paramètre de la parabole; elle convient donc à toutes les paraboles.

Pour construire cette corde, il est commode de déterminer la longueur du rayon vecteur du point où elle est normale; pour cela, on a

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

d'où, par le rayon vecteur (LVIII)

$$FM_1 = \frac{p}{2\cos^2\alpha} = \frac{3p}{2}.$$

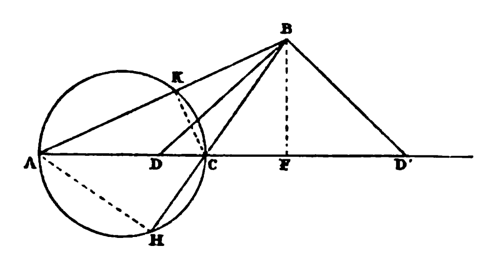
On en déduit la construction suivante: Du foyer comme centre avec $\frac{3p}{2}$ pour rayon on décrit un arc de cercle qui coupe la courbe en deux points et l'axe en un point; en joignant ce point à chacun des deux autres, on a les deux cordes symétriques par rapport à l'axe et qui répondent à la question. *(A suivre.)*

QUESTION 179.

Solution par M. LONGUEVILLE, Collège de Charleville.

Construire géométriquement un triangle connaissant un côté, le pied de la hauteur correspondante et sachant que les bissectrices d'un des angles adjacents à ce côté sont égales.

Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle



demandé. On connaît le côté BC, le pied H de la hauteur correspondante et l'on sait que les bissectrices de l'angle B sont égales.

Dans le triangle AHC, qui est rectangle,

$$ACH = BCF = 45° + \frac{B}{2};$$

donc $$CAH = 90° - 45° - \frac{1}{2}B = 45° - \frac{B}{2}.$$

De même, dans le triangle BAF, $BAF = 45° - \frac{B}{2}$, donc CAH = CAB. Il résulte de là que si sur AC comme diamètre on décrit une circonférence, les cordes CK et CH seront égales. De là, la construction suivante :

Au point H, on élèvera sur BCH une perpendiculaire ; puis, du point C comme centre avec CH pour rayon, on décrira une circonférence ; par le point B, on mènera une tangente à cette circonférence, et la rencontre de la perpendiculaire avec cette tangente déterminera le point A, et par suite le triangle.

Du point B, on peut mener deux tangentes à la circonférence décrite avec CH pour rayon ; on obtiendra donc deux triangles qui répondront à la question. Or, ces deux triangles étant égaux, il n'y aura en réalité qu'une solution à ce problème.

Pour que le problème soit possible

on doit avoir $CH \leq CB$

ou comme $CH = CK$

$CK \leq CB$

c'est-à-dire que la perpendiculaire CK est plus petite que l'oblique CB. Le problème est donc toujours possible.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gindre, de Lons-le-Saulnier ; Arthus Bertrand, école Albert-le-Grand, Arcueil ; Deslais, au Mans ; Marin, à Angers ; Chaillet, à Montauban.

QUESTION 180.

Solution par M. Longueville, élève au Collège de Charleville.

Sur les trois arêtes d'un trièdre on prend trois longueurs égales à l'unité OA, OB, OC.

Démontrer que si l'on appelle V *le volume du tétraèdre, on a*

$$3V=\sqrt{\sin\frac{(a+b+c)}{2}\sin\frac{b-c-a}{2}\sin\frac{(c+a-b)}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}$$

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet O sur la base ABC. H coïncide dans ce cas avec le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soient

$$\begin{aligned} AOB &= a,\\ AOC &= b,\\ BOC &= a,\\ BC &= l,\\ AC &= m,\\ AB &= n,\\ l+m+n &= 2p. \end{aligned}$$

On a $3\ V = \text{aire ABC}\ .\ OH = S\sqrt{1-R^2}$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{16\,S^2 - l^2m^2n^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{16p(p-l)(p-m)(p-n) - l^2m^2n^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2l^2m^2 + 2m^2n^2 + 2l^2n^2 - l^4 - m^4 - n^4 - l^2m^2n^2}$$

Dans le triangle ABO abaissons la perpendiculaire OD, nous aurons

$$\frac{n}{2} = \sin\frac{c}{2}, \qquad n = 2\sin\frac{c}{2};$$

de même on aurait $l = 2 \sin \frac{a}{2}$

$m = 2 \sin \frac{b}{2}$

remplaçons l, m, n par leur valeur respective, on a

$$3\,V = \frac{1}{4}\sqrt{4(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c)}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{4}}$$

ou en remplaçant $\cos^2 b$ par $(1 - \sin^2 b)$, $\cos^2 c$ par $1 - \sin^2 c$, et ajoutant et retranchant $\frac{\sin^2 b \sin^2 c}{4}$

$$3\,V = \sqrt{\frac{-\cos^2 a - 1 + \sin^2 b + \sin^2 c + 2\cos a \cos b \cos c + \sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c}{4}}$$

mais

$$-1 + \sin^2 b + \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c = -\cos^2 b \cos^2 c,$$
$$= -(1 - \sin^2 b)(1 - \sin^2 c);$$

dès lors

$$3\,V = \sqrt{\frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{4}}$$

ou

$$3V = \sqrt{\frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c)(\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c)}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos(b - c) - \cos a}{2} \cdot \frac{\cos a - \cos(b + c)}{2}}$$

$$= \sqrt{\sin\frac{(a + b - c)}{2} \cdot \sin\frac{(a + c - b)}{2} \cdot \sin\left(\frac{b + c - a}{2}\right) \sin\frac{(a + b - c)}{2}}$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lesoille, Speckel, à Sedan; Croneau, à Versailles.

QUESTION 183.

Solution par M. Deslais, élève au Lycée du Mans.

Prouver que (a — b) $\sqrt{ab}$ *est divisible par* 24 *si* ab *est un carré parfait et que* a *et* b *soient de même parité.*

Nous allons démontrer que ce produit est divisible par 8 et par 3.

1° *Par* 8. Supposons a et b pairs ; $a = 2n$, $b = 2n'$. Le produit peut se mettre sous la forme

$$2(n - n')\sqrt{4nn'} = 4(n - n')\sqrt{nn'}.$$

Si n et n' sont de même parité, $n - n'$ est divisible par 2; dans le cas contraire le facteur pair est divisible par 4, puisque nn' est carré parfait. Le produit est donc divisible par 8. Soient a et b impairs ; $a - b$ est pair, $ab = (2n + 1)(2n' + 1)$ est un carré parfait, c'est-à-dire un multiple de 8 augmenté de 1 ; il en résulte que a et b sont des multiples de 8 augmentés de 1 et alors $a - b$ est divisible par 8.

2° *Par* 3. Si a et b sont multiples de 3, $a - b$ est divisible par 3. Il en est de même si a et b sont des multiples de 3 plus 1 ou plus 2. Si un seul de ces facteurs est multiple de 3, il l'est de 9, puisque ab est un carré parfait, $\sqrt{ab}$ est alors multiple de 3.

Ils ne peuvent être l'un $m3 + 1$ et l'autre $m3 + 2$ parce qu'un carré parfait n'est jamais $m3 + 2$.

Le produit proposé, étant toujours divisible par 3 et par 8, dans les limites de l'hypothèse, est divisible par 24.

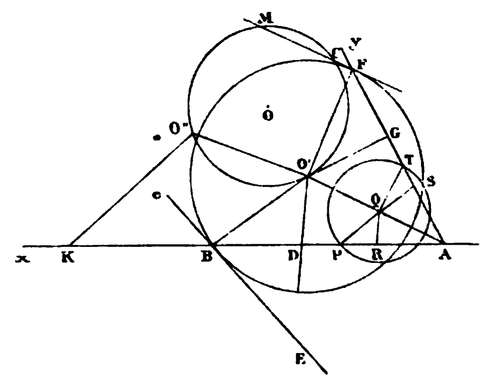
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Clouet, à Epernay ; Croneau, élève du lycée Fontanes ; Huet, à Orléans.

QUESTION 187.

Solution par M. Breuillé, élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

Décrire un cercle ayant son centre sur une circonférence donnée et coupant sous des angles donnés deux droites données.

Soient O la circonférence donnée, Ax, Ay les deux droites



également données.

Supposons que O′ soit la circonférence répondant à la question. Menons en B et en F les tangentes BC, FM.

$$CBx = \alpha, \quad MFy = \beta.$$

Or $DBE = CBx = \alpha$, $O'BD = 90 - \alpha$, $BO'D = \alpha$.

On démontrerait de même que $GO'F = \beta$.

Si l'on connaissait le rayon de la circonférence cherchée, on pourrait construire les deux triangles O′DB et O′FG. Joignons O′A et prenons sur O′A un point quelconque Q; de Q menons QP parallèle à O′B, et de ce même point Q comme centre avec PQ pour rayon décrivons une circonférence. Cette circonférence est homothétique à O′ par rapport à A.

Elle coupe donc Ax et Ay sous les mêmes angles que O′ et réciproquement. Or nous connaissons $PQR = \alpha$ et $SQT = \beta$. Nous pouvons donc construire ces triangles, en nous donnant un rayon arbitraire R.

La circonférence obtenue coupera Ax et Ay sous des angles donnés α et β, mais n'aura pas son centre sur O. Nous joindrons alors QA; nous prolongerons cette ligne en O′ et O″; de O′ et O″ nous mènerons O′B, O″K parallèles à PQ. De O′ et O″ comme centres avec O′B et O″K comme rayons on décrira des circonférences qui seront les circonférences répondant à la question.

Nota. — M. Daguillon, du Lycée Henri IV, a résolu la même question.

QUESTION 195.

Solution par M. Gossieaux, élève du Lycée de Saint-Quentin.

Sur un quadrant de centre O *on prend un point* C; *déterminer sur la tangente en* A *un point* D *tel que les surfaces des triangles* ACD, OCD *soient entre elles dans un rapport donné* K.

Soit α l'angle AOC, γ l'angle inconnu AOD.

On a

$$\text{DAC} = \frac{\text{AOC}}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Il faut déterminer le point D de façon que

$$\frac{\text{surf ACD}}{\text{surf OCD}} = \text{K};$$

or,

$$\text{surf ACD} = \frac{\text{AD} \,.\, \text{AC} \,.\, \sin \frac{\alpha}{2}}{2}$$

et comme

$$\text{AD} = \text{R} \operatorname{tg} \gamma$$

$$\text{AC} = 2\text{R} \sin \frac{\alpha}{2}$$

on a

$$\text{surf ACD} = \text{R}^2 \operatorname{tg} \gamma \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

de même

$$\text{surf OCD} = \frac{\text{OC} \,.\, \text{OD} \sin(\alpha - \gamma)}{2}.$$

Or

$$\text{OD} = \frac{\text{R}}{\cos \gamma};$$

donc

$$\text{surf OCD} = \frac{\text{R}^2 \sin(\alpha - \gamma)}{2 \cos \gamma};$$

dès lors

$$\text{K} = \frac{\text{R}^2 \operatorname{tg}\gamma \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2} \text{R}^2 \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma}} = \frac{2 \operatorname{tg}\gamma \cos\gamma \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin(\alpha - \gamma)}$$

$$\text{K} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\gamma}{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\gamma};$$

d'où $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{K \sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + K\cos\alpha};$$

Si $\alpha = 0$ $\sin\alpha = 0$ $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$ $\cos\alpha = 1$;

donc $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{0}{K} = 0.$$

La tangente étant nulle, D est en A; le problème est impossible.

Si α augmente de 0 à 90° en restant plus petit que 90°, $\operatorname{tg}\gamma$ prend des valeurs positives, de même γ.

Si $\alpha = 90$, $\sin\alpha = 1$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$, $\cos\alpha = 0$.

Dès lors $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{K}{1} = K.$$

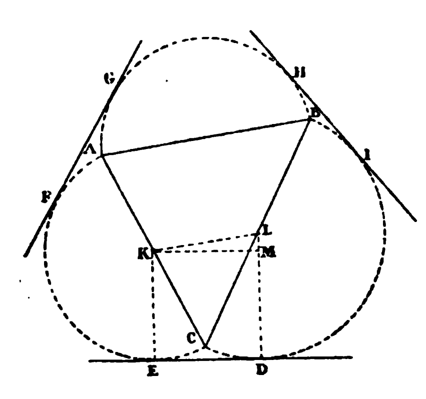
Si $\alpha = 90°$, K est la valeur maximum de $\operatorname{tg}\gamma$, puisque cette valeur est le maximum de α.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Boulogne, Hoet, de Saint-Quentin; Letellier, de Tarbes; Daguillon, lycée Henri IV, à Paris.

QUESTION 196.

Solution par M. Daguillon, élève du Lycée Henri IV.

Sur les trois côtés d'un triangle quelconque, comme diamètres, on décrit des circonférences et on mène les tangentes communes à ces circonférences considérées deux à deux. Démontrer que le produit des trois tangentes communes est égal à la surface du triangle multipliée par le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.



Cherchons la valeur de la tangente DE en

fonction des côtés. On a :

$$DE = KM = \sqrt{KL^2 - (DL - KE)^2}.$$

Or $$KL = \frac{c}{2},\quad DL = \frac{a}{2},\quad KE = \frac{b}{2};$$

donc $$DE = \frac{\sqrt{c^2 - (a-b)^2}}{2} = \sqrt{(p-a)(p-b)}.$$

De même on trouverait

$$FG = \sqrt{(p-b)(p-c)} \text{ et } HI = \sqrt{(p-a)(p-c)}$$

Dès lors

$$DE \times FG \times HI = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Or $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

et $$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

donc

$$\text{Surf ABC} \times r = (p-a)(p-b)(p-c);$$

par suite

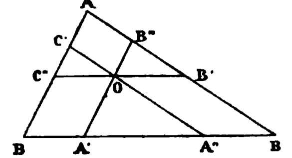
$$DE \times FG \times IH = \text{surf ABC} \times r.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. G. Loria, à Mantoue; Lachesnais, à Versailles; Martin, école de Passy; Arbez, école Saint-Joseph, à Thonon; Deslais, au Mans; Bénard, à Châteauroux.

QUESTION 197.

Solution par M. GUÉROULT, élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

Si par un point O pris dans l'intérieur d'un triangle on mène des parallèles aux trois côtés, on détermine sur chaque côté trois segments; le carré du produit des trois segments intermédiaires est égal au produit des six autres.



Il faut démontrer que l'on a

$$(C'C'' \,.\, B'B'' \,.\, A'A'')^2 = AC' \,.\, AB'' \,.\, CB' \,.\, CA'' \,.\, BA' \,.\, BC''.$$

Les triangles C'OC", B'OB", A'OA" sont semblables en vertu du parallélisme des droites AB, A'B"; AC, A"C'; BC, B'C"; et

en vertu du parallélisme des mêmes droites, les figures AC'OB'', OB'CA'', OC''BA' sont des parallélogrammes.

Or dans les triangles semblables OC'C'', OA'A'', OB'B'', on a les relations

$$\frac{C'C''}{C'O} = \frac{OA'}{A'A''}, \quad \frac{OB'}{B'B''} = \frac{A'A''}{OA''}, \quad \frac{C'C''}{OC'} = \frac{OB''}{B'B''}$$

ou en chassant les dénominateurs

$$C'C'' \,.\, A'A'' = OA' \,.\, C''O$$
$$B'B'' \,.\, A'A'' = OB' \,.\, OA''$$
$$C'C'' \,.\, B'B'' = OC' \,.\, OB''$$

multipliant

$$(A'A'' \,.\, B'B'' \,.\, C'C'')^2 = OA' \,.\, C''O \,.\, OB' \,.\, OA'' \,.\, OC' \,.\, OB''.$$

Mais
$$OA' = BC'' \qquad OA'' = CB'$$
$$OC'' = BA' \qquad OC' = AB''$$
$$OB' = CA'' \qquad OB'' = AC'$$

Substituant ces valeurs on trouve définitivement

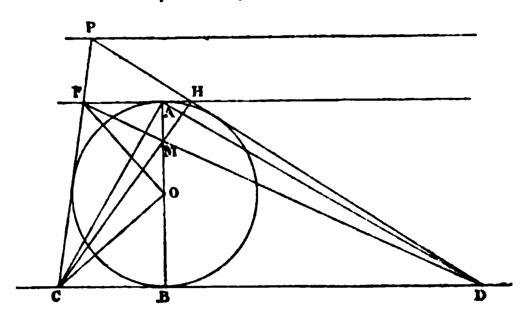
$$(C'C'' \,.\, B'B'' \,.\, A'A'')^2 = AC' \,.\, AB'' \,.\, CB' \,.\, CA'' \,.\, BA' \,.\, BC''.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Daguillon, Lesieur, élèves du lycée Henri IV; Prugnet, de Châteauroux; Gossieaux, Boulogne, Hoet, de Saint-Quentin; Montérou, à Pau; Tricon, à Marseille; Hugot, à Lyon; Deslais, au Mans; Latapie, à Saint-Paul-lès-Dax; Bousquet, à Nice.

QUESTION 200.

Solution par M. Dupuy, élève du Lycée de Grenoble.

On donne une circonférence, un diamètre AB *et les tangentes à*



ses extrémités. Un angle droit dont le sommet est en A *coupe la*

tangente en B *aux deux points* C *et* D. *Par* C *et* D *on mène des tangentes à la circonférence; ces tangentes rencontrent en* F *et en* H *la tangente en* A *et se coupent elles-mêmes au point* P.

1° *Les diagonales du trapèze* CDHF *se coupent sur la diamètre* AB *en un point* M *tel que* $AM = \frac{AB}{5}$.

2° *Lieu du point* P *quand l'angle droit tourne autour de* A.

(Nomy.)

On sait que dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle les deux diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés sont quatre droites se coupant en un même point (Rouché, *Géométrie*); par conséquent le point d'intersection des droites CH, FD est sur AB. Or on a $\frac{AM}{MB} = \frac{AF}{BD}$, et $\overline{AB}^2 = BD \cdot BC$; de plus les triangles semblables OAF, OCB donnent $\frac{AF}{AO} = \frac{OB}{CB}$ et comme $AO = OB$, on a $\overline{OB}^2 = AF \cdot BC$.

Donc $$\frac{AF}{BD} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{AB}^2}.$$

De plus, $AB = 2OB$, $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$

ou encore $$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}.$$

2° Le cercle et la tangente étant fixes, le produit $CB \cdot BD = \overline{AB}^2 =$ constante. On est donc ramené au lieu énoncé dans la question n° 175 (t. III, p. 223).

Le lieu est une parallèle à CBD menée à une distance égale à $\frac{8}{5}$ R.

NOTA. — M. Deslais, élève au Lycée du Mans, a résolu la même question.

QUESTION 201.

Solution par M. Vuattoux, pensionnat Saint-Joseph, à Thonon.

Soient O *le centre d'un cercle,* ABC *un triangle circonscrit à ce cercle,* A'B'C' *les points de contact des côtés* BC, CA, AB. *Désignons par* R *le rayon du cercle, par* S *et* S' *les aires des triangles* ABC, A'B'C'. *Démontrer les relations*

$$S^2 = R^4 \frac{CA'B' \times BA'C' \times AB'C'}{OA'B' \times OB'C' \times OA'C'}$$

$$S = \frac{4 \cdot CA'B' \times BA'C' \times AB'C'}{S'^2}.$$

Soit R' le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. On sait que

$$AB' = AC' = p - a$$
$$BC' = BA' = p - b$$
$$CA' = CB' = p - c$$

Les angles formés autour du point C étant les suppléments respectifs des angles A, B, C, on aura

$$\text{Surf. } CA'B' = \frac{1}{2}(p-c)^2 \sin C,$$

$$\text{Surf. } BA'C' = \frac{1}{2}(p-b)^2 \sin B,$$

$$\text{Surf. } AB'C' = \frac{1}{2}(p-a)^2 \sin A,$$

et

$$\text{Surf. } OA'B' = \frac{1}{2} R^2 \sin C,$$

$$\text{Surf. } OB'C' = \frac{1}{2} R^2 \sin A,$$

$$\text{Surf. } OC'A' = \frac{1}{2} R^2 \sin B.$$

Portant ces valeurs dans la première des relations données, on a :

$$S^2 = R^4 \frac{\frac{1}{2}(p-a)^2 \sin A \times \frac{1}{2}(p-b)^2 \sin B \times \frac{1}{2}(p-c)^2 \sin C}{\frac{1}{2} R^2 \sin C . \frac{1}{2} R^2 \sin B . \frac{1}{2} R^2 \sin A}$$

ou $$S^2 = \frac{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{R^2}.$$

Or $$R^2 = \frac{p(p-a)(p-b)p-c)}{p^2}.$$

Remplaçant R^2 par cette valeur dans la formule précédente, on a $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$
qui est une identité. Donc la première des relations est vérifiée.

La surface du triangle $A'B'C' = \frac{1}{2}R^2(\sin A + \sin B + \sin C)$;

or $$\sin A = \frac{a}{2R'}, \quad \sin B = \frac{b}{2R'}, \quad \sin C = \frac{c}{2R'};$$

donc $$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R'};$$

dès lors $$S' = \frac{1}{2}R^2 \frac{p}{R'} = \frac{pR^2}{2R'} = \frac{RS}{2R'};$$

on en tire $$S'^2 = \frac{R^2S^2}{4R'^2}.$$

En portant cette valeur ainsi que celles trouvées précédemment dans la seconde des relations trouvées, on a

$$S^2 = \frac{\frac{1}{2}(p-a)^2 . \frac{1}{2}(p-b)^2 \frac{1}{2}(p-c)^2 . \sin A \sin B \sin C \times 4R'^2 \times 4}{R^2S^2}$$
$$= \frac{2R'^2(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \sin A \sin B \sin C}{R^2S^2}$$

ou $$S = 2R'^2 \sin A \sin B \sin C$$
en remplaçant
$$R^2S^2 \text{ par } (p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2;$$
or $$2R'^2 \sin A \sin B \sin C = S.$$

D'où la deuxième relation devient une identité.

NOTA. — MM. Deslais, du Mans, et Hugot, pensionnat Saint-Joseph à Thonon, ont résolu la même question.

QUESTION 202.

Solution par M. HABEL, élève de mathématiques préparatoires, École Albert-le-Grand (Arcueil).

Résoudre le système d'équations

$$x + y + z = (a + b + c)(a + b - c)$$
$$xy + xz - yz = b[(a + c)(a - c)(2a - b) + 2ab^2]$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 + c^2)$$

(Combier.)

Si l'on pose

$$(A) \left\{ \begin{aligned} (a + b + c)(a + b - c) &= m, \\ b[(a + c)(a - c)(2a - b) + 2ab^2] &= p, \\ (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 + c^2) &= q, \end{aligned} \right.$$

on a à résoudre
$$x + y + z = m,$$
$$xy + xz - yz = p,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = q.$$

On obtient facilement

$$xy + xz + yz = \frac{m^2 - q}{2};$$

d'où
$$yz = \frac{m^2 - q - 2p}{4}. \qquad (1)$$

Les relations (A) donnent

$$m^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4ab(a^2 + b^2 - c^2) + 4a^2b^2$$
$$q = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 + c^2)$$
$$-2p = -4ab^3 - 2b(2a - b)(a^2 - c^2);$$

dès lors
$$m^2 - q - 2p = 4b^2(a^2 - c^2);$$

portant dans (1) cette valeur, il vient

$$yz = b^2(a^2 - c^2). \qquad (2)$$

D'autre part la seconde des équations données peut s'écrire

$$x(y + z) - yz = p,$$

et la première donne

$$y + z = m - x;$$

dès lors
$$x(m - x) = p + yz = \frac{m^2 - q + 2p}{4},$$

ou $$x^2 - mx = \frac{q - m^2 - 2p}{4}$$

et $$x = \frac{m \pm \sqrt{q - 2p.}}{2}.$$

Or $q = (a^2 - c^2)^2 + b^4 + 4a^2b^2$

$- 2p = - 4ab^3 - 2b(2a - b)(a^2 - c^2)$

et $q - 2p = (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)^2$

par suite

$$x = \frac{(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) \pm (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)}{2}$$

d'où $$x' = a^2 + b^2 - c^2$$
$$x'' = 2ab$$

Par suite $y + z = 2ab$
ou $y + z = a^2 + b^2 - c^2$ (B)

suivant que l'on donnera à x les valeurs x' ou x'' dans l'équation $y + z = m - x$.

Combinant successivement les équations (B) avec l'équation (2)

on tire $$\left.\begin{aligned} y &= b(a + c) \\ z &= b(a - c) \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

ou $$\left.\begin{aligned} y &= b^2 \\ z &= a^2 - c^2 \end{aligned}\right\} \text{(C')}$$

On a donc pour x, y, z les deux systèmes de valeurs

$$x = a^2 + b^2 - c^2$$
$$y = b(a + c)$$
$$z = b(a - c)$$

et $$x = 2ab$$
$$y = b^2$$
$$z = a^2 - c^2$$

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS A SAINT-CYR

(*Suite*, voir p. 312 et suiv.)

Équations à résoudre.

$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2 \cos 2x.$

$2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\alpha - x) = \operatorname{tg}(\beta + x).$

$\sin 2x = \cos 3x.$

$\operatorname{Sin}^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{6}.$

$3 + \cos 4x = 4 \cos 2x + 2 \cos^3 x \sin x.$

$\operatorname{séc} x \operatorname{séc} \alpha + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{séc} \beta.$

$\sin x \cos x = \frac{2}{5}.$

$8 \sin x = 3 \cos^2 x.$

$6 \operatorname{tg} x + 12 \operatorname{cotg} x = 5 \sqrt{3} \operatorname{séc} x.$

$25 \sin x (\sin x - \cos x) = 4.$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{coséc} 2x.$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{coséc} x - \sin x.$

$4 \sin x \cos 3x = 1.$

$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cotg} 2x = \sin x(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} x).$

$\sin x + \operatorname{coséc} x = 1{,}5.$

$\cos x + \operatorname{séc} x = 2$

$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3.$

$\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{séc}^2 \frac{x}{2} = 2 \sqrt{3} \operatorname{cosec}^2 x.$

$\operatorname{tg} 2x \operatorname{cotg} x = 2.$

$\operatorname{cotg} (\pi - 3x) = \operatorname{tg} (x - \pi).$

$\sin 3x = n \sin x.$

$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$

$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2.$

$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 5.$

$\sin (2x + a) - \sin (2x - a) = \sin (x - a) - \sin (x + a).$

$\sin 2x + \sin 3x = \sin x.$

$\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x.$

$a \sin x + b \operatorname{tg} x = c \sin 2x.$

$\sin 2x = \sin^4 x + \cos^4 x.$

$\sin 2x = 6 \sin^2 x - 8 \cos^2 x.$

$16 \operatorname{tg} x = 15 \cos x.$

$\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} 2x - 4.$

$3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x.$

Résoudre les équations simultanées

$x + \sqrt{x+y} = 12 - y; \quad x^2 = 41 - y^2.$

$x^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = y^{\frac{8}{3}}; \quad y^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = x^{\frac{2}{3}}.$

$2^x\ 3^y = 560; \quad 5x = 7y.$

$x^y = y^x; \quad x^3 = y^2.$

$x^y + y^x = a; \quad \log x + \log y = b.$

$xy + x + y + 1 = 0; \quad x^2 + y^2 = x \quad y \quad 22.$

$x - y = 10\,(\sqrt{x} - \sqrt{y}); \quad \sqrt{xy} = 16.$

$x^2 - y^2 + (x - y) = 26; \quad (x^2 - y^2)(x - y) = 48.$

$x^2 + y^2 + 3xy = 79; \quad 2xy + x + y = 38.$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y - x}; \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$

$x^2y + x = 21; \quad x^4y^2 + x^2 = 333.$

$x - \frac{1}{y} = a; \quad y - \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$

$(x + y)(yx + 1) = axy; \quad (x^2 + y^2)(x^2y^2 + 1) = bx^2y^2.$

$\frac{xyz}{x + y} = a; \quad \frac{xyz}{x + z} = b; \quad \frac{xyz}{y + z} = c.$

— Résoudre $(x + y)(x^2 + y^2) = 15.$
$(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = 85.$

— Résoudre le système $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{c}.$
$\frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 1 + \frac{y}{c}.$

— Résoudre le système $x + y = 4$
$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280.$

— Résoudre le système $x + y = a.$
$x^3 + mxy^2 + mx^2y + y^3 = b^3.$

— Vérifier que, quel que soit n, l'expression

$$nx^{n+1} - (n + 1)\,x^n + 1$$

est divisible par $(x - 1)^2$.

— Résoudre le système

$$x^2 + xy + y^2 = a^2; \quad xy = b^2.$$

— Résoudre le système

$$x + y = 13; \quad z + u = 11;$$
$$xy = zu; \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 170.$$

— Résoudre le système

$$x + y = u + v; \quad xy = uv;$$
$$\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{m}{n}; \quad x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = a^2.$$

— Résoudre le système $x^2 + y^2 = 52$
$xy = 12\,(x - y).$

— Des équations

$$x = by + cz + du$$
$$y = ax + cz + du$$
$$z = ax + by + du$$
$$u = ax + by + cz$$

déduire la relation

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} = 1.$$

— Résoudre les systèmes d'équations simultanées suivantes :

$$\sin x = m \sin y; \quad \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} y.$$
$$\sin x + \sin y = a; \quad \cos x + \cos y = b.$$
$$\sin x = a \sin y; \quad 2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{y}{2}.$$
$$\frac{\text{séc}\, x - \text{séc}\, y}{\text{séc}\, x + \text{séc}\, y} = \frac{\text{cosséc}\, x - \text{cosséc}\, y}{\text{cosec}\, x + \text{cosséc}\, y}; \ \sin x = \operatorname{tg} y.$$
$$\sin (x - y) = \cos (x + y) = 0{,}5.$$
$$x \sin (\delta - y) = p; \ x \cos (\delta - y) = 9.$$
$$\sin x = 2 \operatorname{cotg} y; \quad \operatorname{tg} x = \sin y.$$
$$\sin^2 x + \cos^2 y = a; \quad \cos^2 x - \sin^2 y = b.$$
$$a \sin x = b \cos y; \quad \sin^2 x + \sin^2 y = c.$$
$$9 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4; \quad 2 \operatorname{cotg} x + 4 \operatorname{cotg} y = 1$$
$$\sin x \cos y = a; \quad \cos x \sin y = b.$$
$$\cos x \sin y + \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} y = 0; \quad \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1 = 0.$$
$$\sin x = \cos y; \quad \sin y = \operatorname{tg} z; \quad \sin z = \operatorname{cotg} x.$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a; \quad \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = b; \quad \operatorname{cotg} z - \operatorname{cotg} x = c.$$

Etant données les équations :

$$u = 3v; \quad \operatorname{tg} u = x + 1; \quad \operatorname{tg} v = x - 1;$$
$$x - y = 2a; \quad \sin^2 x - \sin^2 y = b;$$
$$x \sin (\alpha - y) = a; \quad x \sin (\beta - y) = b;$$
$$x + y + z = p; \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = m; \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = n.$$

calculer x.

— Trouver la condition pour que les équations

$$a \sin x + b \cos x = c$$
$$a' \sin x + b' \cos x = c'$$

oient satisfaites pour une même valeur de a.

— Trouver les valeurs de x et y, comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$ qui satisfont aux équations $\sin x = \cos 2y$; $\sin 2x = \cos y$.

— Eliminer x entre les équations

$$\text{cosséc}\, x - \sin x = a; \quad \text{séc}\, x - \cos x = b.$$

— Eliminer x et y entre les équations

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = m; \quad b \sin^2 y + a \cos^2 y = n; \quad a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y.$$

— On a $\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin^2 x + 4 \sin^3 x = 0$;
on demande de calculer x.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

Par M. E.-J. Boquel.

(*Fin*, voir p. 318.)

Théorème. — *Lorsque l'invariant d'une forme quadratique est nul, sa forme adjointe est un carré parfait.*

Nous avons vu, en effet, que si l'on désigne par α_{ik} le coefficient du terme a_{ik} dans l'invariant développé de la forme f, la forme adjointe a pour expression, au signe près :

$$F = \Sigma \alpha_{ik} X_i X_k$$

ou, ce qui revient au même

$$F = \frac{d\Delta}{da_{11}} X_1^2 + \ldots + \frac{d\Delta}{da_{ik}} X_i X_k + \ldots$$

Δ étant l'invariant de la forme f (*).

Multiplions F par α_{11} ; nous aurons :

$$\alpha_{11} F = \alpha_{11}^2 X_1^2 + 2\alpha_{12} X_1 X_2 + \ldots + 2\alpha_{1n} X_1 X_n + \alpha_{11}\alpha_{22} X_2^2 + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots + 2\alpha_{11}\, \alpha_{n-1,n} X_{n-1} X_n + \alpha_{11}\, \alpha_{nn}\, X_n^2$$

Considérons le carré parfait

$$(\alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \ldots + \alpha_{1n}X_n)^2$$

je dis que, si $\Delta = o$, ce carré est précisément égal à $\alpha_{11}F$.

En effet, le coefficient du terme en $X_i X_k$ dans le produit $\alpha_{11}F$ est $2\alpha_{11}\, \alpha_{ik}$; le coefficient du même terme dans le carré est $2\alpha_{1i}\, \alpha_{1k}$; il suffit donc de prouver que l'on a la relation $\alpha_{11}\, \alpha_{iK} - \alpha_{1i}\, \alpha_{1k} = o.$

Or, d'après la règle du produit de deux déterminants, on reconnaît, en multipliant ligne par ligne, que cette différence est un déterminant contenant le déterminant Δ en facteur; Δ étant nul par hypothèse, le théorème est donc établi.

(*) Les personnes qui ne seraient pas familiarisées avec les notations différentielles, que nous emploierons désormais, si elles sont adoptées cette année pour la préparation à l'Ecole polytechnique, peuvent écrire :

$$F = \Delta' a_{11}\, X_1^2 + \ldots + \Delta' a_{ik} X_i X_k + \ldots$$

— Si l'on applique ce théorème à la forme ternaire $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$, dont la forme adjointe est

$$F = X^2(A'A'' - B^2) + Y^2(A''A - B'^2) + Z^2(AA' - B''^2)$$
$$+ 2YZ(B'B'' - AB) + 2ZX(B''B - A'B') + 2XY(BB' - A''B'')$$

on est conduit à conclure que si l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0,$$

la forme F est un carré parfait.

Cette remarque est susceptible de nombreuses applications, dont nous aurons l'occasion de citer plusieurs dans la seconde partie de ce travail.

— Il n'est pas sans intérêt de faire connaître ici une interprétation géométrique que le P. Joubert a donnée de la forme adjointe dans le cas des formes ternaires.

Soit une surface à centre représentée par l'équation (1) $f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = H$. Considérons le plan tangent en un point quelconque de cette surface, et menons du centre une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons un point M tel qu'en appelant O le centre de la surface et I le pied de la perpendiculaire sur le plan tangent, on ait $OI \cdot OM = K^2$. Je dis que *la forme adjointe de* f(x, y, z) *est le premier membre de l'équation des points* M.

Le plan tangent au point (x, y, z) de la surface (1) a pour équation

$$X(Ax + B''y + B'z) + Y(B''x + A'y + Bz)$$
$$+ Z(B'x + By + A''z) = H.$$

Les équations de la perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan sont

$$\frac{X}{Ax + B''y + B'z} = \frac{Y}{B''x + A'y + Bz} = \frac{Z}{B'x + By + A''z}$$
$$= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{(Ax+B''y+B'z)^2+(B''x+A'y+Bz)^2+(B'x+By+A''z)^2}}.$$

On a : $OM^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

D'autre part

$$OI = \frac{H}{\sqrt{(Ax + B''y + B'z)^2 + (B''x + A'y + Bz)^2 + (B'x + By + A''z)^2}}$$

et le rapport commun précédent devient alors :

$$\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.\,OI}{H} \quad \text{ou} \quad \frac{K^2}{H}$$

Pour obtenir l'équation du lieu, il faut éliminer x, y, z entre les équations de la perpendiculaire et l'équation (1). Or les premières peuvent s'écrire

$$(2) \quad \left|\begin{array}{l} X = (Ax + B''y + B'z)\,\lambda \\ Y = (B''x + A'y + Bz)\,\lambda \\ Z = (B'x + By + A''z)\,\lambda \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{sous la condition} \\ \lambda = \dfrac{K^2}{H} \end{array}$$

L'équation (1), en vertu des précédentes, prend d'ailleurs la forme

$$\frac{Xx}{\lambda} + \frac{Yy}{\lambda} + \frac{Zz}{\lambda} = H = \frac{K^2}{\lambda}$$

c'est-à-dire

$$Xx + Yy + Zz = K^2 \qquad (3)$$

et l'élimination de x, y, z entre les équations (2) et (3) est précisément le calcul qui sert à former la forme adjointe.

—Nous avons dit, dans un de nos précédents articles, qu'une forme quadratique n'a d'autre invariant que son discriminant, et c'est pour ce motif que nous avons employé indifféremment dans le langage les mots d'invariant et de discriminant. Mais il faut justifier ce fait, qui est bien loin d'être évident *à priori*.

Lorsqu'on considère une forme quelconque, quel qu'en soit le degré, on voit que cette forme contient un certain nombre de coefficients, a, b, c,....

Si l'on y fait une substitution linéaire, les coefficients a, b, c . . . . seront remplacés par d'autres a', b', c', . . . et nous appellerons avec Cayley *invariant* de la forme considérée *une fonction entière et homogène* $\varphi(a, b, c,\ldots)$ *de ses coefficients, telle que l'on ait identiquement*

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = R^\lambda \varphi(a, b, c, \ldots)$$

R *désignant le déterminant de la substitution linéaire.*

Telle est la définition générale d'un invariant ; on voit que l'invariant que nous avons donné pour les formes quadratiques, satisfait bien à la définition, puisque nous avons prouvé dès le début que l'on a : $\Delta' = \Delta R^2$.

Nous allons montrer maintenant que les formes quadratiques n'ont pas d'autre invariant que Δ ou ses puissances.

Prenons d'abord, comme exemple, le cas d'une forme binaire $ax^2 + 2bxy + cy^2$, dont l'invariant est $ac - b^2$. Admettons pour un instant qu'il y ait un autre invariant $\varphi(a, b, c)$; on devrait avoir

$$\varphi(a', b', c') = R^{\lambda} \varphi(a, b, c),$$

en vertu de la définition générale.

La substitution linéaire $x = \alpha x' + \beta y'$
$y = \gamma x' + \delta y'$

a pour déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$. Or a', b', c', sont des fonctions du second degré de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; si donc n est le degré de φ, la fonction $\varphi(a' b'c')$ sera du degré $2n$ par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

R est du second degré en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; R^λ est donc du degré 2λ, et $\varphi(a', b', c')$ étant du degré $2n$, on doit avoir $2n = 2\lambda$, c'est-à-dire $n = \lambda$, ce qui donne $\varphi(a', b', c') = R^n\varphi(a, b, c)$.

Mais $a'c' - b'^2 = (ac - b^2) R^2$.

Admettons que n soit pair, $n = 2m$. On aurait

$$\varphi(a', b', c') = R^{2m} \varphi(a, b, c)$$

et aussi $$(a'c' - b'^2)^m = R^{2m}(ac - b^2)^m$$

c'est-à-dire $$\frac{\varphi(a' b' c')}{(a'c' - b'^2)^m} = \frac{\varphi(a, b, c)}{(ac - b^2)^m}.$$

Or deux formes quadratiques sont toujours telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire (*); on peut donc supposer a, b, c fixes et a', b', c' quelconques. Il faut alors que le quotient $\frac{\varphi(a'b'c')}{(a'c' - b'^2)^m}$ soit une constante, et l'on a :

$$\varphi(a'b'c') = K(a'c' - b'^2)^m \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si n est impair, on forme le carré de la première égalité, et il vient : $$\varphi^2(a'b'c') = R^{2n} \varphi^2(a,b,c)$$

et $$(a'c' - b'^2)^{2n} = R^{2n} (ac - b^2)^{2n}$$

Le raisonnement se fait alors comme dans le cas de n pair, et l'on a $$\frac{\varphi^2(a'b'c')}{(a'c' - b'^2)^{2n}} = K, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

(*) Deux polynômes homogènes du même degré renfermant le même nombre de variables, sont dits *algébriquement équivalents* quand ils jouissent de cette propriété.

Ce mode de raisonnement est général. Soit, en effet, la forme ternaire

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

L'invariant $AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$, multiplié par R^2 est égal au nouvel invariant $A_1A'_1A''_1 + \ldots$

Supposons qu'il y ait une autre fonction entière et homogène $\varphi(A, A', \ldots)$ telle que l'on ait

$$R^\lambda \varphi(A, A', \ldots) = \varphi(A_1, A'_1 \ldots)$$

Soit n le degré de φ; $A_1, A'_1 \ldots$ sont toujours des fonctions du deuxième degré des coefficients de la substitution linéaire, et le premier membre de l'égalité étant du degré 3λ, puisque R est un déterminant du troisième ordre, il en résulte qu'on doit avoir $2n = 3\lambda$.

Cette relation exige que n soit multiple de 3,

$$n = 3\mu; \quad \text{alors } \lambda = 2\mu.$$

Par suite $\quad R^{2\mu}\varphi(A, A', \ldots) = \varphi(A_1, A'_1 \ldots)$.

D'autre part on a : $\quad \Delta R^2 = \Delta_1$.

Donc $\quad \Delta^\mu R^{2\mu} = \Delta_1^\mu$.

Il en résulte par division :

$$\frac{\varphi(A, A', \ldots)}{\Delta^\mu} = \frac{\varphi(A_1, A'_1 \ldots)}{\Delta_1^\mu}.$$

Or, les deux formes étant algébriquement équivalentes, on peut supposer que A, A', ... sont fixes, et A_1, A'_1 ... quelconques. Il faut donc que le quotient précédent soit constant.

Donc Δ et ses puissances sont les seules quantités jouissant de la propriété invariantive. C'est ce que nous voulions établir.

— Je bornerai là pour le moment ces considérations sommaires sur les formes quadratiques ; les principes fondamentaux sont posés ; mais il reste encore beaucoup à dire, et d'ailleurs je n'ai donné jusqu'ici que les applications strictement indispensables à l'intelligence des théorèmes. A la rentrée prochaine et pendant l'année scolaire qui va s'ouvrir, je publierai une seconde partie de ce travail ; elle comprendra surtout des applications des théorèmes démontrés dans la première partie ; mais j'y ajouterai cependant quelques

propriétés nouvelles que je regarde comme vraiment fécondes. Les articles que je me propose de donner à nos lecteurs deviendront d'autant plus intéressants que la théorie des formes quadratiques binaires, ternaires et quaternaires entre dès cette année dans le programme d'admission à l'École polytechnique, et j'en proposerai des applications aussi nombreuses que possible dans les questions à résoudre.

A mon grand regret, les développements que j'ai donnés cette année ont été parfois trop succincts, ce qui a dû nuire à leur clarté. Mais le mal sera vraisemblablement réparé cette année par les professeurs de spéciales, qui, ayant à exposer dans leurs cours la théorie élémentaire des formes, insisteront nécessairement sur les points que je n'ai pu qu'effleurer.

E.-J. B.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

Solution du problème des mathématiques spéciales par M. Kœnigs, élève de l'École normale supérieure.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point P *dans le plan de l'ellipse de gorge, par ce point on mène une parallèle* PH *à une génératrice* G *quelconque de la surface; la courbe d'intersection de l'hyperboloïde avec un cylindre de révolution autour de* PH *et passant par* G, *se projette sur le plan de l'ellipse de gorge suivant une courbe du troisième degré ayant un point double: on demande le lieu de ce point double lorsque la droite* G *décrit la surface.*

L'hyperboloïde et le cylindre ayant la génératrice G commune se coupent suivant une courbe gauche du troisième degré. Cette courbe se projettera sur le plan de l'ellipse de gorge suivant une courbe du troisième ordre. Or si on remarque que la droite G se projette suivant une tangente T à l'ellipse de gorge, et la droite PH suivant une parallèle à T, on verra que les cordes parallèles à l'axe oz de l'hyperboloïde ont pour plans diamétraux conjugués :

1° Dans l'hyperboloïde le plan de l'ellipse de gorge;

2° Dans le cylindre le plan mené par PH et par la perpendiculaire PQ à la droite T.

Le plan mené par cette droite PQ et par la parallèle PK à *oz* coupera l'hyperboloïde suivant une hyperbole U dont un axe coïncidera avec PQ, le second étant parallèle à PK; et le cylindre suivant une ellipse E dont PQ et PK sont les deux axes.

Ces deux coniques se couperont en quatre points, l'un d'eux M sera l'intersection de la droite G et du plan QPK : les trois autres N, N′ et N″ seront les traces de la courbe de gauche sur le même plan; mais il résulte de la position des axes de ces coniques que les cordes communes MN et N′N″ sont parallèles à PK ou à *oz*. La corde MN percera le plan de l'ellipse de gorge au pied Q de la perpendiculaire PQ abaissée sur P, car cette corde projette sur ce plan le point M qui appartient à G.

Enfin le point R où la droite N′N″ perce le plan de l'ellipse de gorge est la projection sur ce plan de deux points de la courbe gauche : ce sera le point double de la projection de cette courbe.

Nous allons traduire analytiquement ce que nous venons de dire, pour en tirer le lieu du point R.

Soit
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad (1)$$
l'équation de l'hyperboloïde.

Soit
$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0 \qquad (2)$$
l'équation de la droite T, on a
$$p=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi} \qquad (3)$$

Soit
$$\frac{x-\alpha}{\cos\varphi}=\frac{y-\beta}{\sin\varphi}=\rho \qquad (4)$$
l'équation de la droite PQ (α, β étant les coordonnées du point P), ρ désigne la distance au point P du point de la droite PQ dont (x, y) sont les coordonnées.

Enfin, appelons R le rayon du cylindre et θ l'angle de la génératrice G avec *oz*.

Les axes de l'ellipse E dirigés, comme nous l'avons vu,

suivant PQ et PK ont pour longueur 2R et $\frac{2R}{\sin\theta}$, l'équation de l'ellipse E dans le plan QPK est donc

$$\frac{\rho^2}{R^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{R}{\sin\theta}\right)^2} = 1$$

ou

$$z^2 = \frac{R_2 - \rho^2}{\sin^2\theta}.$$

Nous aurons l'équation de l'hyperbole U dans le même plan, et rapportée aux mêmes axes en remplaçant dans l'équation (1) les variables x et y par leurs valeurs tirées des équations (4), soit

$$\frac{(\alpha + \rho\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(\beta + \rho\sin\theta)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

En éliminant z^2 entre cette équation et la précédente, on trouve

$$\frac{(\alpha + \rho\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(\beta + \rho\sin\theta)^2}{b^2} - \frac{R^2 - \rho^2}{c^2\sin\theta} - 1 = 0.$$

Cette équation, du second degré en ρ, définit les points Q et R sur la droite PQ.

Désignons par ρ_1 la longueur PQ, nous avons

$$\frac{(\alpha + \rho_1\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(\beta + \rho_1\sin\theta)^2}{b^2} - \frac{R^2 - \rho_1^2}{c^2\sin^2\theta} - 1 = 0.$$

Retranchons cette équation de la précédente, où ρ désigne la longueur PR : on trouve après division par $\rho - \rho_1$ qui n'est pas nul :

$$(\rho + \rho_1)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} + \frac{1}{c^2\sin^2\theta}\right) + \frac{2\alpha\cos\theta}{a^2} + \frac{2\beta\sin\theta}{b^2} = 0. \qquad (5)$$

L'angle θ est celui que forme avec la droite oz la parallèle à G menée par l'origine, laquelle a pour équations :

$$\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{y}{\cos\varphi} = \frac{z}{c\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b}}}$$

On en tire :

$$\cos^2\theta = \frac{c^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right)}{1+c^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right)}$$

et on en déduit sans peine par substitution que le coefficient de $(\rho+\rho_1)$ se réduit à

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

D'autre part ρ_1 est connu et égale $p-\alpha\cos\varphi-\beta\sin\varphi$; car c'est la distance du point P à la droite T ; l'équation (5) devient donc :

$$\rho+p-\alpha\cos\varphi-\beta\sin\varphi+\frac{2\,b^2c^2\alpha\cos\varphi}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+\frac{2\,a^2c^2\beta\sin\varphi}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=0$$

ou :

$$\rho+p-\frac{a^2(b^2+c^2)-b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)+b^2c^2}\alpha\cos\varphi-\frac{b^2(a^2+c^2)-a^2c^2}{b^2(a^2+c^2)+a^2c^2}\beta\sin\varphi=0.$$

Appelons un instant α' et β' les coefficients de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ dans cette équation : on a, en tirant p de l'équation (3) :

$$\rho-\alpha'\cos\varphi-\beta'\sin\varphi=-\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi};$$

multiplions par ρ et tenons compte des relations (4) il vient :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\alpha'(x-\alpha)-\beta'(y-\beta)=-\sqrt{a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2}$$

On peut mettre l'équation de ce lieu sous une forme plus commode :

Posons $\alpha_1=\alpha+\alpha'=\dfrac{2ba^2(b^2+c^2)\alpha}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$$\beta_1=\beta+\beta'=\frac{2b^2(a^2+c^2)\beta}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Et considérons les coniques

$$\frac{(x-\alpha_1)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta_1)p}{b^2}-1=0,$$

qui est l'ellipse de gorge transportée parallèlement à elle-même.

Cherchons la *podaire* du point P dans cette conique, c'est-à-dire le lieu de projection du point P sur les tangentes à cette conique.

$$(x-\alpha_1)\cos\varphi+(y-\beta_1)\sin\varphi-\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=0$$

est une tangente quelconque à la conique

$$\frac{x-\alpha}{\cos\varphi}=\frac{y-\rho}{\sin\varphi}=\rho$$

la perpendiculaire issue du point P.

On en tire en remplaçant $\rho\cos\varphi$ et $\rho\sin\varphi$ par $(x-\alpha)$ et $(y-\beta)$ dans l'équation de la tangente :

$$\frac{-(x-\alpha_1)(x-\alpha)+(y-\beta_1)(y-\beta)}{\sqrt{a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2}}=0$$

ou encore :

$$(x-\alpha)^2-(\alpha_1-\alpha)(x-\alpha)-(\beta_1-\beta)(y-\beta)$$
$$-\sqrt{a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2}=0$$

c'est-à-dire $(x-\alpha)^2-\alpha'(x-\alpha)-\beta'(y-\beta)$

$$-\sqrt{a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2}=0.$$

C'est précisément l'équation touvée pour le lieu.

Donc :

Le lieu du point R est la podaire du point P relativement à une ellipse qui n'est autre que l'ellipse de gorge transportée parallèlement à elle-même, de sorte que son centre vienne en un point (α_1, β_1).

On voit aussi que le point Q décrit la podaire du point P par rapport à l'ellipse de gorge elle-même.

La discussion des podaires des coniques est des plus faciles, et il est inutile de la donner ici.

QUESTION 219.

Solution par M. V.-M. Arnaud, élève au Lycée de Nice.

Démontrer la règle de Leibnitz pour trouver la dérivée n^{me} *d'un produit* uv *de deux fonctions de* x

$$y_{(n)}=vu_{(n)}+C_1^n v'u_{(n-1)}+C_2^n v''u_{(n-2)}+\dots$$

en démontrant que, si cette règle est vraie pour la dérivée d'ordre n — 1), *elle est encore vraie pour la dérivée d'ordre* n.

Appliquer ce théorème à la recherche de la dérivée n^{me} *de la onction* $y=e^{ax}\cos(mx+p)$.

La règle de Leibnitz est facile à vérifier pour les dérivées des premiers ordres, car on a

$$y' = vu' + uv'$$
$$y'' = vu'' + 2u'v' + uv''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Supposons donc la loi vraie pour la dérivée d'ordre $(n-1)$

$$y_{(n-1)} = vu_{(n-1)} + C_1^{n-1} v' u_{(n-2)} + C_2^{n-1} v'' u_{(n-3)} + \ldots$$

je dis qu'elle est vraie pour la dérivée d'ordre n.

En effet, prenons la dérivée de $y_{(n-1)}$, en écrivant sur une première ligne horizontale les termes de la forme vu' et sur une deuxième les termes de la forme uv' ; nous aurons

$$y_{(n)} = vu_{(n)} + \left.\begin{matrix} C_1^{n-1} \\ 1 \end{matrix}\right| v'u^{u-1} + \left.\begin{matrix} C_2^{n-1} \\ C_1^{n-1} \end{matrix}\right| v''u_{(n-2)} + \left.\begin{matrix} C_3^{n-1} \\ C_2^{n-1} \end{matrix}\right| \begin{matrix} v'''u_{n-3} \\ + \ldots \end{matrix}$$

Or d'après les propriétés des coefficients du binôme

$$C_1^{n-1} + 1 = C_1^n, \quad C_2^{n-1} + C_1^{n-1} = C_2^n.$$
$$C_3^{n-1} + C_2^{n-1} = C_3^n \ldots$$

Donc $y_{(n)} = vu^{(n)} + C_1^n v' u_{(n-1)} + C_2^n v'' u_{(n-2)} + \ldots$

et la règle est démontrée.

Appliquons cette règle à la fonction

$$y = e^{ax} \cos(mx + p),$$

en observant que $(e^{ax})_{(n)} = a^n e^{ax}$ et que les dérivées de cos $(mx + p)$ sont périodiquement $- m \sin(mx + p)$, $- m^2 \cos(mx + p)$, $m^3 \sin(mx + p)$, $m^4 \cos(mx + p)$; nous aurons

$$y_{(n)} = \cos(mx + p)\, a^n e^{ax} - mC_1^n \sin(mx + p)\, a^{n-1} e^{ax}$$
$$- m^2 C_2^n \cos(mx + p)\, a^{n-2} e^{ax}$$
$$+ m^3 C_3^n \sin(mx + p)\, a^{n-3} e^{ax} + m^4 C_4^n$$
$$\cos(mx + p)\, a^{n-4} e^{ax} \ldots$$

ou bien

$$y^{(3)} = e^{ax} \cos(mx + p)[a^n - m^2 C_2^n a^{n-2} + m^4 C_4^n a^{n-4} \ldots]$$
$$- e^{ax} \sin(mx + p)[mC_1^n a^{n-1} - m^3 C_3^n a^{n-3}$$
$$+ m^5 C_5^u a^{n-5} - \ldots].$$

NOTA. — La même question a été résolue par M. Louis Godard, élève du Lycée de Saint-Etienne (classe des mineurs).

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(*Suite*, voir p. 333 et suiv.)

Algèbre.

— Appliquer le théorème de Rolle à l'équation $x^3 - 2x - 1 + \frac{3}{x} = 0$.

— Prendre la dérivée de la fonction $y = \text{arc sin} \frac{2x}{1+x^2}$ et expliquer le résultat obtenu.

— Même question pour la fonction y arc cos $\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

— Même question pour la fonction $y = \text{arc tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

— Prendre la dérivée de la fonction implicite

$$x^2 + y^2 = a^2 e^{2\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x}}$$

— La fonction $e^x + e^{-x} + 2 \cos x$ est-elle susceptible de maximum ou de minimum ?

— Étant donnée l'équation $x^4 - x^2 + 2x - a = 0$, déterminer a de manière que le produit de deux des racines soit égal à la somme de ces mêmes racines et résoudre l'équation dans ce cas.

— $f(x)$ étant du degré $m - 2$ au plus, et $\varphi(x)$ du degré m, si $a, b, c, \ldots l$ sont les racines supposées distinctes de $\varphi(x) = 0$, établir l'identité

$$\frac{f(a)}{\varphi'(a)} + \frac{f(b)}{\varphi'(b)} + \ldots + \frac{f(l)}{\varphi'(l)} = 0.$$

Démontrer qu'il y a une seconde identité quand $f(x)$ est du degré $m - 3$, et la trouver.

— Décomposer en facteurs réels du deuxième degré en x le polynôme $x^4 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$.

— Calculer la sixième dérivée de la fonction.

$$y = \frac{x^{10}}{(1 - x)^2(1 + x)^3}.$$

— Ayant une relation entière entre $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, on peut toujours la mettre sous la forme $f(\sin\varphi, \cos\varphi) = f(\sin\varphi) + \cos\varphi\, f_1(\sin\varphi)$; établir qu'on ne peut le faire que d'une seule manière.

Mathématiques élémentaires.

— Lieu des points dont les distances à deux droites fixes sont dans un rapport constant.

— Trouver des nombres entiers a, b, c, tels que l'on ait $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$.

— De combien de manières peut-on décomposer un nombre A en facteurs premiers entre eux deux à deux ?

— Trouver la limite vers laquelle tend $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ quand x tend vers zéro.

— Combien de fois le nombre 7 est-il facteur dans le produit $1 . 2 . 3 . 4 \ldots . 99 . 100$?

— Construire un triangle, connaissant deux côtés et une médiane.

— Résoudre l'équation $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = b$.

— Trouver le maximum de $x^{\frac{m}{m'}} y^{\frac{n}{n'}} z^{\frac{p}{p'}}$ quand $x + y + z$ est une constante.

— Trouver les nombres dont le carré divisé par le produit pq donne pour reste 1, p et q étant deux nombres premiers.

— On inscrit un triangle dans une circonférence; on mène deux hauteurs qui se coupent en H; on prolonge l'une des hauteurs jusqu'à la rencontre de la circonférence en M. Cette hauteur coupe la base correspondante du triangle en P; faire voir que PH = PM.

— Etant donnés deux cercles sur la sphère, trouver sur la même sphère les cercles qui coupent orthogonalement les deux cercles donnés.

— Etant donnés un cercle O et un point P dans son plan, trouver sur la droite OP un point Q tel que $OP \times OQ = R^2$; démontrer que toutes les circonférences passant par les points P et Q coupent le cercle O orthogonalement.

— a et b étant deux nombres entiers, on demande comment il faut choisir ces nombres pour que $a^2 + b^2$ soit de la forme $4m - 1$.

— Résoudre par des procédés élémentaires l'équation $x^5 - 1 = 0$ en présentant les racines dans les formules finales sous la forme $a + b\sqrt{-1}$.

— On donne un triangle ABC, et sur le prolongement de BC un point D. On demande de mener par ce point une transversale telle que l'aire du triangle AEF soit égale à une surface donnée. On trouve deux solutions; devait-on s'y attendre? — Quelle est l'enveloppe des droites telles que EFD?

— a, b, c, d, f pouvant prendre des valeurs absolument quelconques, quelles sont dans tous les cas les conditions pour que le polynôme $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f$ soit un carré parfait?

— Etant donné un tétraèdre, on mène le plan bissecteur d'un dièdre. Démontrer que ce plan divise l'arête opposée en segments proportionnels aux aires des faces du dièdre considéré.

— P et R étant deux nombres premiers, trouver les nombres qui sont premiers avec le produit PR et inférieurs à ce produit.

— Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

— Etant donné un nombre quelconque a premier avec un nombre p, trouver un nombre x tel que la division du produit ax par p donne pour reste l'unité.

— De combien de manières peut-on décomposer un nombre donné en facteurs de même parité?

— Chercher quelle est la plus haute puissance de p ($p < n$) qui divise le produit $1 . 2 . 3 \ldots n$.

— n' étant le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{n}{p}$ et n'' étant de même le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{n'}{p}$, faire voir que n'' est le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{n}{p^2}$.

— Mener par un point donné :

1° Une circonférence tangente à une droite et à un cercle donnés;

2° Une circonférence tangente à deux circonférences données.

ERRATA DU NUMÉRO DE JUIN.

Un certain nombre de fautes d'impression se sont glissées dans le numéro de juin. Nous nous empressons de les signaler parce qu'elles modifient la solution de deux questions.

Page 250, ligne 20 : *au lieu de* $\frac{1}{3}\pi^2 Bh = \frac{1}{3}\pi(R+x)^2(4-x)$

il faut $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(R+x)^2(h-x)$.

Page 252, ligne 7 : *au lieu de* $\sin 2x = \cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}$

il faut $\sin 2x = \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Lignes 11 et suivantes, *il faut lire*

Le carré du côté DE est $DE^2 = R^2\sin^2 x = \frac{R^2(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}} = \frac{R^2(5-\sqrt{5})}{10}$

de même $CD^2 = R^2(\cos x - \sin x)^2 = R^2(1 - \sin 2x) = \frac{R^2(5 - 2\sqrt{5})}{5}$

Enfin

$$\frac{DC^2}{CE^2} = \frac{10-4\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}+5)(10-4\sqrt{5})}{20} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}$$

et $\frac{DC}{CE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Page 280 : *au lieu de* $c^2\alpha\beta X - a^2\beta\gamma + b^2\alpha = 0$

il faut $c^2\alpha\beta - a^2\beta X + b^2\alpha Y = 0$.

Page 282, ligne 15 : *au lieu de* $-\gamma y$, *il faut* $-Yy$.

ligne 17 : *au lieu de* $-b^2\alpha\gamma$, *il faut* $-b^2\alpha Y$.

ligne 19, dans la parenthèse :

au lieu de $\frac{Xx}{a^2}$, *il faut* $\frac{\alpha X}{a^2}$.

ligne 21 : *au lieu de* $\frac{\alpha^2 a^2}{b^2}$, *il faut* $\frac{\alpha^2 b^2}{a^2}$.

Page 283, lignes 2 et 3 : *au lieu de* $-\left[\frac{c^2\beta^2}{b^4}\right.$ — etc., jusqu'à la fin,

il faut

$$+ d^2\left[\left(\frac{c^2\beta^2}{b^4} - \frac{\alpha^2 b^2}{a^4} - \frac{\beta^2 a^2}{b^4}\right)d^2 - \left(\frac{c^2\beta^2}{b^2} - \frac{\alpha^2 b^2}{a^2} - \frac{\beta^2 a^2}{b^2}\right)\right] = 0.$$

car les termes entre crochets s'annulent ainsi que les autres.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 15140-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE
DE LA PARABOLE
ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maitre répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite, et fin* voir p. 337 et suiv.)

LXX. **Théorème.** — MM′ (fig. 31) *est une corde normale en* M *à une parabole,* I *son milieu,* D *le point où elle rencontre l'axe; la parallèle à l'axe menée par le point* I *rencontre l'ordonnée du point* M *en un point* A *tel que la ligne* AD *est perpendiculaire à* MM.

De la valeur trouvée pour MM′ dans le théorème précédent, on déduit

$$\mathrm{MI} = \frac{p}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

Fig 31.

et à cause du triangle rectangle IAM

$$\mathrm{AM} = \mathrm{IM} \sin \alpha = \frac{p}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Or, on sait que $\mathrm{MD} = \dfrac{p}{\cos \alpha}$;

donc, en vertu des relations précédentes,

$$\mathrm{MD} = \mathrm{AM} \sin \alpha$$

c'est-à-dire que le triangle ADM est rectangle en D.

LXXI. **Théorème.** — α *et* α' *étant les angles que font avec les rayons vecteurs correspondants deux normales égales issues d'un point du plan d'une parabole, ces normales étant comptées de ce point à la courbe, on a*

$$tg\, \alpha \, tg\, \alpha' \, tg\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) = \frac{d}{p}$$

d *étant la distance de ce point à l'axe.*

Si l'on remarque que la longueur d'une normale comptée comme il est dit dans l'énoncé, a pour expression

$$\frac{p}{\cos\alpha} + \frac{d}{\sin\alpha},$$

un calcul analogue à celui qui a été fait pour l'ellipse conduit à la relation donnée.

LXXII. — *Valeur du rayon du cercle osculateur en un point d'une parabole. Sa construction.*

Il suffit de se reporter à la pareille détermination faite par l'ellipse pour voir que, si R désigne le rayon du cercle osculateur en un point d'une parabole, on a

$$R = \frac{p}{\cos^3\alpha}.$$

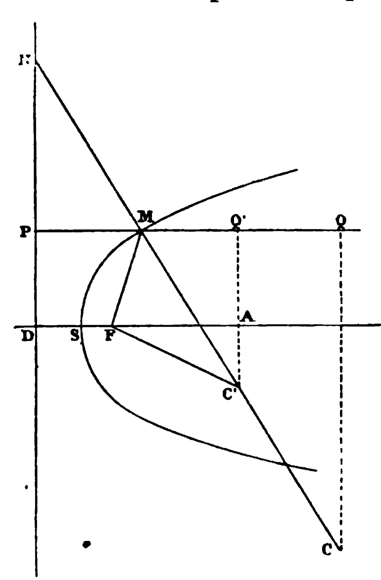


Fig. 52.

Pour le construire, on remarque que le rayon vecteur du point considéré a pour expression

$$FM = \frac{p}{2\cos^2\alpha},$$

de sorte que

$$R = \frac{2FM}{\cos\alpha}.$$

Cette expression montre que la perpendiculaire au rayon FM (*fig. 32*) menée par le foyer rencontre la normale en M en un point C' tel que

$$C'M = \frac{R}{2}.$$

Pour avoir la valeur de R en un point donné, la normale étant menée, on élèvera la perpendiculaire FC' à FM, on prendra CC' = C'M; CM sera le point cherché et C le centre du cercle osculateur en M.

LXXIII. **Théorème.** — *La portion d'une normale en un point d'une parabole, comprise entre la courbe et la directrice, est égale à la moitié du rayon du cercle osculateur en ce point.*

Soit (*fig. 32*) M un point d'une parabole, MN la portion de la normale en M comprise entre la courbe et la directrice; on sait comment a été construit le triangle MFC'. Les deux triangles NMP et MFC' sont égaux comme ayant un côté égal MP = MF et comme étant semblables, FMC' = PMN,

donc $$MN = MC' = \frac{R}{2}.$$

Cette propriété permet de construire plus simplement le rayon du cercle osculateur en un point d'une parabole, puisqu'il suffit, la normale étant menée, de porter, à partir du point considéré et dans le sens voulu, une longueur égale au double de la portion de la normale comprise entre la courbe et la directrice.

LXXIV. **Théorème.** — *En un point d'une parabole la corde du cercle osculateur qui est menée parallèlement à l'axe de la courbe est égal à quatre fois le rayon vecteur du point.*

Soit (*fig. 32*) M le point considéré, C le centre du cercle osculateur en ce point, PM parallèle à l'axe, Q' et Q les projections des points C et C' sur PM; C' étant le milieu de MC, Q' sera le milieu de MQ, et comme les triangles C'FM et C'MQ' sont égaux, on en conclut que MQ' = MF et partant MQ = 2MF; or MQ n'est que la demi-corde du cercle osculateur: la corde entière vaudra donc 4MF.

LXXV. **Théorème.** — *Le lieu du point symétrique du foyer par rapport aux normales à une parabole est une parabole.*

En remarquant que (*fig. 32*) un point Q' du lieu a même ordonnée que le point M et que son abscisse SA a pour expression

$$SA = PQ' - DS = 2MF - \frac{p}{2} = \frac{p}{\cos^2\alpha} - \frac{p}{2},$$

on en déduit

$$SA - \frac{p}{2} = \frac{p}{\cos^2\alpha} - p = p\,\mathrm{tg}^2\alpha;$$

donc $$\overline{QA}^2 = p\left(SA - \frac{p}{2}\right);$$

donc, en vertu du théorème V, le lieu cherché est une para-

bole de même axe que la première et dont la tangente au sommet passe au foyer de la première.

Corollaire. — *La projection du foyer sur les normales se trouve également sur une parabole.*

VII

PROPRIÉTÉS DES CORDES FOCALES

LXXVI. **Théorème.** — *Le produit des ordonnées des extrémités d'une corde focale est constant et égal à* — p^2.

Les tangentes aux extrémités d'une corde focale étant rectangulaires (LIII), il en est de même des normales, de sorte que si α est l'angle que fait l'une d'elles avec le rayon vecteur correspondant, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sera l'angle que fait l'autre avec son rayon vecteur. Si l'on désigne par y_1 et y_2 les ordonnées des extrémités de la corde, on a, en remarquant que ces ordonnées sont toujours de signes contraires,

$$y_1 = p \operatorname{tg} \alpha$$
$$y_2 = -p \operatorname{cotg} \alpha$$

et par suite $$y_1 y_2 = -p^2.$$

Corollaire. — *Le produit des abscisses des extrémités d'une corde focale est constant et égal à* $\frac{p^2}{4}$.

LXXVII. **Théorème.** — *Par le point où se coupent les normales aux extrémités d'une corde focale, on peut mener une troisième normale; l'ordonnée du pied de cette normale est double de celle du point de concours des deux premières; mais les signes sont différents.*

On a vu (LXIII) qu'en désignant par y_1, y_2, y_3 les ordonnées de trois normales menées à une parabole d'un point distant de l'axe d'une longueur d, on a

$$y_1 y_2 y_3 = 2p^2 d;$$

or, on a obtenu dans le théorème précédent

$$y_1 y_2 = p^2:$$

on en conclut $$y_3 = 2d,$$

ce qu'il fallait démontrer. On a ainsi un moyen assez simple de construire cette troisième normale, la courbe étant tracée

LXXVIII. **Théorème.** — *La normale à une extrémité d'une corde focale rencontre la courbe en un point d'où part une seconde normale; l'ordonnée du pied de cette dernière est double de l'ordonnée de l'autre extrémité de la corde.*

On a obtenu en effet (LXIII), en désignant par y_1 et y'_2 les ordonnées des pieds des deux normales qui se coupent sur la courbe. $y_1 y'_2 = 2p^2$.

Mais on vient d'obtenir (LXXVI) pour les extrémités d'une corde focale dont l'une coïncide avec l'un de ces points

$$y_1 y_2 = -p^2;$$

il en résulte que $y_2 = -\dfrac{y'_2}{2}$,

ce qu'il fallait démontrer. Les deux points considérés sont évidemment situés de part et d'autre de l'axe.

LXXIX. **Théorème.** — *La somme des inverses des segments déterminés par le foyer sur une corde focale est constante.*

En effet, les angles que font les normales aux extrémités d'une corde focale étant complémentaires, les rayons vecteurs qui forment cette corde ont pour expression (XXIII)

$$\frac{p}{2\cos^2\alpha} \text{ et } \frac{p}{2\sin^2\alpha};$$

d'où en prenant les inverses

$$\frac{2\cos^2\alpha}{p} + \frac{2\sin^2\alpha}{p} = \frac{2}{p}.$$

Remarque. — La longueur d'une corde focale est alors

$$\frac{p}{2\cos^2\alpha} + \frac{p}{2\sin^2\alpha} = \frac{p}{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{2p}{\sin^2 2\alpha}.$$

Elle aura sa valeur minimum lorsque sin 2α aura sa plus grande valeur, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$; alors $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et la longueur de la corde est $2p$. Il est facile de voir que cette corde est perpendiculaire à l'axe.

Une corde focale perpendiculaire à la première aurait pour expression $\dfrac{2p}{\cos^2 2\alpha}$.

et comme $$\frac{\cos^2 2\alpha}{2p} + \frac{\sin^2 2\alpha}{2p} = \frac{1}{2p},$$
on en conclut que *la somme des inverses de deux cordes focales rectangulaires est constante.*

LXXX. **Théorème.** — *Si l'on prolonge les normales aux extrémités d'une corde focale, la corde qui joint leurs points d'intersection avec la courbe est parallèle à la première et égale à trois fois cette première.*

Soit (*fig. 33*) P le point de concours des normales menées

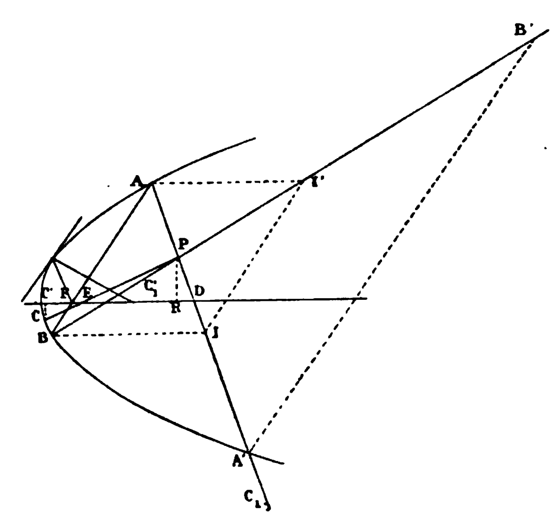


Fig. 33.

aux extrémités de la corde focale AB; α étant l'angle BAP, le triangle rectangle BAP donne
$$AP = AB \cos\alpha = \frac{p}{2 \sin^2\alpha \cos\alpha}.$$

Si l'on se reporte au problème LXIX, on trouve pour la longueur d'une corde normale à la parabole
$$AA' = \frac{2p}{\sin^2\alpha \cos\alpha}.$$

On en conclut immédiatement
$$AA' = 4AP.$$

Il est évident que pareillement on a

$$BB' = 4BP,$$

de sorte que les deux triangles APB et A'PB' qui ont un angle égal et les côtés qui le comprennent proportionnels, sont semblables ; il en résulte évidemment l'égalité des angles $\widehat{PAB}$ et PA'B', $\widehat{PBA}$ et $\widehat{PB'A'}$, c'est-à-dire le parallélisme des cordes AB et A'B' et en outre la relation annoncée

$$A'B' = 3AB.$$

Corollaire I. — *La parallèle à l'axe menée par l'une des extrémités d'une corde focale coupe la corde formée par la normale à l'autre en son milieu.*

Soit I le point où la parallèle à l'axe menée par le point B rencontre AA', le triangle ABI est isoscèle et PI = AP; donc $AI = \frac{AA'}{2}$. Soit T le point où la tangente en A rencontre BI ou son prolongement, il est évident que les trois points I, A, T sont sur un cercle dont le centre est B.

Corollaire II. — *Le triangle qui a pour sommets les points* A *et* I *et le pied de la troisième normale issue du point* P *a son centre de gravité sur l'axe.*

On a vu, en effet (LXXVII), que, PR étant l'ordonnée du point P et CC' celle du pied C de la troisième normale issue du point P, CC' = 2PR, et alors le point E où PC coupe l'axe est tel que 2PE = CE; la ligne CP étant médiane du triangle CAI, le point E est le centre de gravité de ce triangle. Il est également le centre de gravité du triangle I'CB, I' étant le milieu de BB'.

LXXXI. **Théorème.** — *La corde focale passant par le foyer et parallèle à une tangente est égale à quatre fois le rayon vecteur du point de contact.*

Soit (*fig. 33*) M le point de contact d'une tangente parallèle à la corde focale AB ; la normale en ce point est perpendiculaire à AB, et il est facile de voir que l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur FM est égal à $2\alpha - \frac{\pi}{2}$; de sorte que la valeur de ce rayon est

$$FM = \frac{p}{2\cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{p}{2\sin^2 2\alpha}.$$

En comparant cette valeur à celle que l'on a obtenue (LXIXX, Remarque) pour la corde focale AB, on trouve

$$AB = 4FM.$$

Remarque. — Une solution purement géométrique de cette propriété a été donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1877.

LXXXII. **Théorème.** — *Une corde normale en un point d'une parabole se projette sur la corde focale de ce point ou sur l'axe suivant une longueur égale à quatre fois le rayon vecteur de l'autre extrémité de la corde.*

Soit (*fig. 33*) AA′ une corde normale en A; sa longueur a pour expression (XLIV)

$$AA' = \frac{2p}{\sin^2\alpha \cos\alpha}$$

et l'angle FAA′ étant α, la projection de AA′ sur FA a pour valeur

$$\frac{2p}{\sin^2\alpha},$$

or la valeur de FB est $\frac{p}{2\sin^2\alpha}$, dont la projection de AA′ sur AB vaut 4FB.

LXXXIII. **Problème.** — *Déterminer le paramètre d'une parabole connaissant les longueurs de deux tangentes rectangulaires.*

Soient a et b les longueurs des tangentes données; AB (*fig. 33*) étant la polaire de leur point de concours, on a

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2.$$

Si M est le pôle de la corde AB, on a, à cause du triangle rectangle MAB, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\overline{MF}^2}$;

or $$\overline{MF}^2 = BF \times AF$$

et, en vertu du théorème XLIV,

$$BF \times AF = \frac{p}{2} \times AB = \frac{p}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{MF}^2.$$

On en déduit facilement, en vertu de la seconde relation,

$$p = \frac{2a^2\ b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

LXXXIV. **Théorème.** — R *et* R′ *étant les rayons des cercles osculateurs aux extrémités d'une corde focale*, on a

$$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{p^{\frac{2}{3}}}.$$

Les angles que font les normales aux extrémités d'une corde focale avec cette corde étant complémentaires, R et R′ ont pour expressions (LXXII)

$$R = \frac{p}{\cos^3 \alpha}, \quad R' = \frac{p}{\sin^3 \alpha},$$

Il est facile d'en déduire

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \sin^2 \alpha = \left(\frac{p}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

et par addition

$$1 = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{p}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

expression qui conduit à celle de l'énoncé.

LXXXV. **Théorème.** — *Les extrémités* A, B *d'une corde focale et les milieux des cordes normales en* A *et* B *sont les sommets d'un losange dont la surface est égale à celle du quadrilatère dont les sommets sont* A *et* B *et les centres des cercles osculateurs en ces extrémités.*

Soient (*fig.* 33) I et I′ les milieux des cordes normales en A et B, on a vu (LXXX) que

$$AP = PI, \quad BP = PI', \quad AB = BI$$

et par suite la figure ABII′ est un losange dont la surface S est évidemment égale à quatre fois celle du triangle APB, c'est-à-dire $S = 4\frac{AP \times BP}{2} = 2AP \times BP$,

et en vertu des expressions trouvées pour AP et BP

$$S = \frac{p^2}{2\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha};$$

soient C_1 et C'_1 les centres des cercles osculateurs en A et B,

le quadrilatère ABc_1c_1', dont les diagonales sont rectangulaires, a pour surface

$$S' = \frac{Ac_1 \times Bc_1'}{2} = \frac{R \times R'}{2} = \frac{p^2}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha};$$

donc $S = S'$.

QUESTION 185.

Solution par M. SIGWARTH, Pensionnat Saint-Joseph, à Thonon.

On considère l'égalité

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

et on propose d'étudier les variations de y *quand* x *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$. *En supposant* a — b, *on propose de démontrer*

1° *Que* a *est le maximum de* y ;

2° *Que* b *est le minimum de* y ;

3° *Que si l'on donne à* y *une valeur comprise entre* a *et* b, *l'équation bicarrée qui donne* x *a ses quatre racines réelles, et que si l'on désigne par* x_1 *l'une des racines, les trois autres sont données par les égalités*

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1x_3 + 1 = 0$$
$$x_1x_4 - 1 = 0$$

(De Longchamps.)

De l'expression donnée on tire

$$x^4(y^2 - b^2) + x^2(2y^2 + 2b^2 - 4a^2) + y^2 - b^2 = 0$$

d'où

$$x^2 = \frac{2a^2 - b^2 - y^2 \pm \sqrt{4b^2y^2 - 4a^2y^2 - 4a^2b^2 + 4a^4}}{y^2 - b^2} \quad (1)$$

x^2 doit être réel ; il faut donc que l'on ait

$$4b^2y^2 - 4a^2y^2 - 4a^2b^2 + 4a^4 \geq 0$$

ou $\quad y^2(a^2 - b^2) - a^2(a^2 - b^2) \leq 0.$

divisant par $\quad a^2 - b^2 ; \quad y^2 \leq a^2 \quad$ et $y \leq a$.

On voit que a est le maximum de y et par suite que pour $y = a, \quad x = 1$.

Cette manière de procéder ne fait pas voir clairement les variations de la fonction.

x variant de $-\infty$ à $+\infty$, cherchons les valeurs de la fonction pour un certain nombre de valeurs de la variable x.

1° Le dénominateur n'est jamais nul; donc y ne passe pas par l'infini;

2° Le numérateur n'est jamais nul, donc y ne passe pas par o;

3° Pour $x = 0$, $y = b$;

4° Pour $x = \pm\infty$, on a, en divisant préalablement tous les termes de la fraction proposée par x^4,

$$y^2 = \frac{b^2 + \frac{4a^2 - 2b^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^4}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}$$

et pour $x = \infty$, $y = b$.

On peut, en outre, remarquer que cette fonction prend les mêmes valeurs pour $x = \pm 2$ et $\pm \frac{1}{2}$; $x = \pm 3$ et $\pm \frac{1}{3} \ldots$

Ce résultat est facile à comprendre pour les valeurs égales et de signes contraires; car l'expression donnée, ne renfermant que des puissances paires de x, reste la même quand on change x en $-x$. Pour les inverses de ces mêmes valeurs, on remarque que le coefficient de x^4 et le terme connu sont égaux; on sait que dans ce cas les racines se présentent sous cette forme.

En faisant successivement dans l'expression donnée $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ ou $\pm \frac{1}{2}$, $x \pm 3$ ou $\pm \frac{1}{3}$ ... $x = \pm\infty$ ou $\pm \frac{1}{\infty}$, on a

$$y = a, \quad y = \frac{\sqrt{16a^2 + 9b^2}}{5}, \quad y = \frac{\sqrt{36a^2 + 64b^2}}{10}, \quad y = b.$$

On peut vérifier facilement que les expressions irrationnelles de y sont plus petites que a et plus grandes que b et qu'elles vont en diminuant d'une manière continue de a à b.

Donc, si x varie de 1 à $+\infty$, y varie de a à b en passant par toutes les valeurs intermédiaires;

Donc 1° a est le maximum de y;

2° b est le minimum de y.

La courbe construite pour $a = 10$ et $b = 2$, fait voir les variations de la fonction. On voit que cette fonction atteint deux fois le maximum pour $x = \pm 1$; trois fois le minimum pour $x = 0$ et $x = \pm \infty$.

Tirons de l'équation (1) la valeur de x, on a

$$x = \pm \sqrt{\frac{2a^2 - b^2 - y^2 \pm \sqrt{4b^2y^2 - 4a^2y^2 - 4a^2b^2 + 4a^4}}{y^2 - b^2}} \quad (2)$$

on sait que $\frac{\sqrt{16a^2 + 9b^2}}{5}$ trouvée ci-dessus pour y est compris entre a et b.

Si on remplace y par cette valeur dans la relation (2), il vient

$$x = \pm \sqrt{\frac{\frac{34}{25}(a^2 - b^2) \pm \frac{6}{5}(a^2 - b^2)}{\frac{16}{25}(a^2 - b^2)}}.$$

Simplifiant et séparant les racines, il vient $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, valeurs qui vérifient les égalités proposées.

QUESTION 203.

Solution par M. Reymondier, Pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne.

Démontrer que la surface d'un triangle en fonction des bissectrices l, l′ *intérieure et extérieure d'un angle et du rapport* K *des côtés formant cet angle est donnée par la formule*

$$S = \frac{ll'}{4}\left(\frac{K^2 - 1}{K}\right).$$

Soient le triangle ABC ; AI, AI′ les bissectrices données.

Désignons par t le triangle ACI, par t' le triangle ACI′. On donne

$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC} = \frac{I'B}{I'C} = K.$$

Le triangle AII′ rectangle en A a pour surface $\frac{ll'}{2}$

$= t + t'$. Les triangles ABC, ACI ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases. Donc

$$\frac{S}{t} = \frac{BC}{IC} = \frac{IB + IC}{IC};$$

or $\frac{IB}{IC} = K$, d'où $\frac{IB + IC}{IC} = K + 1$;

par suite $$t = S \cdot \frac{1}{K+1}:$$

De même les triangles ABC, ACI' donnent

$$\frac{S}{t'} = \frac{BC}{I'C} = \frac{I'B - I'C}{I'C} = K - 1$$

et $$t' = S \cdot \frac{1}{K-1};$$

dès lors $$t + t' = \frac{ll'}{2} = S \frac{2K}{K^2 - 1};$$

d'où enfin $$S = \frac{ll'}{4} \left(\frac{K^2 - 1}{K}\right).$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Deslais, au Mans; Gino Laria, à Mantoue; Huet, à Orléans; Daguillon, lycée Henri IV; Nou, à Perpignan; Abry, à Thonon; Legrain, Gossieaux, Boulogne, à Saint-Quentin; Bousquet, à Nice; Dupuy, à Grenoble; Blessel, à Paris.

QUESTION 204.

Solution par M. RENAUD, élève du Lycée de Bordeaux.

Du pied A' *d'une des hauteurs* AA' *d'un triangle* ABC *on mène les perpendiculaires* A'D, A'E, A'K, A'L *respectivement sur les côtés* AB, AC *et des deux autres hauteurs* BB', CC' *du triangle* ABC.

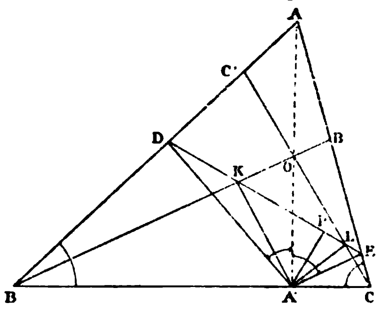
1° *Démontrer que les quatre points* D, K, L, E *sont en ligne droite ;*

2° *Qu'en appelant* S *la surface du triangle* ABC, *la surface du triangle* A'DE *a pour expression* S sin B sin C cos B cos C;

3° *Que la hauteur* A'P *du triangle* A'DE *a pour expression* 2R sin B sin C cos B cos C, R *étant le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC. (Perrin.)

1° O étant le point de concours des hauteurs, le quadri-

latère OB′CA′ est inscriptible ; donc A′ est un point de la circonférence circonscrite à OB′C. D'après le théorème de Simson, les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés du triangle OB′C sont en ligne droite. On démontrerait de même que les points D, K, L sont en ligne droite, par suite D, K, L, E sont en ligne droite.



2° Soit S′ la surface du triangle DA′E, on a,

$$S' = \frac{A'D \cdot A'E}{2} \sin A. \qquad [DAE = 180 - A],$$

or $\qquad A'D = C \sin B \cos B$

$\qquad A'E = b \sin C \cos c,$

donc (1) $\quad S' = \frac{bc \sin A}{2} \sin B \sin C \cos B \cos C,$

mais $\quad S = \frac{1}{2} bc \sin A,$

donc $\quad S' = S \sin B \sin C \cos B \cos C.$

3° L'égalité (1) peut s'écrire

$$DE \; . \; A'P = bc \sin A \sin B \sin C \cos B \cos C,$$

mais $\quad DE = c \sin A \sin B,$

donc $\quad A'P = b \sin C \cos B \cos C,$

or $\quad 2R \sin B = b,$

donc $\quad A'P = 2R \sin B \sin C \cos B \cos C.$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Nou, à Perpignan ; Dupuy, de Grenoble.

QUESTION 205.

Solution par M. DESLAIS, élève au Lycée du Mans.

Trouver 2n + 1 *nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des* n + 1 *premiers de ces nombres soit égale à la somme des carrés des* n *nombres suivants.*

Soit x le nombre moyen, on doit avoir

$$(x-n)^2+(x-n+1)^2+\ldots+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2$$
$$=(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots(x+n)^2.$$

Développant et simplifiant, il vient

$$x^2-2nx-2(n-1)x-4x-2x=2x+4x+\ldots+2nx$$

ou $$x^2-2x(2+4+6+\ldots+2(n-1)+2n)=0,$$

or $$2+4+6+\ldots+2n=\frac{(2+2n)n}{2}=(n+1)n,$$

par suite $$x^2-2n(n+1)x=0$$

ou $$x[x-2n(n+1)]=0,$$

équation satisfaite pour $x=0$ et $x=2n(n+1$.

Les nombres cherchés sont donc

$$-n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,$$
$$+\ldots,+(x-1),+n$$

ou

$$[2n(n+1)-n],\ [2n(n+1)-(n-1)],\ \ldots,[2n(n+1)-2],$$
$$[2n(n+1)-1],\ 2n(n+1),\ [2n(n+1)+1],\ \ldots,$$
$$[2n(n+1)+n].$$

Comme vérification, faisons $n=2$, on a $x=0$ et $x=12$. Les cinq nombres consécutifs seront

$$-2,\quad -1,\quad 0,\quad +1,\quad +2$$

ou $$10\quad 11\quad 12\quad 13\quad 14.$$

On a en effet

$$\overline{10}^2+\overline{11}^2+\overline{12}^2=\overline{13}^2+\overline{14}^2.$$

C'est le cas particulier examiné tome II, page 30.

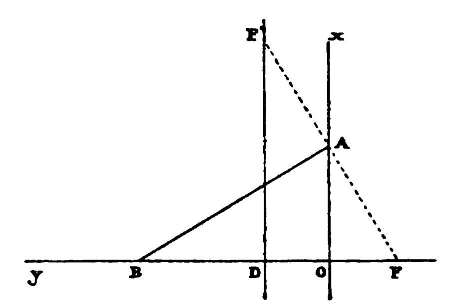
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gino Loria, de Mantou; Malcou, à La Seyne; Huet, à Orléans; Combier; Reymondier, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne.

QUESTION 206.

Solution par M. LEGAY, élève du Lycée Saint-Louis.

Deux mobiles partent d'un point O *sans mouvement initial; l'un* A *parcourt la droite* OX *d'un mouvement uniforme; l'autre* B *parcourt la droite* OY, *perpendiculaire à* OX, *d'un mouvement uniformément accéléré; démontrer que la droite qui les joint à chaque instant est constamment tangente à une parabole.*

Soient a, b deux constantes, t un instant quelconque compté



à partir du moment où les mobiles sont partis du point O, on a $OA = at$, $OB = bt^2$.

Élevons en A une perpendiculaire sur AB qui rencontre en F la droite OY prolongée ; on a

$$OF = \frac{\overline{OA}^2}{OB} = \frac{a^2}{b}.$$

La longueur OF est constante ; par suite, si l'on prolonge FA d'une longueur égale à AF', le point F' se trouve constamment sur une parallèle F'D à OX menée à une distance de celle-ci OD = OF.

Il en résulte que la droite BA est constamment tangente à la parabole qui a le point F pour foyer et la droite F'D pour directrice.

NOTA. — Ont résolu la même question MM. Heurteaux, de Nantes ; d'Ocagne, du lycée Fontanes, qui a généralisé la question.

QUESTION 207.

Solution par M. LEGRAIN, élève du Lycée de Saint-Quentin.

Sur une demi-circonférence de diamètre AB *on prend deux points* P *et* Q *tels que les droites* AQ *et* BP *se coupant en* M, *on ait* AM . BM = 2AP . BQ.

Trouver le lieu géométrique de M.

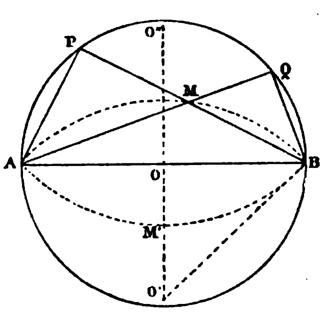
On a d'abord $AM \cdot MB = 2AP \cdot BQ$ (1)

Les triangles semblables APM et BQM sont semblables et

donnent $$\frac{AP}{BQ} = \frac{AM}{BM},$$

d'où l'on tire $$AP \cdot BM = AM \cdot BQ; \qquad (2)$$

divisant (1) et (2) membre à membre et faisant le produit en croix, on a



$$\overline{MB}^2 = 2\overline{BQ}^2;$$

relation qui indique que MQB est isoscèle.

L'angle en M, supplément d'un angle de 45°, vaut 135° et est par suite constant. Donc, de M on voit AB sous un angle constant. Le lieu géométrique de M se compose alors des deux segments capables de 135°, AMB et AM'B symétriques par rapport à AB.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Fabry, collège Chaptal; Boucheaux, d'Angers; Dupuy, de Grenoble; Pruget, Bénard, de Châteauroux; Lesieur, Daguillon, du lycée Henri IV; Coignard, Rouché, Legay, du lycée Saint-Louis; Heurteaux, de Nantes; Sicard, de Lyon; Reymondier, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne; Potier, de Rennes; Courtal, à Blaye; Alery, à Thonon; Joly, de Tarbes; Boulogne, Gossiaux, de Saint-Quentin; Cavrais, de Toulouse; Payeux, de Verdun; Etchats, de Mont-de-Marsan; Chretien, du Havre.

QUESTION 217.

Solution par M. Louis GODARD, élève du Lycée de Saint-Étienne, classe des Mineurs.

Étant données deux circonférences C *et* C' *tangentes entre elles et une de leurs tangentes extérieures* AB, *on mène une circonférence* C'' *tangente aux deux circonférences proposées et à* AB ; *puis une circonférence* C''' *tangente à* C, *à* C'' *et à* AB, *et ainsi de suite. On propose d'étudier les séries formées par les rayons de ces circonférences successives et par les surfaces des mêmes cercles. On donne* AB — 2a, AC = R.

Soit R' le rayon de C' on a

$$(R + R')^2 = (R - R')^2 + 4a^2,$$

d'où $$R' = \frac{a^2}{R}.$$

Soient $r_1, r_2, r_3 \ldots . r_n$ les rayons des circonférences successives, on a $\sqrt{Rr_1} + \sqrt{R'r_1} = a = \sqrt{RR'}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}};$$ d'où

$$r_1 = \frac{RR'}{(\sqrt{R}+\sqrt{R'})^2} = \frac{a^2}{R}\frac{1}{\left(1+\frac{a}{R}\right)^2}$$

De même

$$\frac{1}{\sqrt{r^2}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{2}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}}$$

d'où $$r_2 = \frac{RR'}{\sqrt{R} + 2\sqrt{R'}} = \frac{a^2}{R}\frac{1}{\left(1+\frac{2a}{R}\right)^2}$$

En continuant de la sorte on trouverait successivement

$$r_4 = \frac{a^2}{R}\frac{1}{\left(1+\frac{3a}{R}\right)^2}$$

$$r_n = \frac{a^2}{R}\frac{1}{\left(1+\frac{na}{R}\right)^2}$$

on a donc

$$S_n = \frac{a^2}{R}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{a}{R}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{2a}{R}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\frac{na}{R}\right)^2}\right\}$$

Or, on sait que la série

$$\frac{1}{\left(1+\frac{a}{R}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{2a}{R}\right)^2} + \ldots \frac{1}{\left(1+\frac{xa}{R}\right)^2}$$

qui est formée par la suite des carrés des inverses des termes d'une progression arithmétique est convergente.

Pour la suite formée par les surfaces de ces cercles, on aurait

$$S_n = \frac{\pi a^4}{R^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{a}{R}\right)^4}+\frac{1}{\left(1+\frac{2a}{R}\right)^4}+\dots\right]$$

et la série entre parenthèses sera, à plus forte raison, convergente.

QUESTION 218.

Solution par M. Haure, élève du Lycée Louis-le-Grand.

Étudier la série

$$1+\frac{x}{x+p+1}+\dots\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{(x+p+1)\dots(x+p+n+1)}+\dots$$

Formons le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{x+n+1}{x+p+n+2}$ qui tend vers 1 pour n infini et appliquons le théorème de Gauss

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+x+1}{n+x+p+2}.$$

Pour que la série soit convergente il faut et il suffit que

$$(x+p+2)-(x+1) > 1$$

c.-à-d. $\quad p+1 > 1$ ou $p > 0$.

Si $p = 0$, la série devient

$$1+\frac{x}{x+1}+\dots+\frac{x}{x+n+1}$$

On sait que dans toute série convergente le produit nU_n tend vers 0 quand n devient infini.

Or $$nU_n = \frac{nx}{x+n}.$$

Donc $$\lim nU_n = x$$

donc si $x \gtrless 0$ la série est divergente.

On peut déduire le théorème de Gauss de celui de Duhamel; mais Gauss l'a démontré directement; nous pouvons donc essayer de déduire le théorème de Duhamel de la condition de convergence de cette série.

Soit $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{1+\alpha}$ le rapport d'un terme au précédent, dans une série, α étant un nombre positif tendant vers o.

Je dis que si $n\alpha$ tend vers un nombre K plus grand que l'unité, la série V est convergente.

Or, pour démontrer que la série est convergente, il suffit de démontrer que l'on a constamment, à partir d'un certain rang,

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} < \frac{U_{n+1}}{U_n},$$

U_n désignant le terme général de la série étudiée plus haut, série dans laquelle p est quelconque, pour le moment, mais positif, et qui par conséquent est convergente.

Il s'agit donc de démontrer que

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{x+n+1}{x+n+p+2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{1+\frac{p+1}{x+n+1}}$$

ou que l'on a

$$1+\alpha > \frac{p+1}{x+n+1}+1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha > \frac{p+1}{x+n+1}$$

ou

$$n\alpha > \frac{n(p+1)}{n+x+1}.$$

Or, cette inégalité peut toujours être satisfaite à partir d'un certain rang : car on a $\operatorname{Lim} n\alpha = K$

et

$$\operatorname{Lim} \frac{n(p+1)}{x+n+1} = p+1.$$

Prenons $p+1 < K$, c'est-à-dire $p < K-1$, ce qui est toujours possible, puisque l'on a $K > 1$. On aura, de quelque manière que $n\alpha$ tende vers K, à partir d'un certain rang,

$$n\alpha > p+1$$

et à fortiori

$$n\alpha > \frac{n(p+1)}{n+x+1},$$

c'est-à-dire $$n\alpha > \frac{p+1}{1+\frac{x+1}{n}}$$

en supposant $x+1>0$, ce qui peut toujours être réalisé. Donc les inégalités $$n\alpha > \frac{n(p+1)}{n+x+1}$$

et en remontant $$\frac{V_{n+1}}{V_n} < \frac{U_{n+1}}{U_n},$$

sont vérifiées, et si $\lim n\alpha > 1$, la série V est convergente, c. q. f. d.

Note de la Rédaction. — M. Jaubert, maître répétiteur au lycée de Tarbes, nous a adressé une autre solution qui a sur la précédente l'avantage de fournir la sommation même de la suite considérée; malheureusement, il n'en a pas déduit la démonstration que nous demandions du théorème de Duhamel, et, de plus, son raisonnement n'est pas complet, pour un motif qu'il est important de mettre en lumière.

M. Jaubert part des identités suivantes:

$$1 = 1$$

$$\frac{x}{x+p+1} = 1 - \frac{p+1}{x+p+1}$$

$$\frac{x(x+1)}{(x+p+1)(x+p+2)} = \frac{x}{x+p+1} - \frac{x(p+1)}{(x+p+1)(x+p+2)}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+p+1)(x+p+2)(x+p+3)} = \frac{x(x+1)}{(x+p+1)(x+p+2)} - \frac{x(x+1)(p+1)}{(x+p+1)(x+p+2)(x+p+3)}$$

et généralement

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+p+1)(x+p+2)\ldots(x+p+n+1)} = \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{(x+p+1)(x+p+2)\ldots(x+p+n)}$$

$$-\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)(p+1)}{(x+p+1)(x+p+2)\ldots(x+p+n+1)}$$

en ajoutant membre à membre, il vient

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+p+1)(x+p+2)\ldots(x+p+n+1)}$$
$$=1-\frac{p}{x+p}\Big[1+\frac{x}{x+p+2}+\frac{x(x+1)}{(x+p+2)(x+p+3)}$$
$$+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{(x+p+2)(x+p+3)\ldots(x+p+n+1)}\Big]$$

Si, dans cette relation, on change p en $p-1$, on a

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+p)(x+p+1)\ldots(x+p+n)}$$
$$=1-\frac{p}{x+p+1}\Big[1+\frac{x}{x+p+1}+\frac{x(x+1)}{(x+p+1)(x+p+2)}$$
$$+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+x-1)}{(x+p+2)(x+p+3)\ldots(x+p+n)}\Big]$$

La parenthèse du second membre renferme la somme des $n+1$ premiers termes de la série proposée, on a donc

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+p)(x+p+1)\ldots(x+p+n)}$$
$$=1-\frac{p}{x+p}S_{n+1}$$

d'où

$$S_{n+1}=\frac{x+p}{p}-\frac{x}{p}\quad\frac{x+1}{x+p+1}-\frac{x+2}{x+p+2}\ldots\frac{x+n}{x+p+n}.$$

M. Jaubert dit alors que si $p>0$, les facteurs du produit infini précédent sont tous inférieurs à l'unité, lim $\frac{x+n}{x+p+n}$ étant 1 pour x infini, et que leur produit va constamment en décroissant.

Mais cette observation ne suffit pas pour prouver que la somme de la suite considérée a pour limite $\frac{x+p}{p}$; il faut remarquer, en effet, que cette conclusion ne peut être rigou-

reuse qu'à la condition d'établir que le produit infini

$$\frac{x+1}{x+p+1}\cdot\frac{x+2}{x+p+2}\cdots\frac{x+n}{x+p+n} \text{ tend vers}$$

zéro quand n augmente indéfiniment.

Il aurait donc fallu ajouter ce qu'il suit:

Le produit peut s'écrire

$$\left(1-\frac{p}{x+p+1}\right)\left(x-\frac{p}{x+p+2}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{x+p+n}\right)$$

et on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il ne tende pas vers zéro quand n croît indéfiniment, est que la série

$$\frac{p}{x+p+1}+\frac{p}{x+p+2}+\cdots+\frac{p}{x+p+n}+\cdots$$

soit convergente.

Or cette série, qui n'est autre chose que le produit par p de la série harmonique considérée à partir de $\frac{1}{x+p+1}$ est divergente ; donc le produit infini tend vers zéro.

E. J. B.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

BORDEAUX

Session de novembre 1879

— Etant donnés les quatre côtés a, b, c, d d'un trapèze, calculer ses angles. Donner les formules générales. Applications : $a = 52$, $b = 12$, $c = 20$, $d = 9$, (a et c sont les bases).

— Résoudre l'équation

$$\cos(a - b)\sin(c - x) = \cos(a + b)\sin(c + x).$$

— Connaissant les trois côtés a, b, c d'un triangle, calculer la longueur de l'une des bissectrices. Application : $a = 528$; $b = 635$; $c = 742$.

— Vérifier l'égalité

$$\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\theta}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right).$$

— Les deux diagonales d'un parallélogramme ont pour longueur 36 et 22; elles font entre elles un angle de 90°. Calculer les côtés, les angles et l'aire du parallélogramme.

— Partager 30 en deux parties telles que 6 fois le carré de la première et 4 fois celui de la seconde forment une somme la plus petite possible.

— Calculer le volume engendré par la révolution d'un triangle équilatéral autour d'un axe mené par le sommet parallèlement à la base, sachant que le côté du triangle est égal à 12m,50.

— Le volume d'un cône droit est égal à $\frac{1}{7}$ de mètre cube. La surface de la base est $\frac{1}{3}$ de mètre carré. Calculer la surface latérale du cône.

— Résoudre les équations

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}$$
$$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}.$$

Vérifier les valeurs obtenues.

— Etant donné l'angle A d'un triangle DAE, on abaisse du sommet la perpendiculaire AB sur DE, on mène la bissectrice AC de l'angle A; connaissant BC $= m$, et l'angle BAC $= \alpha$, calculer les éléments du triangle.

LYON

— Résoudre les équations $x + y = 1{,}587$

$$x^3 + y^3 = 4{,}096,$$

et donner les valeurs des inconnues à 0,001 près.

— Démontrer que les hauteurs d'un tétraèdre régulier passent par un même point, qui est le centre de deux sphères, l'une inscrite, l'autre circonscrite, et que le rayon de la première est le $\frac{1}{3}$ de celui de la seconde. Calculer le volume

V du tétraèdre en fonction du rayon r de la sphère inscrite. On donne V — 1.763984; trouver r.

— Deux lignes OA et OB font entre elles un angle α. D'un point M pris sur OA, on abaisse une perpendiculaire MC sur OB; du pied C de cette perpendiculaire, on mène une perpendiculaire sur OA, et ainsi de suite. Quel doit être l'angle α pour que la limite de la somme de toutes ces perpendiculaires soit 18^m,52 ? On donne OM = 20^m,57.

— On donne le côté BC d'un triangle ABC, l'angle A, et le rapport K de de AB à AC. Calculer ces deux côtés et indiquer la solution graphique du problème. Application:

$$a = 367{,}6048$$
$$A = 52°41'56''$$
$$K = \frac{5}{4}$$

— La section faite par un plan dans une sphère a une surface de 60^{mq},58. Calculer la distance du plan au centre de la sphère, sachant que le volume de celle-ci est 2759^{m} ,441.

— Mettre la fraction $\frac{x - 1}{3x^2 - 7x + 2}$ sous forme de deux fractions $\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}$; c'est-à-dire, déterminer A, B, a, b, de façon que cette somme soit identiquement égale à la fraction donnée.

— Un triangle rectangle en A, dont les côtés b, c sont donnés, tourne autour d'un axe fixe XX' mené dans son plan par le sommet A de l'angle droit. Calculer le volume engendré connaissant l'angle CAX $= \alpha$ du côté b avec l'axe XX'.

— Construire un trapèze isoscèle dont on donne les deux bases b, b' et le côté m. Conditions de possibilité du problème. Calculer la hauteur, un angle, une diagonale, et le rayon du cercle circonscrit au trapèze.

— Soit l'équation $x^3 + Ax^2 + Bx - 30 = 0$. Déterminer les valeurs de A et de B de façon que 2 et 3 soient racines de l'équation. Trouver alors la troisième racine.

— En coupant une pyramide par un plan parallèle à la base, on a détaché un tronc dont le volume est de 42 mètres cubes. Calculer la hauteur et les deux bases de ce tronc, sachant que la pyramide dont il faisait partie a une hauteur de 12 mètres et un volume de 48 mètres cubes. Supposant que la base de la pyramide est un décagone, calculer le rayon du cercle circonscrit.

— Trouver le maximum et le minimum de l'expression

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{3 + \sqrt{5} \sin x}$$

(pour plus de facilité, on peut exprimer sin x et cos x en fonction de tg $\frac{x}{2}$.)

— Par un point A, situé sur la ligne des centres de deux circonférences, on mène des tangentes à ces circonférences dont les rayons sont R et r. C et C' étant leurs centres, on a AC = 200, AC' = 300 ; $\frac{R}{r} = 1{,}8$; quelle valeur faut-il donner à r pour que l'angle des tangentes menées à l'une des circonférences soit le triple de l'angle des tangentes menées à l'autre?

— Un triangle ABC, dont on connait les trois côtés, tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par le sommet A; calculer: 1° l'angle x que doit faire le côté AC avec l'axe pour que la surface engendrée par AB soit équivalente à la surface engendrée par BC; 2° les surfaces engendrées par les trois côtés du triangle.

— Calculer l'aire d'un quadrilatère ABCD en fonction des diagonales AC = x, BD = y, et de l'un des angles qu'elles forment, α; valeur de α pour laquelle l'aire est maxima quand x et y sont données; valeur de x et de y pour lesquelles l'aire est maxima quand on donne α et $x + y = a$, ou $x^2 + y^2 = b^2$.

— Dans un demi-cercle CMC' de rayon R, on donne les angles AOC = α, BOC = β que font deux rayons OA et OB avec le diamètre CC'; calculer le volume engendré par le segment AMB dans une révolution autour de CC'.

— On donne dans un quadrilatère les angles et deux côtés opposés; déterminer les deux autres côtés.

— On donne dans un tronc de pyramide triangulaire régulière le volume V, la hauteur h, le côté a de l'une des bases; on demande le côté x de l'autre base. Interpréter la solution négative.

— Résoudre l'équation

$$36{,}97 - 27 \cos x = 50 \sin x.$$

— Étant donné dans un triangle a, B, et le rayon R du cercle circonscrit, construire géométriquement et résoudre par la trigonométrie le triangle.

— Les tangentes communes extérieures à deux circonférences forment un angle α; les tangentes intérieures forment un angle β. La distance des centres est d. Déterminer les points où la ligne des centres est coupée par ces tangentes, ainsi que les rayons des deux circonférences.

— La base inférieure d'un tronc de pyramide régulière à bases parallèles est un triangle équilatéral dont le côté a est donné. Calculer le côté de la base supérieure, sachant que le volume du tronc de pyramide est égal au volume du prisme dont la base est la base inférieure du tronc, et dont la hauteur est la moitié de celle du tronc.

— Calculer les éléments inconnus d'un triangle rectangle dont on donne la surface et l'hypoténuse.

— Inscrire dans une circonférence de rayon R un triangle ABC, tel que le côté BC ait une longueur donnée, et que l'angle B soit le triple de l'angle C. Calculer les angles A, B et le rayon r du cercle inscrit dans le triangle ABC.

— Etant données l'hypoténuse BC = a d'un triangle rectangle, et la hauteur AD = h, 1° calculer le petit côté AB de l'angle droit; 2° h étant la moitié du côté du décagone régulier inscrit dans la même circonférence que le triangle ABC, appliquer la formule trouvée pour AB au calcul du côté du polygone inscrit de vingt côtés.

— Etant donné un triangle ABC, construire un trapèze dans lequel AB soit l'un des côtés non parallèles, et C le milieu du côté opposé; calculer la surface du trapèze connaissant a, b, c.

— Les côtés d'un triangle isoscèle sont donnés; on élève au centre du cercle circonscrit une perpendiculaire de longueur h au plan du triangle; calculer la surface totale de la pyramide ayant pour base ce triangle et pour sommet l'extrémité de la perpendiculaire.

— Démontrer que deux quadrilatères sont semblables lorsqu'ils ont deux côtés proportionnels adjacents à trois angles égaux chacun à chacun.

— Calculer les angles et le troisième côté d'un triangle dont on donne la surface et deux côtés. Discussion.

— Par le sommet A d'un losange on élève une perpendiculaire à son plan, et l'on joint l'extrémité S de cette perpendiculaire aux trois autres sommets du losange. On forme ainsi une pyramide dont on demande les faces, connaissant son volume, la surface S du losange et son côté a.

CLERMONT-FERRAND

— Calculer le volume commun à deux sphères qui se coupent, connaissant leurs rayons R et R' et la distance d de leurs centres. Application : $R = 4$; $R' = 3$; $d = 3$.

— Le périmètre d'un triangle est 400 mètres, les angles A et B sont égaux respectivement à 58° 27' 15" et 49° 56' 38". Calculer les côtés, la surface et le rayon du cercle inscrit.

— Trouver la surface commune à deux cercles qui se coupent, connaissant leurs rayons et la distance des centres. Application : $R = 7$; $R' = 12$; $d = 15$.

— Résoudre l'équation

$$\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x + \frac{1}{6}(1 - \cos x)^3 + \frac{1}{2}\sin^2 x\,(1 - \cos x) = c.$$

— Déterminer K dans l'équation

$$5x^2 - 4x + K = 0$$

de façon que le premier membre soit :

1° La somme de deux carrés;

2° La différence de deux carrés.

CAEN

— Résoudre un triangle rectangle, sachant qu'un des côtés de l'angle droit est égal à 543^m,924, et que le rayon du cercle inscrit dans le triangle est de 90^m,654.

— On lance une pierre de bas en haut avec une vitesse initiale de 50 mètres par seconde; trois secondes après on lance une autre pierre qui suit la même verticale que la première. On demande à quelle hauteur elles se rencontrent.

— Transformer en un polynôme entier en a, b, c, d l'expression

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

NOTE

SUR UN POINT DE LA DISCUSSION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A TROIS INCONNUES

Par M. **J. Bourget.**

Lorsqu'on résout un système de trois équations du premier degré à trois inconnues

$$U = 0 \qquad U' = 0 \qquad U'' = 0$$

de la forme $ax + by + cz + d = 0$, on trouve

$$x = -\frac{N}{D} \qquad y = -\frac{N'}{D} \qquad z = -\frac{N''}{D}$$

en posant $$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

les numérateurs se formant en remplaçant dans D les coefficients de l'inconnue que l'on cherche par la lettre ***d***.

Il s'agit de faire voir que *si on a en même temps* $D = 0$, $N = 0$, *on peut en conclure que* $N' = N'' = 0$, *à condition que les trois déterminants mineurs de* D *qui entrent dans* N *ne soient pas nuls à la fois.*

1° Si tous les déterminants mineurs du déterminant D étaient nuls, le théorème serait évident.

2° Si tous les déterminants mineurs de D ne sont pas nuls, soit $\delta = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \gtrless 0$, δ étant un des mineurs qui entrent dans N.

Formons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} ax + by + cz + d, & b, & c \\ a'x + b'y + c'z + d', & b', & c' \\ a''x + b''y = c''z + d'', & b'', & c'' \end{vmatrix}$$

il se réduit, quels que soient x, y, z, à

$$N = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

puisque $D = 0$, si l'on applique les règles de la décomposition d'un déterminant en somme d'autres déterminants.

Mais, pour les valeurs particulières de x, y, z qui satisfont aux deux équations $U' = 0$ $U'' = 0$ (et il y en a une infinité, puisque δ est différent de zéro et qu'on peut tirer y et z en fonction de x), ce même déterminant se réduit à :

$$\begin{vmatrix} U & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix} = U \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = U\delta$$

donc : $$U\delta = N = 0$$

et comme δ n'est pas nul, $U = 0$. Donc dans ce cas le système des trois équations est tel que toute solution du système $U' = 0$ $U'' = 0$ satisfait à $U = 0$. Donc, en d'autres

termes, le système des équations se réduit à deux d'où l'on peut tirer y et z en fonctions linéaires de x.

Cela posé, formons les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a & U & c \\ a' & U' & c' \\ a'' & U'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & U \\ a' & b' & U' \\ a'' & b'' & U'' \end{vmatrix}$$

quelles que soient les valeurs des inconnues x, y, z, ces déterminants se réduisent respectivement à

$$N' \qquad N''$$

puisque $D = o$. D'ailleurs, pour les valeurs des inconnues qui rendent $U' = o$ $U'' = o$, nous savons que $U = o$, d'après ce qui précède. Donc ces déterminants ont alors chacun une colonne nulle, donc ils sont nuls ; donc

$$N' = o \qquad N'' = o\,;$$

c. q. f. d.

Le théorème s'étend sans peine, avec la même démonstration, à un nombre quelconque d'équations à autant d'inconnues. Soit, par exemple, quatre équations à quatre inconnues :

$$U = o, \quad U' = o, \quad U'' = o, \quad U''' = o,$$

de la forme $ax + by + cz + dt + k = o$. Soit D le déterminant des seize coefficients a, b, c, d, a', b', etc., et N, N', N'', N''' les déterminants qu'on déduit de D en remplaçant successivement les coefficients d'une inconnue par le terme tout connu k. Admettons que

$$D = o, \quad N = o,$$

il faut démontrer qu'on a aussi $N' = N'' = N''' = o$.

1° Si tous les déterminants mineurs de D sont nuls, le théorème est évident.

2° Si tous les déterminants mineurs de D ne sont pas nuls,

soit $$\delta = \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \gtrless o,$$

δ étant toujours un des mineurs de D qui entrent dans N, par exemple.

Formons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} U & b & c & d \\ U' & b' & c' & d' \\ U'' & b'' & c'' & d'' \\ U''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}.$$

Il se réduit à

$$N = \begin{vmatrix} k & b & c & d \\ k' & b' & c' & d' \\ k'' & b'' & c'' & d'' \\ k''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = o,$$

quelles que soient les valeurs x, y, z, t. Mais pour les valeurs de x, y, z, t, qui satisfont aux trois équations $U' = o$ $U'' = o$ $U''' = o$ (et il y en a une infinité puisque, δ étant différent de zéro, on peut tirer y, z, t en x), ce même déterminant devient

$$\begin{vmatrix} U & b & c & d \\ o & b' & c' & d' \\ o & b'' & c'' & d'' \\ o & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \text{ ou } U\delta;$$

donc $U\delta = o$, donc $U = o$. Donc toutes les valeurs des inconnues qui satisfont aux trois équations $U' = o$, $U'' = o$, $U''' = o$ satisfont aussi à l'équation $U = o$. Donc le système se réduit aux équations $U' = o$, $U'' = o$, $U''' = o$ qui fournissent y, z, t en fonctions linéaires de x.

Cela posé, formons les déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & U & c & d \\ a' & U' & c' & d' \\ a'' & U'' & c'' & d'' \\ a''' & U''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & U & d \\ a' & b' & U' & d' \\ a'' & b'' & U'' & d'' \\ a''' & b''' & U''' & d''' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & U \\ a' & b' & c' & U' \\ a'' & b'' & c'' & U'' \\ a''' & b''' & c''' & U''' \end{vmatrix}$$

Ces déterminants se réduisent respectivement, quelles que soient les valeurs de x, y, z, t, à

$$N' \quad N'' \quad N'''$$

puisque $D = o$. D'ailleurs ces mêmes déterminants prennent une colonne nulle pour toutes les valeurs de x, y, z, t qui satisfont aux équations $U' = o$, $U'' = o$, $U''' = o$, puisqu'alors $U = o$. Donc enfin :

$$N' = N'' = N''' = o; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Les démonstrations que nous venons de donner nous paraissent simples et plus directes peut-être que celle de M. Boquel (p. 213 du *Journal*). On voit qu'elles résultent du

mode ingénieux de discussion que M. Rouché a indiqué pour la discussion d'un système de n équations à n inconnues.

(V. mon *Traité d'Algèbre élémentaire*. Delagrave, 1880, p. 222.)

CONCOURS D'AGRÉGATION 1879

Solution par M. Henry, professeur au Lycée d'Angers.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. *On considère un paraboloïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan* P *de la courbe de contact passe par le point* A. *Soit* M *le point d'intersection de ce paraboloïde avec celui de ses diamètres qui passe par le point* A; *soit* Q *le point de rencontre du plan* P *avec la droite qui joint le point* M *au pôle du plan* P, *par rapport à l'hyperboloïde.*

Le plan P *tournant autour du point* A, *on demande :*

1° *Le lieu du point* M;

2° *Le lieu du point* Q; *ce second lieu est une surface du second degré* S *que l'on discutera en faisant varier la position du point* A *dans l'espace;*

3° *Le lieu des positions que doit occuper le point* A *pour que la surface* S *soit de révolution.*

Première partie. — Rapportons l'hyperboloïde à ses plans principaux, et soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A, x_1, y_1, z_1 celles du pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde. L'équation de l'hyperboloïde sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0;$$

celle du plan P

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}-1=0.$$

Le plan P passant par le point A (x_0, y_0, z_0), on aura la relation de condition

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}-\frac{z_0z_1}{c^2}-1=0,$$

et l'équation du plan P pourra s'écrire

$$\frac{(x-x_0)x_1}{a^2}+\frac{(y-y_0)y_1}{b^2}-\frac{(z-z_0)z_1}{c^2}=0.$$

L'équation générale des surfaces circonscrites à l'hyperboloïde donné le long de son intersection avec le plan P est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1$$
$$+\lambda\left[\frac{(x-x_0)x_1}{a^2}+\frac{(y-y_0)y_1}{b^2}-\frac{(z-z_0)z_1}{c^2}\right]^2=0.$$

Pour que cette équation représente un paraboloïde, nous allons déterminer λ de telle sorte que le diamètre conjugué du plan P, qui passe par le pôle (x_1, y_1, z_1) de ce plan, coupe la surface en un point rejeté à l'infini. Or ce diamètre, étant aussi diamètre de l'hyperboloïde, passe par l'origine, qui est le centre de l'hyperboloïde, et a par suite pour équations

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}.$$

Or, en posant $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}=\rho$,

l'équation qui donne les ρ du point de rencontre de la surface et de son diamètre est :

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right)\rho^2-1+\lambda\left[\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right)\rho\right.$$
$$\left.-\left(\frac{x_1x_0}{a^2}+\frac{y_1y_0}{b^2}-\frac{z_1z_0}{c^2}\right)\right]^2=0.$$

Le coefficient du terme en ρ^2 doit être nul. Or, il a pour valeur

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}+\lambda\left[\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right]^2$$

et $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{c^2}-\frac{z_1^2}{c^2}$ n'est pas nul; car, dans l'équation précédente, les deux valeurs de ρ seraient infinies. Donc on a

$$\lambda=-\frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}}.$$

L'équation des paraboloïdes considérés est donc

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1-\frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}}\left[\frac{(x-x_0)x_1}{a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(y-y_0)y_1}{b^2}-\frac{(z-z_0)z_1}{c^2}\right]^2=0. \quad (1)$$

Le diamètre passant par le point A (x_0, y_0, z_0) a pour équations
$$\frac{x-x_0}{x_1}=\frac{y-y_0}{y_1}=\frac{z-z_0}{y_1} \quad (2)$$

Le lieu du point M s'obtiendra par l'élimination des rapports $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ entre les équations (1) et (2), élimination qui se fera en remplaçant dans l'équation (1), homogène par rapport aux quantités x_1, y_1, z_1, ces quantités par les quantités proportionnelles $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $z-z_0)$. On a ainsi pour équation du premier lieu demandé
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1-\left[\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right]=0;$$
ou bien en simplifiant
$$2\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}\right)-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)-1=0. \quad (3)$$

Le lieu du point M est donc un plan parallèle au plan polaire du point donné par rapport à l'hyperboloïde.

Deuxième partie. — Les coordonnées d'un point M sont déterminées par les trois équations
$$2\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}\right)-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)-1=0, \quad (3)$$
et
$$\frac{x-x_0}{x_1}=\frac{y-y_0}{y_1}=\frac{z-z_0}{z_1}, \quad (2)$$
et les coordonnées X, Y, Z du point Q sont déterminées par les trois équations
$$\frac{X-x}{x-x_1}=\frac{Y-y}{y-y_1}=\frac{Z-z}{z-z_1} \quad (4)$$
$$\frac{Xx_1}{a^2}+\frac{Yy_1}{b^2}-\frac{Zz_1}{c^2}-1=0. \quad (5)$$

Le lieu demandé s'obtiendra en éliminant x, y, z, x_1, y_1, z_1,

entre les équations (2), (3), (4), (5), et l'équation de condition

$$\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} - \frac{z_0 z_1}{c^2} - 1 = 0. \qquad (6)$$

Pour faire cette élimination, posons

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1} = \rho$$

$$\frac{X - x}{x - x_1} = \frac{Y - y}{y - y_1} = \frac{Z - z_1}{z - z_1} = \mu.$$

On tire de là

$$x = x_0 + \rho x_1 \qquad X - x = \mu(x - x_1)$$
$$y - y_0 + \rho y_1 \qquad Y - y = \mu(y - y_1)$$
$$z = z_0 + \rho z_1 \qquad Z - z = \mu(Z - z).$$

Portant dans les trois dernières les valeurs de x, y, z tirées des trois premières, on a :

$$X - x_0 - \rho x_1 = \mu x_0 + \rho\mu x_1 - \mu x_1$$

. . . .

. . . .

d'où

$$x_1 = \frac{X - x_0 - \mu x_0}{\rho\mu - \mu + \rho} \qquad y_1 = \frac{Y - y_0 - \mu y_0}{\rho\mu - \mu + \rho}$$

$$z_1 = \frac{Z - z_0 - \mu z_0}{\rho\mu - \mu + \rho}.$$

Si maintenant dans l'équation (3) on remplace x, y, z, par leurs valeurs $x_0 + \rho x_1$, $y_0 + \rho y_1$, $z_0 + \rho z_1$, on a

$$2\left[\frac{(x_0 + \rho x_1)x_0}{a^2} + \frac{(y_0 + \rho y_1)y_0}{b^2} - \frac{(z_0 + \rho z_1)z_0}{c^2}\right]$$
$$-\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2}\right) - 1 = 0.$$

ou bien

$$\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1 + 2\rho\left(\frac{x_1 x_0}{a^2} + \frac{y_1 y_0}{b^2} - \frac{z_1 z_0}{c^2}\right)$$
$$= 0.$$

D'où l'on tire, en tenant compte de l'équation de condition (6) :

$$\rho = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right]$$

Posons maintenant les valeurs de x_1, y_1, z_1, dans l'équation (6). Il viendra :

$$\frac{x_0}{a^2}\left(X - x_0 - \mu x_0\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(Y - y_0 - \mu y_0\right)$$
$$- \frac{z_0}{c^2}\left(Z - z_0 - \mu z_0\right) - \rho\mu + \mu - \rho = 0.$$

ou bien

$$\frac{x_0}{a^2}\left(X - x_0\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(Y - y_0\right) - \frac{z_0}{c^2}\left(Z - z_0\right)$$
$$- \mu\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2}\right) - \rho\mu + \mu - \rho = 0.$$

Ou bien, en remplaçant ρ par sa valeur,

$$\frac{x_0}{a^2}\left(X - x_0\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(Y - y_0\right) - \frac{z_0}{c^2}\left(x - z_0\right)$$
$$-\mu\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2}\right) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right)$$
$$+ \mu + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right) = 0.$$

Ou enfin :

$$2\left[\frac{x_0}{a^2}\left(X - x_0\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(Y - y_0\right) - \frac{z_0}{c^2}\left(Z - z_0\right)\right].$$
$$+\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right)$$
$$- \mu\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right) = 0 \qquad (7)$$

Retranchons maintenant les équations (5) et (6) membre à membre, et remplaçons dans le résultat x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs ... $x_1 = \dfrac{X - x_0 - \mu x_0}{\rho\mu - \mu + \rho}$, ...

Il viendra :

$$\frac{X - x_0}{a^2}\,(X - x_0 - \mu x_0) + \frac{Y - y_0}{b^2}\,(Y - y_0 - \mu y_0) -$$
$$\frac{Z - z_0}{c^2}\,(Z - z_0 - \mu z_0) = 0\,;$$

ou bien

$$\frac{(X - x_0)^2}{a^2} + \frac{(Y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(Z - z_0)^2}{c^2} - \mu\left[\frac{(X - x_0)x_0}{a^2}\right.$$
$$\left. + \frac{(Y - y_0)y_0}{b^2} - \frac{(Z - z_0)z_0}{c^2}\right] = 0. \qquad (8)$$

On aura la surface S en éliminant μ entre les équations (7) et (8), ce qui donne

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\left(\frac{(X-x_0)^2}{a^2}+\frac{(Y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(Z-z_0)^2}{c^2}\right)$$
$$-2\left[\frac{(X-x_0)x_0}{a^2}+\frac{(Y-y_0)y_0}{b^2}-\frac{(Z-z_0)z_0}{c^2}\right]^2$$
$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\left[\frac{(X-x_0)x_0}{a^2}+\frac{(Y-y_0)y_0}{c^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(Z-z_0)z_0}{c^2}\right]=0.$$

Ou bien, en transportant l'origine au point (x_0, y_0, z_0) :

$$(S)\quad \left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}\right)-2$$
$$2\left[\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}\right]^2-\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)$$
$$\times\left[\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}\right]=0.$$

Si le point A est donné sur l'hyperboloïde, le lieu demandé se réduit à deux plans confondus avec le plan $\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{c^2}-\frac{Zz_0}{c^2}=0$. Sinon, le cône asymptote de la surface a pour équation

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{z^2}\right)-2\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\right.$$
$$\left.\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}\right)^2=0.$$

C'est un cône tangent au cône asymptote de l'hyperboloïde donné le long de ses génératrices d'intersection avec $\frac{Xx^0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}=0$, intérieur à ce cône asymptote si le point A (x_0, y_0, z_0) est intérieur à l'hyperboloïde donné; extérieur dans le cas contraire. Ce cône est évidemment toujours réel. Il ne se réduit pas à deux plans. En effet, si on le coupe par le plan $Z = c$, l'intersection se projette sur le plan des xy suivant la courbe

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1\right)-2\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{z_0}{c}\right)^2=0. \quad (9)$$

Les équations du centre sont

$$(10)$$

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}=\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)X-2\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{z_0}{c}\right)x_0=$$

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)Y-2\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{z_0}{c}\right)y_0=0$$

Multipliant la première par y_0, la seconde par x_0 et retranchant membre à membre, on en tire

$$y_0X-x_0Y=0.$$

D'où $Y=\frac{y_0X}{x_0}$. Portant cette valeur de Y dans la première des équations (10), on a

$$\frac{X}{a}=\frac{\dfrac{2x_0z_0}{ac}}{\dfrac{x^2_0}{a^2}+\dfrac{y^2_0}{b^2}+\dfrac{z'_0}{c^2}+1}$$

et par suite $\frac{Y}{b}=\dfrac{\dfrac{2y_0z_0}{bc}}{\dfrac{x^2_0}{a^2}+\dfrac{y^2_0}{b^2}+\dfrac{z^2_0}{c^2}+1}$.

Substituant ensuite ces valeurs dans le premier membre de l'équation (9), il vient, en multipliant par

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}+1\right):$$

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\left[\frac{2z^2_0}{c^2}\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}\right)-\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}\right)^2-\left(\frac{z^2_0}{c^2}+1\right)^2\right]$$

$$-2\frac{z^2_0}{c^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]^2$$

Or en divisant par $\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1$, qui n'est pas nul

$$-\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}\right)^2-\left(\frac{z^2_0}{c^2}+1\right)^2+\frac{2z^2_0}{c^2}\left(\frac{z^2_0}{c^2}+1\right)$$

c'est-à-dire $-\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)$.

Cette quantité n'est pas nulle. L'équation (9) n'est pas satisfaite par les coordonnées du centre. Donc la courbe qu'elle représente ne se réduit pas à deux droites.

Le cône asymptote ne se réduisant jamais à deux plans, la surface S est l'un des deux hyperboloïdes ou un cône. Le plan tangent à l'origine le coupe suivant deux droites représentées par les deux équations

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \quad \frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy^0}{b^2}-\frac{Zz_0}{b^2}=0.$$

De la seconde on tire

$$\frac{Z}{c}=\frac{c}{z_0}\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}\right).$$

Portant dans la première et réduisant, il vient :

$$\frac{X^2}{a^2}\left(\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{x^2_0}{a^2}\right)+\frac{Y^2}{b^2}\left(\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{y^2_0}{b^2}\right)-\frac{2XY}{ab}\frac{x_0y_0}{ab}=0.$$

Du signe de la quantité

$$\frac{x^2_0y^2_0}{a^2b^2}-\left(\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{x^2_0}{a^2}\right)\left(\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{y^2_0}{b^2}\right)$$

dépend la réalité des droites d'intersection de la surface et de son plan tangent.

Si l'on développe la parenthèse et que, après réductions, on divise par $\frac{z^2_0}{c^2}$ qui est positif, cette quantité devient

$$\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{b^2}.$$

Si le point A est intérieur au cône asymptote de l'hyperboloïde donné, cette quantité est négative. Les deux droites sont imaginaires : S est un hyperboloïde à deux nappes.

Si au contraire le point A est extérieur au cône asymptote de l'hyperboloïde, cette quantité est positive, les deux droites sont réelles et distinctes, et la surface est un hyperboloïde à une nappe. Si A est sur le cône, la surface S est un cône, son intersection avec le plan tangent se composant de deux

droites confondues. Si le point A est dans le plan des xy, c'est-à-dire si z_0 est nul, la surface est encore un hyperboloïde à deux nappes. Car les deux droites d'intersection du cône

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \quad \text{et du plan} \quad \frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}=0$$

sont évidemment réelles.

Résumé de la discussion :

A est intérieur au cône asymptote de l'hyperboloïde donné.
S est un hyperboloïde à deux nappes.
A est sur ce cône asymptote.
S est un cône.
A est extérieur à ce cône asymptote.
S est un hyperboloïde à une nappe.
A est sur l'hyperboloïde donné.
S se compose de deux plans confondus.

Troisième partie. — Conditions de révolution. L'équation de la surface S développée est

$$\frac{X^2}{a^2}\left[\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{x^2_0}{a^2}-1\right]+\frac{Y^2}{b^2}\left[\frac{x^2_0}{a^4}-\frac{y^{20}}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]$$
$$-\frac{Z^2}{c^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]+\frac{2y_0z_0}{bc}\frac{YZ}{bc}$$
$$+\frac{2x_0z_0}{ac}\frac{XZ}{ac}-2\frac{x_0y_0}{ab}\frac{XY}{ab}+\ldots=0.$$

Supposons d'abord qu'aucun rectangle n'ait un coefficient nul. On devra avoir:

$$\frac{1}{a^2}\left[\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{x^2_0}{a^2}-1\right]+\frac{x^2}{a^4}=\frac{1}{b^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}-\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}\right]+\frac{y^2}{b^4}$$
$$=-\frac{1}{c^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{3^2_0}{c^2}-1\right]+\frac{3^2}{c^4}$$

Ou bien :

$$\frac{1}{a^2}\left[\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]=\frac{1}{b^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]$$
$$=-\frac{1}{c^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-1\right]$$

Ou enfin, en égalant successivement les deux premières quantités à la troisième :

$$\frac{x_0^2}{a^2c^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{a^2c^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2c^2} - \frac{z_0^2}{b^2c^2} - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0$$

Le lieu demandé est l'intersection des deux hyperboloïdes à une nappe représentés par les deux équations précédentes. Leur intersection se projette sur le plan des xy suivant la courbe ayant pour équation

$$\frac{x_0^2}{a^2}\left[\frac{1}{b^2c^2} - \frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2c^2}\right] + \frac{y_0^2}{b^2}\left[\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} - \frac{1}{a^2c^2}\right] - \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} = 0$$

laquelle ne se réduit pas à deux droites, à moins que l'hyperboloïde donné ne soit de révolution. Le lieu est donc en général une courbe gauche du quatrième ordre, qui se décompose en deux hyperboles égales et également inclinées sur les plans Z_0x, Z_0y, quand l'hyperboloïde donné est de révolution.

Admettons maintenant que le coefficient de l'un des termes rectangles soit nul. Supposons par exemple $x_0 = 0$. Le point A est dans l'un des plans principaux de l'hyperboloïde donné. Deux rectangles sont alors nuls, et l'on doit avoir :

$$\left\{\frac{-1}{b^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} + 1\right) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)\right\}$$
$$\times\left\{-\frac{1}{c^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)\right\}$$
$$- \frac{y_0^2z_0^2}{b^4c^4} = 0.$$

Ce lieu est facile à discuter. Dans le cas où l'hyperboloïde donné serait de révolution, c'est-à-dire si $a = b$, ce lieu se décompose en deux droites confondues avec oz et une courbe du second degré.

La condition $y_0 = 0$ donnerait un résultat analogue.

Supposons maintenant $z_0 = 0$. On devra avoir en outre :

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - 1\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)\Big\}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2_0}{a^2} - \frac{y^2_0}{b^2} - 1\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - 1\right)\right\}$$

$$- \frac{x^2_0 y^2_0}{a^4 b^4} = 0.$$

Cette équation se discuterait facilement aussi. Elle ne donne pas deux droites et une courbe du second degré, comme les deux précédentes, quand l'hyperboloïde est de révolution.

THÉORÈME CONCERNANT UNE COURBE ALGÉBRIQUE

Par M. **Kœnigs**, élève de l'Ecole normale supérieure.

Soient $2p$ points A_1, A_1 ... A_{2p} dans un plan et A leur centre de gravité.

Désignons par Δ une droite telle que le produit des distances des $2p$ points à cette droite soit constant.

Cette condition imposée à la droite Δ fait qu'elle enveloppe une certaine courbe S, c'est-à-dire qu'elle est constamment tangente à cette courbe.

Prenons des axes rectangulaires quelconques, et soit $y = mx + n$ l'équation de la droite Δ ; soient aussi (x_1, y_1), (x_2, y_2) ... (x_{2p}, y_{2p}) les coordonnées des points A_1, A_2 ... A_{2p} ; la distance du point A_1 à la droite Δ est représentée par la quantité

$$\frac{y_1 - mx_1 - n}{\pm\sqrt{1 + m^2}},$$

de sorte qu'en faisant le produit des $2p$ expressions qui représentent les distances des $2p$ points à la droite Δ, et désignant par C une constante, nous aurons la condition :

$$\frac{(y_1 - mx_1 - n)(y_2 - mx_2 - n) \ldots (y_{2p} - mx_{2p} - n)}{(1 + m^2)^p} = \text{C}.$$

Si nous nous donnons la quantité n (ce qui revient à chercher les tangentes à la courbe S qui passent par un point B de l'axe oy), nous avons une équation du degré $2p$ pour déterminer la direction des tangentes. Comme les axes sont quelconques, le point B est quelconque, ce qui montre que par un point du plan on peut toujours mener à la

courbe S, $2p$ tangentes. On dira donc que la courbe S est de la *classe* $2p$. Au contraire nous donner m, c'est chercher les tangentes à la courbe S parallèles à la droite $y = mx$, or ces tangentes sont complètement déterminées par l'ordonnée à l'origine n, et l'équation est du degré $2p$ en n : ce qui montre que l'on peut mener $2p$ tangentes à la courbe S parallèlement à une direction donnée.

En rapprochant ce résultat du précédent, on pourrait facilement prévoir que la courbe S n'admet jamais de branche parabolique. Mais, sans insister sur ce point, j'arrive au théorème qui fait l'objet de cette note :

Considérons les tangentes parallèles à l'axe ox ; la direction de cet axe étant quelconque, je le répète, par rapport à la courbe S, nous ferons $m = 0$ dans l'équation (1) pour obtenir les valeurs des ordonnées à l'origine de ces tangentes : nous trouvons ainsi l'équation de degré $2p$

$$(y_1 - n)(y_2 - n) \ldots (y_{2p} - n) = C \qquad (2)$$

Appelons $n_1, n_2 \ldots n_{2p}$ les racines de cette équation, les $2p$ tangentes parallèles à ox auront pour équation $y - n_1 = 0$, $y - n_2 = 0 \ldots, y - n_{2p} = 0$. Cela posé, étant données $2p$ droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_{2p}$ parallèles, on sait que si on mène une sécante quelconque D les coupant aux points $P_1, P_2 \ldots P_{2p}$, le centre de gravité P de ces $2p$ points se meut, lorsque D varie arbitrairement, sur une droite Δ' parallèle aux droites $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{2p}$. Cette droite Δ' aura ici pour équation

$$y - \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_{2p}}{2p} = 0 ;$$

mais la somme des racines de l'équation (2) est visiblement $(y_1 + y_2 \ldots + y_{2p})$;
l'équation de la droite Δ' s'écrit donc :

$$y - \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{2p}}{2p} = 0.$$

Ceci montre qu'elle passe par le centre de gravité A des points $A_1 \ldots A_{2p}$.

De là ce théorème :

Toutes les tangentes à la courbe S *parallèles à une direction déterminent sur une sécante quelconque menée par le point fixe* A, 2p *points dont le point* A *est précisément le centre de gravité.*

On démontre du reste que toutes les tangentes à une courbe parallèles à une direction touchent la courbe en des points dont le centre de gravité C est fixe. Il est bien évident que ce centre de gravité doit se trouver sur la droite Δ', laquelle passe aussi par le point fixe A ; or deux points déterminent une droite et la droite Δ' peut avoir une direction quelconque : les points A et C coïncident donc. De là le théorème auquel je voulais arriver :

Ayant mené à la courbe S *les* 2p *tangentes parallèles à une direction arbitraire, le centre de gravité des* 2p *points de contact est le même que celui des points fixes* A_1, A_2 ... A_{2p} .

Ajoutons que les points A_1, A_2 ... A_{2p} jouent dans la courbe S un rôle analogue aux foyers dans les coniques : et de fait dans le cas de $p = 1$, on a pour la courbe S une conique dont A_1 et A_2 sont les foyers réels, et chacun sait que le centre de la conique est tout à la fois centre de gravité des points A_1 et A_2, et centre de gravité des points de contact de deux tangentes parallèles à une direction donnée.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UNE FORMULE D'ABEL

Par M. **Arnaud**, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Nice.

La formule qu'il s'agit de démontrer est la suivante :

$$(1) \quad (x + a)^m = x^m + \frac{m}{1} a (x + b)^{m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a (a - 2b)(x + 2b)^{m-2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} a (a - nb)^{n-1} (x + nb) + \ldots$$
$$+ ma [a - (m-1)b]^{m-2} [x + (m - b)b] + a (a - mb)^{m-1}$$

Cette formule est facile à vérifier pour les premières valeurs de m, 1, 2, 3,... Pour en démontrer la généralité, il suffit de prouver que si elle est vraie pour la valeur m de l'exposant, elle est aussi vraie pour la valeur $m + 1$).

Écrivons donc :

(2) $(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + \frac{m+1}{1} a (x+b)^m$

$+ \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} a(a-2b)(x+2b^{m-1} + \ldots$

$+ \frac{(m+1)m \ldots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \ldots n} a(a-nb)^{n-1}(x+nb)^{m-n+1}$

$+ (m+1)a[a-mb]^{m-1}(x+mb) + a[a-(m+1)b]^m$

Prenons les dérivées des deux membres, il vient

$(m+1)(x+a)^m = (m+1)x^m + \frac{(m+1)m}{1} a(x+b)^{m-1}$

$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2} a(a-2b)(x+2b)^{m-2}$

$+ \ldots \frac{(m+1)m \ldots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} a(a-nb)^{n-1}(x+nb)^{m-n}$

$+ \ldots + (m+1)a(a-mb)^{m-1}$.

Si l'on met en évidence le facteur $(m+1)$, on voit que le second membre n'est, d'après l'hypothèse de l'exactitude pour la valeur m de l'exposant, autre chose que $(m+1)$ $(x+a)^m$.

Les deux membres de l'égalité (2) ayant même dérivée ne peuvent différer que par une constante C.

Donc (3) $(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1)\ a(x+b)^m$

$+ \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} a(a-2b)(x+2b)^{m-1}$

$+ \ldots + (m+1)a(a-mb)^{m-1}(x+mb)$

$+ a[a-(m+1)b]^m + C.$

Il faut montrer que cette quantité constante C est nulle.

Or la formule (3) étant vraie, quel que soit x, est vraie pour $x = -(m+1)b$. Alors les équations (1) et 3 deviennent

$$\Big[a-(m+1)b\Big]^m = (-1)^m \Big[(m+1)^m b^m - \frac{m^m}{1} ab^{m-1}$$

$$+ \frac{m}{1 \cdot 2}(m-1)^{m-1} a(a-2b) b^{m-2}$$

$$- \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-2)^{m-2} a(a-3b)^2 b^{m-3} + \ldots \Big];$$

$[a-(m+1)b]^{m+1} = (-1)^{m+1}[(m+1)^{m+1} b^{m-1}$

$$-\frac{m+1}{1}m^m ab_m + \frac{(m+1)^m}{1.2}(m-1)^{m-1}a(a-2b)b^{m+1}$$
$$\ldots + (m+1)a(a-mb)^{m-1}b + a[a-(m+1)b]_m + C$$

multiplions la première équation par $(m+1)\,b$ et ajoutons le résultat à la deuxième; comme $(-1)^m$ et $(-1)^{m+1}$ sont de signes différents, tous les termes des deuxièmes membres se détruisent, sauf $a(a-(m+1)\,b)^m$ et C; il vient donc

$$(m+1)\,b\,[a-(m+1)\,b]^m + [a-(m+1)\,b]^{m+1}$$
$$= a\,[a-(m+1)\,b]^m + C;$$

d'où $a[a-(m+1)\,b]^m = a\,(a-(m+1)\,b)^m + C$;

ou bien $C = 0.$

Donc la formule est générale.

Si dans cette formule on fait $b = 0$, on retombe sur la formule du binôme.

VARIÉTÉS

UNIVERSITÉ DE TOKIO (JAPON)

Les lecteurs du *Journal de mathématiques* ne liront pas sans intérêt les questions d'examen et les sujets de composition proposés aux étudiants de l'Université de Tokio. Les renseignements suivants ont été pris dans l'Annuaire de cette Université pour l'année classique 2539-40 (1879-80).

L'Université de Tokio se divise en trois départements: celui du droit, celui des sciences, celui de la littérature.

Le département des sciences renferme 14 professeurs :

Robert-William Atkinson, *Chimie analytique et appliquée;*
Gustave-Félix Berson, agrégé des sciences physiques, *Physique et mécanique;*
Frank Jewett, *Chimie générale et analytique;*
Winfield Chaplin, *Science de l'ingénieur civil;*
Dairoku Kikuchi, *Mathématiques pures et appliquées;*
Riokichi Yatabe, *Botanique;*
Curt Netto, *Mines et métallurgie;*
Alexandre Dybowski, agrégé des sciences physiques, *Physique, mécanique, mathématiques;*
James-Alfred Ewing, *Mécanique appliquée;*
Thomas Mendenhald, *Physique expérimentale;*
Iwawo Imai, *Métallurgie;*
Kenjiro Yamagawa, *Physique;*
Charles Whitman, *Zoologie et physiologie;*
David Brauns, *Géologie, minéralogie, paléontologie;*

Un professeur extraordinaire:
KEISUKE ITO, *Botanique ;*
Un lecteur:
John SMEDLEY, *Architecture ;*
Trois professeurs assistants:
MONITARO KOGA, *Physique ;*
GIRO YAMAOKA, *Chimie ;*
AYATO TAGA, *Machines.*

Le nombre des élèves qui fréquentent les divers cours est donné par le tableau suivant :

Chimie	18
Mathématiques, physique et astronomie	4
Biologie	4
Science de l'ingénieur	20
Géologie, mines	27
Première année de sciences	42
Physique (cours en français)	9

Questions d'examens données à l'Université de Tokio (Japon), pendant l'année classique 2539-40 (1879-1880).

Calcul infinitésimal.

— Trouver les conditions pour qu'une fonction d'une seule variable soit maxima ou minima. Trouver le maximum ou le minimum de la fonction

$$u = m \sin(x - a) \cos x.$$

— Déterminer les dimensions du cylindre de moindre surface et de volume donné.

Prouver que si $$y^3 + x^3 - 3axy = 0,$$
la fonction y est maxima lorsque $x = a\sqrt[3]{2}$ et minima quand $x = 0$.

— Trouver la valeur maximum de

$$u = al + bm + cn,$$

l, m, n étant liés par l'équation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

— Une courbe a pour équation $y^m = a^{m-1}x$.
Trouver l'équation de la tangente au point (x, y), la longueur de la sous-tangente, de la sous-normale et celle de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente.

— Donner une méthode pour trouver les asymptotes à une courbe donnée. Trouver les asymptotes rectilignes de la courbe

$$y^4 - x^4 + 2bx^2y = 0.$$

— Comment trouve-t-on les points doubles d'une courbe et les tangentes aux points doubles. Distinguer les divers genres de points doubles.

— Trouver les points singuliers de la courbe

$$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y - 2a^2x^2 + a^4 = 0.$$

— Trouver le centre et le rayon de courbure pour un point (x, y) de la courbe $y = f(x)$.

— Définir un point d'inflexion et dire comment on trouve le point d'inflexion d'une courbe donnée en coordonnées polaires.

Composition en calcul intégral.

— Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$x^3dy - x^2ydx + y^3dx - xy^2dy = 0.$$

— Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{y}\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y^2}.$$

— Étant donnés deux points fixes dans un plan, trouver dans ce plan une courbe telle que le produit des distances de ces deux points à chacune des tangentes à la courbe ait une valeur constante.

Composition en calcul différentiel.

— Décomposer en fractions simples la fraction suivante

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)(x^2+1)}.$$

— Trouver la somme des quatrièmes puissances des racines de l'équation du troisième degré $x^3 - 3x + 1 = 0$.

— Trouver l'équation différentielle des projections des lignes de courbure d'une surface sur le plan des xy.

Géométrie analytique.

— Équation d'une ligne droite passant par deux points. Coordonnées du point de rencontre de la droite qui joint les points (a, o), (o, b) avec la droite qui joint les points (b, o), (o, a).

— Trouver l'angle de deux droites

$$Ax + By + C = 0 \qquad A'x + B'y + C' = 0.$$

— Prouver que les diagonales d'un losange se coupent à angle droit.

— Trouver l'aire d'un triangle connaissant les sommets par leurs coordonnées; en déduire la condition pour que trois points donnés soient en ligne droite.

— Quelle est la condition pour que l'équation générale du second degré représente deux lignes droites? Examiner si l'équation

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

remplit cette condition.

— Trouver l'équation du cercle rapporté à un système d'axes rectangulaires.

— Prouver analytiquement que si deux cercles se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire à la corde commune.

— Etant donné le cercle $x^2 + y^2 = r^2$, discuter la nature de la ligne $xx' + yy' = r^2$, les coordonnées $x'y'$ étant celles d'un point du cercle.

— Prouver analytiquement que si par un point extérieur on mène à un cercle une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

— Trouver l'équation de la tangente et de la normale à une ellipse au point (x',y').

— Prouver analytiquement que la tangente est également inclinée sur les rayons vecteurs focaux.

— Prouver que la directrice est la polaire du foyer et aussi que toute corde focale est perpendiculaire à la ligne qui joint son pôle au foyer.

— Prouver qu'il y a un rapport constant entre les distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer et à la directrice.

— Trouver l'équation d'une conique à centre en coordonnées polaires, en prenant le foyer comme pôle. Les demi-axes d'une ellipse sont 5 et 3, trouver son équation polaire.

— L'équation d'une conique est

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Prouver que les deux lignes droites

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

sont parallèles aux asymptotes.

— Trouver les conditions pour que l'équation générale du second degré représente une ellipse, une hyperbole, une parabole.

— Prouver que l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$$

représente une parabole tangente aux axes.

— L'extrémité d'un diamètre est (x', y'), trouver les coordonnées (x'', y'') des extrémités du diamètre conjugué.

— On mène les normales à une ellipse par les extrémités de deux diamètres conjugués. Prouver que le lieu des points d'intersection est la courbe

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^2x^2 - b^2y^2)^2.$$

— Trouver l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes comme axes.

— Prouver que le rectangle des distances focales d'un point est égal au carré du demi-diamètre conjugué de celui qui correspond à ce point.

— Prouver que le lieu des points d'intersection de deux tangentes à une parabole perpendiculaires l'une sur l'autre est la podaire du foyer.

— Trouver la podaire du foyer.

— Lieu des milieux d'un système de cordes parallèles dans une parabole.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 17010-0.

PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE

Par M. Maurice d'Ocagne

Nous nous proposons dans cet article de présenter des démonstrations élémentaires de quelques théorèmes donnés par M. Mannheim, dans son cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique.

CONVENTIONS. — Nous emploierons les notations suivantes adoptées par M. Mannheim.

Un point sera représenté par une lettre minuscule.

Une courbe par une majuscule.

La trajectoire d'un point, c'est-à-dire la courbe que décrit ce point dans son déplacement, sera représentée par la lettre qui désigne ce point mise entre parenthèses; le point a se meut sur la courbe (a).

Enfin nous représenterons par $d(a)$ un déplacement infiniment petit du point a sur sa trajectoire (a).

Ces conventions une fois faites, passons aux principes.

PRINCIPE I. — *Une droite mobile se déplace dans un plan en restant parallèle à une direction fixe donnée. Dans une de ses positions elle rencontre en* a *et* b *deux courbes fixes* (a) *et* (b). *Les tangentes à ces courbes respectivement en* a *et* b *se coupent en* t. *On a, pour un déplacement infiniment petit de la droite mobile,*

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at}{bt} \quad (fig.\ 1).$$

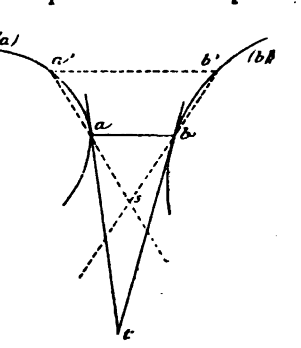


Fig. 1.

Considérons une position $a'b'$ de la droite mobile, infiniment voisine de ab. Les droites aa' et bb' se coupent en s, ab et $a'b'$ étant parallèles, on a

$$\frac{aa'}{bb'} = \frac{sa}{sb}.$$

Cette relation, toujours vraie à mesure que $a'b'$ se rapproche de ab, a encore lieu à la limite; mais, à la limite, les cordes aa' et bb' se confondent avec les arcs correspondants: de plus le point s vient coïncider avec le point t et on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at}{bt}.$$

Principe II. — *Une droite mobile se déplace dans un plan en enveloppant une courbe donnée* E. *Dans une de ses positions, elle touche son enveloppe en* e *et rencontre en* a *et* b *deux courbes fixes* (a) *et* (b). *Les tangentes à ces courbes respectivement en* a *et* b *se coupent en* t. *On a, pour un déplacement infiniment petit de la droite mobile,* $\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ac \cdot at}{be \cdot bt}$ *(fig. 2).*

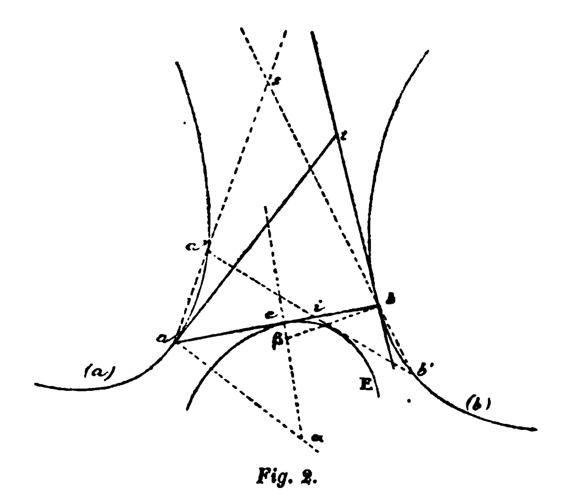


Fig. 2.

Considérons une position $a'b'$ de la droite mobile, infiniment voisine de ab. Les droites aa' et bb' se coupent en s, ab et $a'b'$ en i. On a

$$\frac{\text{surf. } sa'b'}{\text{surf. } b'ib} = \frac{sb' \cdot a'b'}{bb' \cdot ib'}$$

$$\frac{\text{surf. } sab}{\text{surf. } aia'} = \frac{sa \cdot ab}{aa' \cdot ia}$$

Divisant ces deux égalités membre à membre,

$$\frac{\text{surf. } sa'b' \times \text{surf. } aia'}{\text{surf. } b'ib \times \text{surf. } sab} = \frac{sb' \,.\, a'b' \,.\, aa' \,.\, ia}{bb' \,.\, ib \,.\, sa \,.\, ab}.$$

Mais
$$\frac{\text{surf. } sa'b'}{\text{surf. } sab} = \frac{sa' \,.\, sb'}{sa \,.\, sb}$$

$$\frac{\text{surf. } aia'}{\text{surf. } bib'} = \frac{ia \,.\, ia'}{ib \,.\, ib'}$$

L'égalité précédente se transforme donc en celle-ci :

$$\frac{sa' \,.\, sb' \,.\, ia \,.\, ia'}{sa \,.\, sb \,.\, ib \,.\, ib'} = \frac{sb' \,.\, a'b' \,.\, aa' \,.\, ia}{bb' \,.\, ib' \,.\, sa \,.\, db},$$

d'où
$$\frac{aa'}{bb'} = \frac{a'i \,.\, a's \,.\, ab}{bi \,.\, bs \,.\, a'b'}.$$

A la limite, lorsque les points a' et b' viennent coïncider avec les points a et b, les cordes aa' et bb' se confondent avec les arcs correspondants ; de plus, les points i et s viennent respectivement coïncider avec les points e et t ; on a donc

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae \,.\, at}{be \,.\, bt},$$

puisque $ab = a'b'$, à la limite.

Principe III. (Transformation du théorème précédent). — Les mêmes hypothèses étant faites que pour le principe II, *si la normale à la courbe* E *au point* e *coupe respectivement en* α *et en* β *les normales aux courbes* (a) *et* (b) *aux points* a *et* b, *on a* $\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{a\alpha}{b\beta}$ *(fig. 2).*

On a, en effet, $ae = a\alpha \,.\, \sin a\alpha e$, $be = b\beta \,.\, \sin b\beta e$;

Donc
$$\frac{ae}{be} = \frac{a\alpha \,.\, \sin a\alpha e}{b\beta \,.\, \sin b\beta e}$$

Mais les angles $a\alpha e$ et eat sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; de même pour les angles $b\beta e$ et ebt.

Par suite
$$\frac{ae}{be} = \frac{a\alpha \,.\, \sin eat}{b\beta \,.\, \sin ebt}$$

ou, comme
$$\frac{\sin eat}{\sin ebt} = \frac{bt}{at},$$

$$\frac{ae}{be} = \frac{a\alpha \,.\, bt}{b\beta \,.\, at}.$$

c'est-à-dire $$\frac{a\alpha}{b\beta} = \frac{ae \,.\, at}{be \,.\, bt} = \frac{d(a)}{d(b)}.$$

REMARQUE. — Ce qui vient d'être dit s'applique au déplacement d'une droite pivotant autour d'un point fixe, en remarquant que la normale à la courbe enveloppe est la perpendiculaire à la droite mobile au point où elle touche son enveloppe, c'est-à-dire, dans ce cas, au point fixe.

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE DE FORME VARIABLE DANS UN PLAN

Les deux problèmes généraux du déplacement d'une figure de forme variable dans un plan, sont les suivants :

1° m *points* a_1, a_2, ... a_{m-1}, a_m *sont astreints à se mouvoir respectivement sur* m *courbes* (a_1), (a_2), ... (a_{m-1}), (a_m) *données dans un plan.* m — 1 *des droites qui joignent chacun de ces points au suivant doivent envelopper des courbes* E_1, E_2, ..., E_{m-1} *données dans ce plan. Trouver l'enveloppe* E_m *de la* m^e^ *de ces droites.*

2° m *droites sont astreintes à envelopper respectivement* m *courbes* E_1, E_2, ... E_m *données dans un plan.* m — 1 *des points de rencontre de ces droites prises deux à deux doivent décrire des courbes* (a_1), (a_2), ... (a_{m-1}) *données dans ce plan. Trouver la trajectoire* (a_m) *du* m^e^ *de ces points.*

Le premier de ces problèmes consiste à trouver, pour une position quelconque de la figure mobile, le point où la m^e droite touche son enveloppe, et le second à trouver la tangente, ou ce qui revient au même la normale à la courbe que décrit le m^e point.

La solution de ces deux problèmes nous sera fournie par la relation que nous allons établir entre les divers éléments de la figure mobile.

Considérons une position quelconque de la figure mobile (*fig. 3*). La normale à la courbe E_1, enveloppe de a_1a_2, au point e_1 coupe en α_1 la normale à la courbe (a_1) au point a_1 et en β_2 la normale à la courbe (a_2) au point a_2 ; la normale à la courbe E_2, enveloppe de a_2a_3, au point e_2 coupe en α_2 la normale à la courbe (a_2) au point a_2 et en β_3 la normale à la courbe (a_3) au point a_3 ; et ainsi de suite.

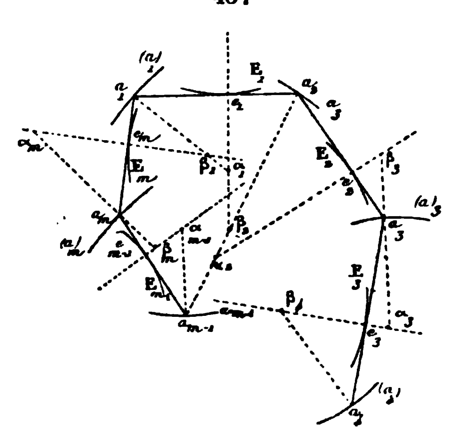


Fig. 3.

En vertu du principe III, et, conformément aux conventions faites, nous avons

$$\frac{d(a_1)}{d(a_2)} = \frac{a_1\alpha_1}{a_2\beta_2}$$

$$\frac{d(a_2)}{d(a_3)} = \frac{a_2\sigma_2}{a_3\beta_3}$$

$$\frac{d(a_3)}{d(a_4)} = \frac{a_3\alpha_3}{a_4\beta_4}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d(a_m - {}_1)}{d(a_m)} = \frac{a_m - {}_1\alpha_m - {}_1}{a^m\beta_m}$$

$$\frac{d(a_m)}{d(a_1)} = \frac{a_m\alpha_m}{a_1\beta_1}$$

Faisons le produit de toutes ces égalités, membre à membre; il vient

$$1 = \frac{a_1\alpha_1 \,.\, a_2\alpha_2 \,.\, a_3\alpha_3 \ldots a_m - {}_1\alpha_m - {}_1 \,.\, a_m\alpha_m}{a_2\beta_2 \,.\, a^3\beta_3 \,.\, a_4\beta_4 \ldots a_m\beta_m \,.\, a_1\beta_1}.$$

Dans le premier des problèmes énoncés plus haut, l'inconnue est le point e_m. De la relation générale qui vient d'être établie, on tire la valeur de $\frac{a_m\alpha_m}{a_1\beta_1}$ en fonction de quantités données immédiatement par la figure. Soit $\frac{p}{q}$ la valeur de ce rapport. D'après ce que nous avons vu aux prin-

cipes, si t est le point de rencontre des tangentes aux courbes (a_1) et (a_m) aux points a_1 et a_m, on a

$$\frac{a_m e_m \,.\, a_m t}{a_1 e_m \,.\, a_1 t} = \frac{a_m \alpha_m}{a_1 \beta_1} = \frac{p}{q},$$

ou

$$\frac{a_m e_m}{a_1 e_m} = \frac{p \,.\, a_1 t}{q \,.\, a_m t},$$

d'où la détermination du point e.

Dans le second problème, l'inconnue est la normale $\alpha_m a_m \beta_m$. De la relation générale qui vient d'être établie, on tire la valeur du rapport $\frac{a_m \alpha_m}{a_m \beta_m}$ en fonction de quantités obtenues immédiatement sur la figure. On n'a plus alors qu'à mener par le point a_m une droite dont le segment terminé aux normales $e_{m-1}\alpha_{m-1}$ et $e_m \alpha_m$ soit divisé au point a_m dans le rapport déterminé, problème bien simple et bien connu.

Voilà donc la solution des deux cas du problème général du déplacement plan d'une figure de forme variable.

Dans les applications que l'on a à faire de cette question fondamentale, la solution se simplifie par suite des conditions particulières où l'on se trouve placé. D'ailleurs on ne considère, en général, que des déplacements de triangle variable.

Remarque. — Considérons les droites ab et ac qui se coupent au point a (*); soient (a), (b) et (c) les trajectoires des points a, b et c. Supposons que *les normales* eα *et* hα *aux enveloppes de* ab *et* ac *aux points* e *et* h *où ces droites touchent leurs enveloppes se coupent en* α *sur la normale* aα *à la courbe* (a) *au point* a. Soient de plus β le point de rencontre de $e\alpha$ et de la normale $b\beta$ à la courbe (b) au point b, γ le point de rencontre de $h\alpha$ et de la normale $c\gamma$ à la courbe (c) au point c.

Nous avons $\frac{d(b)}{d(a)} = \frac{b\beta}{a\alpha}$ et $\frac{d(a)}{d(c)} = \frac{a\alpha}{c\gamma}$.

Multiplions ces deux égalités membre à membre; il vient

$$\frac{d(b)}{d(c)} = \frac{b\beta}{c\gamma}$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

ANGLE PIVOTANT AUTOUR DE SON SOMMET

Un angle bac *pivote autour de son sommet* a. *Les côtés* ab *et* ac *coupent respectivement en* b *et en* c *les courbes fixes* (b) *et* (c). *Déterminer la relation qui lie les déplacements des points* b *et* c (*).

Quoiqu'on connaisse les trajectoires (*b*) et (*c*) des points *b* et *c*, la trajectoire du point *a*, puisque ce point est fixe, et les enveloppes de *ab* et de *ac*, puisque ces droites pivotent autour du point *a*, il faut une condition de plus (supposer par exemple, comme nous le faisons, que l'angle *bac* a une grandeur constante) : car, sans cela, la figure, dans chacune de ses positions, serait indéterminée.

Cela posé, les normales aux enveloppes de *ab* et de *ac* sont les perpendiculaires $a\beta$ et $a\gamma$ menées de *a* respectivement à *ab* et *ac*. On se trouve donc dans le cas de la remarque précédente et on a, d'après cette remarque,

$$\frac{d(b)}{d(c)} = \frac{b\beta}{c\gamma}.$$

Un exemple très simple va faire comprendre comment on applique cette règle.

Un triangle rectangle variable abc *se déplace dans un plan. Le sommet* a *de l'angle droit est fixe ; le sommet* b *se meut sur une circonférence et l'hypoténuse* bc *tourne autour du centre* o *de*

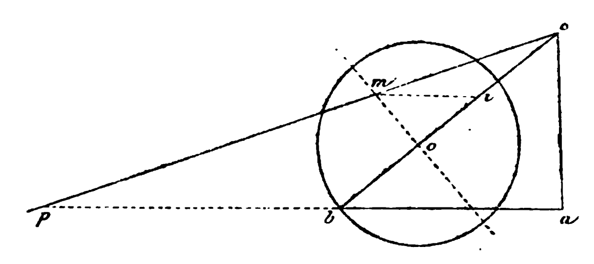


Fig. 4.

cette circonférence. Construire la normale à la trajectoire du point c *(fig. 4).*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Soit p le point où la normale cherchée rencontre le côté ab. Le sommet a étant fixe et l'angle bac constant, appliquons la relation précédente.

Comme, dans ce cas, les perpendiculaires à ab et à ac au point a se confondent avec ac et ab, cette relation donne

$$\frac{d(b)}{d(c)} = \frac{bc}{cp}.$$

La normale à la trajectoire de b étant bo, si nous élevons à bc la perpendiculaire om qui coupe cp en m, nous avons, d'après le principe III, $\frac{d(b)}{d(c)} = \frac{bo}{cm}$;

donc $$\frac{bc}{cp} = \frac{bo}{cm};$$

d'où la construction :

Je porte la longueur ci = ob ; *par le point* i *je mène parallèlement à* ab im *qui coupe en* m *la perpendiculaire* om *à* bc*;* cm *est la normale cherchée.*

En effet, $$\frac{bc}{cp} = \frac{ci}{cm} = \frac{bo}{cm}.$$

SUR LES APPLICATIONS DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS

En se basant sur les principes que nous venons d'étudier, on voit que si l'on connaît les enveloppes des côtés d'un polygone variable et les trajectoires de tous ses sommets moins un, on pourra déterminer la normale et, par suite, la tangente à la trajectoire de ce dernier sommet.

Or, pour un très grand nombre de courbes, on connaît des modes de génération géométrique simples, par le déplacement d'un point d'une figure variable; il en résultera, par application des principes en question, des procédés de construction des tangentes à ces courbes.

On sait aussi que le centre de courbure relatif à un point d'une courbe quelconque, est le point où la normale à cette courbe au point considéré touche son enveloppe. Si donc on a reconnu qu'une certaine droite d'une figure variable se déplace en restant normale à une courbe quelconque, on en déduit un procédé de construction du centre de courbure à cette courbe.

Pour plus de détails sur ce sujet je renverrai à mon article: *Applications de géométrie cinématique plane*, publié dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, où je fais précisément usage des principes auxquels se rapporte le présent travail.

Je me contenterai, pour terminer, de donner une démonstration nouvelle d'un théorème que j'ai fait connaître dans mon *Etude sur l'antibissectrice* (*):

Si une droite aa' *se déplace en détachant sur une courbe quelconque* (a) *un arc de grandeur constante, le point où cette droite touche son enveloppe est le pied de l'antibissectrice relative à* aa' *du triangle fermé par cette droite et par les tangentes à la courbe* (a) *aux points* a *et* a'.

Si ces tangentes se coupent en t et si e est le point où aa' touche son enveloppe, on a, d'après le principe II,

$$\frac{d(a)}{d(a')} = \frac{ae \,.\, at}{a'e \,.\, a't}.$$

Mais, d'après l'hypothèse faite,

$$d(a) = d(a').$$

Donc,

$$\frac{ae \,.\, at}{a'e \,.\, a't} = 1$$

ou

$$ae \,.\, at = a'e \,.\, a't,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

INÉGALITÉ DES JOURS ET DES NUITS

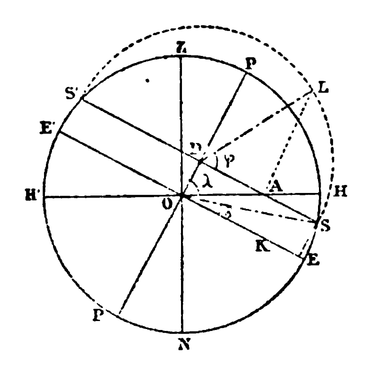
Le soleil possède un mouvement propre sur l'écliptique; en outre, il participe au mouvement diurne apparent de la sphère céleste. On peut donc admettre que dans une journée il décrit un des parallèles de cette sphère.

Ceci posé, nous dirons qu'il fait jour quand le soleil est au-dessus de l'horizon, qu'il fait nuit quand il est au-dessous. Nous nous proposons ici de chercher les conditions qui font varier la durée du jour et celle de la nuit. On sait

(*) *Journ. de Math. spéc. et élém.* t. IV (Mars 1880).

que la somme de ces deux périodes est constante et égale à vingt-quatre heures : il suffira donc de déterminer l'une d'entre elles.

Prenons pour plan du tableau le plan du méridien du lieu considéré. Soient HH' l'horizon, PP' la ligne des pôles, SS' le parallèle décrit par le soleil le jour considéré. Ce cercle rencontre le plan de l'horizon suivant une droite qui se projette tout entière en A.



Cette droite partage la circonférence du parallèle décrit par le soleil SS' en deux arcs qui se projettent l'un suivant AS, l'autre suivant AS'; le premier est au-dessous de l'horizon et correspond à la nuit ; le second est au-dessus de l'horizon et correspond au jour.

Le mouvement étant uniforme, la durée de la nuit est proportionnelle à l'arc AS, celle du jour proportionnelle à l'arc AS' ; nous allons chercher à déterminer la valeur de l'arc qui se projette suivant AS au moyen de ses lignes trigonométriques.

Remarquons d'abord que tant que le point A n'est pas au centre du cercle SS', les deux arcs sont inégaux. Pour un point situé dans l'hémisphère boréal le jour est donc plus grand que la nuit, tant que la déclinaison du soleil est boréale, c'est-à-dire dans l'intervalle qui s'écoule entre le 21 mars et le 21 septembre.

Cela posé, rabattons le cercle SS' autour de son diamètre, la perpendiculaire au diamètre se rabat alors suivant AL. Si on joint le point D au point L, l'angle LDS a pour mesure le demi-arc nocturne ; il nous suffira donc de connaître cet angle pour en déduire la durée de la nuit.

Le triangle rectangle LDA donne $DA = DL \cos \varphi$.

D'autre part l'angle POH = l'angle λ qui mesure la latitude du lieu ; du triangle rectangle DOA on tire $DA = DO \operatorname{tg} \lambda$.

On en tire DL $\cos \varphi = \text{DO} \operatorname{tg} \lambda$.

Si K est le pied de la perpendiculaire menée de S sur le diamètre EE', on a DL = DS = OK.

Mais l'arc SE = déclinaison du soleil = δ, d'où en supposant le rayon de la sphère céleste égal à l'unité, $\text{OK} = \cos \delta$.

$$\text{DO} = \text{SK} = \sin \delta.$$

En remplaçant DL et DO par leurs valeurs respectives, on a

$$\cos \delta \cos \varphi = \sin \delta \operatorname{tg} \lambda$$

$$\cos \varphi = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \lambda$$

Ce qui nous montre que la valeur de φ dépend exclusivement de la latitude du lieu et de la déclinaison du soleil.

Discussion de la formule

$$\cos \varphi = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \lambda.$$

Pour que l'angle φ existe, il faut que son cosinus soit moindre que l'unité, ce qui exige $\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \lambda < 1$, et comme les angles δ et λ sont essentiellement aigus, il faut que l'on ait
$$\delta + \lambda < 90^\circ.$$

Or δ est inférieur à 23°30', son complément est supérieur à 66°30'.

Si donc on prend d'abord un lieu dont la latitude est inférieure à 66°30', c'est-à-dire un lieu de la zone tempérée, on a
$$\delta + \lambda < 90^\circ.$$

Donc l'angle φ existe toujours, c'est-à-dire que dans une période de vingt-quatre heures on est assuré que le soleil descendra au-dessous de l'horizon.

Si au contraire on prend un point de la zone glaciale dont la latitude est supérieure à 66°30', il arrivera un moment où le soleil viendra toucher l'horizon lorsque $\delta + \lambda = 90^\circ$.

Si à partir de ce moment la déclinaison du soleil augmente encore, l'astre ne redescendra pas au-dessous de l'horizon.

Dès lors depuis le moment où il a rasé l'horizon, jusqu'à ce qu'en redescendant vers l'équateur il reprenne la même déclinaison, il se passera un nombre de jours plus ou moins considérable, pendant lequel le soleil ne disparaît pas au-dessous de l'horizon. En particulier pour le pôle, le soleil restera six mois au-dessus de l'horizon.

Considérons ce qui se passe en un même lieu de la terre,

à Paris par exemple. Lorsque la déclinaison varie, l'angle φ varie, et puisque d'une part un angle aigu et sa tangente varient dans le même sens, que d'autre part un angle aigu et son cosinus varient en sens contraire, on voit que l'angle φ est d'autant plus petit que δ est plus grand.

Par conséquent la durée de la nuit décroît, et par suite la durée du jour croît de l'équinoxe de printemps au solstice d'été, dans nos climats du 21 mars au 21 juin.

Il est à remarquer que si l'on prenait un point de l'hémisphère austral, ce que nous avons dit de la nuit, s'appliquerait au jour, c'est-à-dire que lorsqu'il fait nuit à Paris, il fait jour dans l'autre hémisphère et inversement. On verrait en faisant un raisonnement analogue lorsque la déclinaison devient australe, que si cette déclinaison croît, le jour diminue; c'est pourquoi le jour, devenant inférieur à la nuit depuis le 21 septembre, décroît jusqu'au 21 décembre pour recroître ensuite jusqu'au 21 mars. A. M.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR EN 1880

Lorsqu'un nombre est terminé par 5, son carré est terminé par 25; le carré peut-il être terminé par 125?

— Dans un cercle on mène une corde égale au rayon; on joint les extrémités de cette corde au milieu du plus grand arc qu'elle détermine sur la circonférence. Calculer les cordes ainsi obtenues.

— On donne un triangle ABC. Trouver sur le côté AB un point M tel que, en menant MN parallèle à BC, et MP perpendiculaire à BC, la surface du trapèze rectangle MNCP soit une fraction donnée de la surface du triangle ABC. Pour la discussion on prendra le cas particulier où le triangle ABC est isoscèle.

— On donne un angle A égal à 45 degrés. On demande de mener deux perpendiculaires BC et DE au côté AE de façon que le trapèze BCED ait une surface donnée et un périmètre aussi donné.

— On prend un demi-cercle AB, on mène le rayon OD perpendiculaire au diamètre AB; mener une sécante AC telle que le quadrilatère OHCB, formé par le rayon OB, la corde BC, la sécante AC et le rayon OD soit circonscriptible.

— On a un triangle isoscèle ABC, et la hauteur AH. Au point O, situé au tiers de AH à partir du sommet, passe un axe horizontal, situé dans le plan du triangle. On demande quelle force il faudra appliquer au point A pour que e triangle, sollicité par cette force et par son poids P, reste horizontal.

— Etant donné un angle BAC de 60 degrés, mener deux perpendiculaires à

la bissectrice, de façon que le trapèze formé par ces deux perpendiculaires et les côtés de l'angle ait une surface et un périmètre donnés.

— Trouver les dénominateurs des fractions irréductibles donnant lieu à une fraction périodique mixte ayant un chiffre à la partie irrégulière et un chiffre à la période.

— Soit la projection géométrique à n termes

$$a\ b\ c\ d\ \ldots\ f\ g\ h\ l$$

on multiplie chaque terme par le suivant. Trouver la somme des résultats ainsi obtenus.

— Dans un triangle, on connaît A, et on a la relation

$$\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2;$$

calculer les angles B et C.

— Dans un triangle, on connaît A, et l'on a la relation $\sin B \sin C = m$; calculer les deux angles B et C.

— Inscrire dans un demi-cercle un rectangle de périmètre donné.

— On donne un demi-cercle de diamètre AB et un point P sur ce diamètre AB; par ce point, on mène une droite PD faisant un angle α avec le diamètre et rencontrant la circonférence en D; on mène la tangente en D à la circonférence jusqu'à sa rencontre en E avec le diamètre AB; calculer DE en fonction des données.

— Étant donnée la fraction $\frac{8}{21}$, on demande de la réduire en fractions ayant pour dénominateur des puissances successives de 12; chercher quelles particularités présentera la transformation.

— On donne un secteur AOB, d'angle α, et sa corde AB; mener une parallèle à OA de telle sorte qu'elle soit partagée en deux parties égales par le rayon OB, la corde AB et l'arc.

— On donne un demi-cercle AB; trouver sur le cercle un point C tel que, si l'on mène CA et CB et la perpendiculaire CP sur le diamètre, on ait

$$AC + BC = n\ .\ CP.$$

— Dans une circonférence on prend deux rayons rectangulaires OA et OB en A se trouve une lumière d'intensité 2; en B, une lumière d'intensité 1 trouver les points également éclairés : 1° sur la circonférence; 2° sur chacun des deux diamètres A et B.

— On donne un cercle O, de rayon R, et le diamètre AOB; on mène par A un rayon lumineux faisant avec AB un angle α; ce rayon se réfléchit en C et vient rencontrer le diamètre AOB au point D; calculer OD et discuter lorsque α varie.

— Trouver le nombre de deux chiffres qui admet le plus grand nombre de diviseurs.

— On a un cercle et le carré circonscrit; on construit un cercle tangent à deux côtés et à la circonférence; calculer à un millième près le rapport de a surface de ce cercle à celle du cercle donné.

— Dans un triangle on connaît l'angle A, et l'on sait que l'on a $b^2 - c^2 = S$; calculer les angles B et C.

— Maximum ou minimum de $3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cotg} x$.

— Dans la recherche du p. g. c. d. de deux nombres, peut-il arriver que, en multipliant l'un des nombres seulement par m, le p. g. c. d. soit multiplié par m.

— Maximum ou minimum de $3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{cotg}^2 x$.

— Dans un triangle rectangle on connaît le périmètre et la surface; calculer les angles.

— On donne un cercle, un point A sur ce cercle et un point B extérieur dans le plan; trouver le rayon d'un cercle tangent en A au cercle donné et passant par le point B. Discuter.

— On donne un angle AOC $= \alpha$; sur l'un des côtés, on prend OA $= a$, AB $= 2a$; trouver sur OC un point M tel que de ce point on voie les deux segments OA et AB sous des angles égaux. Discuter.

— On donne un angle, et un point P dans son intérieur; déterminer sur le côté OB un point M tel que, si l'on abaisse la perpendiculaire MI sur OA, et que l'on mène MP, on ait MP $= 2$MI.

— On donne une demi-circonférence, et le rayon OE, perpendiculaire au diamètre; mener par le point A une sécante coupant en E le rayon, et en D la circonférence, de façon que ED ait une longueur donnée m.

— Résoudre l'équation

$$x^2 - 2ax \cos \alpha + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0.$$

— On donne une demi-circonférence; trouver sur la courbe un point M tel que si l'on abaisse de ce point la perpendiculaire MI sur le diamètre AB, on ait MI $=$ AI $-$ BI.

— Un cercle est tangent à deux droites rectangulaires fixes; trouver sur la circonférence un point tel que la somme des distances aux droites données ait une valeur déterminée.

— On donne un angle α, un point P sur un de ses côtés; déterminer sur l'autre côté un point M tel que, si on abaisse la perpendiculaire MQ sur le premier côté, on ait $MQ^2 + PQ^2 = K^2$.

— Etant donnés les nombres 12, 20 et 35, peuvent-ils faire partie d'une même progression arithmétique ou géométrique?

— On a un triangle dont les angles sont en progression arithmétique. Trouver une relation entre les deux côtés?

— Dans une ellipse, on demande de calculer le rayon vecteur en fonction de l'angle α qu'il fait avec le grand axe. Si l'on mène deux rayons vecteurs rectangulaires par un même foyer, déterminer l'angle α que fait l'un d'eux avec le grand axe de façon que le triangle rectangle intercepté ait une surface maxima.

— Conditions pour que le polynôme $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ soit décomposable en un produit de deux facteurs du premier degré.

SOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS

POSÉES AUX EXAMENS DE SAINT-CYR.

Nous donnons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les questions les plus intéressantes que nous avons entendu poser aux examens oraux de Saint-Cyr; mais, en outre, nous croyons utile d'indiquer la solution de quelques-unes de ces questions, qui nous ont paru présenter un certain degré de difficulté. Nous espérons rendre ainsi service à ceux de nos lecteurs qui se préparent à l'École militaire.

1. — *On prend un demi-cercle* AB; *on mène le rayon* OD *perpendiculaire au diamètre* AB; *mener une sécante* AC *rencontrant en* H *le rayon* OD *de telle sorte que si l'on joint le point* C *au point* B, *le quadrilatère* OHCB *soit circonscriptible.*

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Nous prendrons pour inconnue l'angle CAB que fait la corde AC avec le diamètre AB; nous l'appellerons x. On a facilement

$$OH = R \operatorname{tg} x$$
$$BC = 2R \sin x$$
$$HC = AC - AH = 2R \cos x - \frac{B}{\cos x}.$$

Par suite, la condition donnée se traduit par l'équation

$$\operatorname{tg} x + 2 \sin x = 1 + 2 \cos x - \frac{1}{\cos x}$$

ou bien, en chassant le dénominateur,

$$\sin x + 2 \sin x \cos x = \cos x + 2 \cos^2 x - 1.$$

Cette équation se met facilement sous la forme

$$\sin x - \cos x = \cos 2x - \sin 2x.$$

Pour la résoudre nous élèverons les deux membres au carré; nous aurons, après réduction

$$\sin 2x = \sin 4x$$

ou, puisque l'angle x est aigu, et même inférieur à 45°, d'après l'énoncé, on aura

$$6x = 180°, \text{ d'où } x = 30°.$$

On peut vérifier *à posteriori* que, si l'angle x vaut 30°, le quadrilatère OHCB est circonscriptible. En effet, on a d'abord

$$CB = BO = R.$$

D'autre part, d'après une propriété connue du triangle rectangle dans lequel un angle vaut 30°, on a

$$AH = 2OH;$$

enfin, si on mène CK perpendiculaire au diamètre AB, on aura

$$\frac{HC}{AH} = \frac{OK}{OA} = \frac{1}{2}.$$

Donc, OH = HC; par suite CB + OH = HC + OB; c'est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit circonscriptible.

2. — *Trouver les dénominateurs des fractions irréductibles*

qui donnent lieu à une fraction périodique mixte ayant un chiffre à la partie irrégulière et un chiffre à la période.

On sait que, si l'on cherche la fraction génératrice d'une fraction périodique mixte remplissant les conditions requises par l'énoncé, on trouvera une fraction dont le dénominateur est 90. Toute fraction irréductible équivalente à la précédente aura pour dénominateur un diviseur de 90, et devra, pour donner naissance à une fraction périodique mixte, contenir les facteurs 2 ou 5, avec d'autres facteurs; donc pour trouver *tous* les dénominateurs, on décomposera 90 en facteurs premiers, et on prendra les diviseurs de 90 qui contiennent *au moins* un des facteurs 2 ou 5, avec d'autres facteurs.

On trouvera les diviseurs 6, 15, 18, 30, 45, et 90 répondant à la question.

Remarque. — Si l'on avait dû avoir plus d'un chiffre à la partie irrégulière, on sait qu'il aurait fallu que *l'un au moins* des facteurs 2 ou 5 eût un exposant égal au nombre des chiffres de la partie irrégulière.

3. — *On donne un secteur* AOB, *d'angle* α, *et sa corde* AB; *mener une parallèle à* OA *de telle sorte qu'elle soit partagée en deux parties égales par le rayon* OB, *la corde et l'arc.*

(Le lecteur est prié de faire la figurè).

Nous prendrons pour inconnues l'angle BON formé par le rayon OB et le rayon qui passe au point de rencontre de la parallèle demandée et de l'arc de cercle, et aussi la portion du rayon BO comprise entre le point B et la ligne CN demandée ; le triangle OCN nous donne, puisque CN = 2CB,

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R - y}{\sin (\alpha - x)} = \frac{2y}{\sin x}.$$

En retranchant terme à terme les deux premiers rapports, on trouve, en supprimant la solution $y = 0$, l'équation

$$\frac{2}{\sin x} = \frac{1}{\sin \alpha - \sin (\alpha + x)}.$$

Ce qui donne, après réduction, la solution $\frac{x}{2} = 0$ étant une solution étrangère,

$$2 \cos\left(\alpha - \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{x}{2}.$$

Pour résoudre cette équation, nous développerons le premier membre et nous obtiendrons

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1 - 2\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ soit positif, et par suite que le cosinus de α soit inférieur à $\frac{1}{2}$; donc il faut que l'angle α soit supérieur à 60°; c'est ce que montrera facilement la solution géométrique de la question. Pour trouver graphiquement la position de la corde, il suffira en effet de prolonger le rayon OA d'une longueur AK égale au rayon, et de joindre le point B au point K; la ligne BK rencontre l'arc de cercle au point N, qui appartient à la parallèle demandée. Or, puisque le triangle BON est isoscèle, il faut que les angles égaux soient aigus; donc l'angle OBK doit être aigu. On sait que, lorsqu'un angle est aigu, dans un triangle, la distance de son sommet au milieu du côté opposé est plus grande que la moitié de ce côté; donc BA doit être supérieur au rayon, ce qui exige que l'angle α soit supérieur à 60°.

4. — *Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres peut-il arriver que, si l'on multiplie seulement l'un des nombres par* m, *le plus grand commun diviseur soit multiplié par* m?

On sait que, si l'on appelle A et B deux nombres entiers, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier D soit le plus grand commun diviseur de A et de B, est qu'il existe deux nombres entiers Q et Q′, *premiers entre eux*, satisfaisant aux deux égalités

$$A = DQ$$
$$B = DQ'.$$

Cela posé, multiplions l'un des nombres donnés, A par exemple, par m; on aura

$$mA = DmQ.$$

Pour que le plus grand commun diviseur entre B et mA puisse être Dm, il faut que, dans la valeur de B, on puisse

mettre en évidence le facteur Dm; donc il faut que m soit un diviseur de Q'. Il est du reste évident que si l'on multiplie A par un des diviseurs, m, de Q', on multipliera le plus grand commun diviseur par m; car si l'on a

$$Q' = mQ'',$$

on aura

$$B = mDQ''$$

et les facteurs Q et Q'' seront premiers entre eux, sans quoi Q et Q' ne seraient pas premiers entre eux; donc mA et B auront bien pour plus grand commun diviseur mD. — La condition indiquée pour m est donc nécessaire et suffisante.

5. — *Dans un triangle rectangle on connaît le périmètre et la surface; calculer les angles.*

Nous prendrons comme inconnue auxiliaire le rayon du cercle inscrit au triangle; soient A l'angle droit, B et C les deux autres angles; on a, x, y et z étant les deux côtés de l'angle droit et l'hypoténuse :

$$x = r\left(1 + \cot\frac{B}{2}\right),$$

$$y = r\left(1 + \cot\frac{C}{2}\right),$$

$$z = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right);$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre, et appelant $2p$ le périmètre $\quad p = r\left(1 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right);$

d'autre part en appelant m^2 la surface du triangle

$$pr = m^2;$$

d'où en multipliant membre à membre, et simplifiant

$$p^2 = m^2\left(1 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right).$$

Mais, on a, puisque $A = 90°$, $1 = \cot\frac{A}{2}$; par suite, en tenant compte de la formule connue

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

on en tire $\quad \cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{p^2}{m^2},$

d'où l'on tire très facilement en remplaçant les cotangentes par leurs valeurs, et appliquant les formules données par la théorie des proportions,

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{p^2+m^2}{p^2-m^2}.$$

Or, l'angle $\frac{B+C}{2}$ est égal à 45°; donc on aura facilement $\frac{B-C}{2}$, et par suite les angles B et C sont connus.

Remarque. — Il est bien évident que la différence $\frac{B-C}{2}$ est moindre que 45°; donc le numérateur du premier membre est supérieur à son dénominateur; de plus le rapport devant être positif, il faut que m^2 soit inférieur à p^2, ce qui se voit du reste immédiatement, puisque r est inférieur à p, d'après la relation connue $2p = 2s + 2r$.

6. — *On donne un cercle* C, *un point* A *sur ce cercle et un point* B *dans le plan du cercle; trouver le rayon d'un cercle tangent en* A *au cercle donné et passant par le point* B.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Nous supposerons d'abord que le point B est extérieur au cercle donné, et que le cercle cherché est tangent extérieurement au cercle donné; alors la distance des centres est égale à $R+x$, en appelant x le rayon du cercle cherché; si d est la distance du centre C du cercle donné au point B, α l'angle ACB, on a la relation

$$x^2=(R+x)^2+d^2-2d(R+x)\cos\alpha.$$

En simplifiant on trouve

$$x=\frac{R^2+d^2-2dR\cos\alpha}{2(d\cos\alpha-R)}.$$

Cherchons une interprétation géométrique de cette valeur de x.

Si l'on joint le point A au point B, on a facilement, par le triangle ACB,

$$AB^2=R^2+d^2-2dR\cos\alpha;$$

d'autre part, si nous cherchons à projeter la longueur CB sur CA, nous aurons, en appelant CH cette projection,

$$CH = d \cos \alpha$$

et par suite $$AH = d \cos \alpha - R.$$

On retrouve ainsi la propriété connue d'un cercle, savoir qu'une corde (la corde AB) est moyenne proportionnelle entre le diamètre ($2x$) et la projection (AH) de la corde sur un diamètre passant par son extrémité.

Cela posé, considérons les différents cas que peut présenter la figure. Si la quantité $d \cos \alpha - R$ est positive, x est positif; en effet, dans ce cas le point H est extérieur à la circonférence C; l'angle BAC est obtus, car on aura cet angle par la formule $\cos BAC = \frac{R - d \cos \alpha}{R \times AB}$;

dans ce cas les deux circonférences sont tangentes *extérieurement*.

Si le dénominateur est nul, le point B se projette au point A; d'où il résulte que la droite AB est perpendiculaire au rayon CA et par suite tangente au cercle C. Donc la circonférence cherchée aura deux points, les points A et B, communs avec une de ses tangentes, la tangente en A, et par suite elle se réduira à la tangente AB; en d'autres termes elle deviendra un cercle de rayon infini.

Si le dénominateur est négatif, x sera négatif, c'est-à-dire compté dans la direction AC. Nous allons subdiviser ce cas en deux :

1° Le point B est extérieur à la circonférence C. Dans ce cas, on a $$d > R.$$

On en déduit facilement que l'on a

$$AB^2 > 2R(R - d \cos \alpha).$$

Donc, en valeur absolue, x est plus grand que R. En effet, dans ce cas, le cercle cherché devant passer par un point extérieur au cercle C, l'enveloppe, et par suite a un rayon plus grand que celui du cercle C.

2° Au contraire, lorsque le point B est intérieur au cercle C, on a $$d < R,$$

on en déduit $$AB^2 < 2R(R - d \cos \alpha);$$

x est encore négatif, mais plus petit que R en valeur

absolue, et, en effet, le cercle cherché devra être intérieur au cercle B.

Dans le cas très particulier où B serait sur la circonférence C, on trouverait facilement $x = R$; et en effet, dans ce cas, le cercle cherché se confondrait avec le cercle donné, car ils auraient un point commun et seraient, en outre, tangents à la même droite au même point de cette droite.

7. — *On a un triangle dont les angles sont en progression arithmétique. Trouver une relation simple entre les côtés.*

Soient A, B, C les angles du triangle rangés par ordre de grandeur; il résulte de la condition indiquée que l'angle B est égal à 60° et que par suite son cosinus est égal à $\frac{1}{2}$; donc on a, en portant cette hypothèse dans la valeur de b^2,

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie entre les trois côtés, les angles sont en progression arithmétique, car on en tire facilement $B = 60$; et par suite $A + C = 120 = 2B$; donc l'angle B est la demi-somme des deux autres; par suite les angles A, B, C sont bien en progression arithmétique.

8. — *On donne une ellipse et on demande de calculer l'un des rayons vecteurs en fonction de l'angle qu'il fait avec le grand axe. On considère ensuite un angle droit qui tourne autour de l'un des foyers; déterminer l'angle α que l'un de ses côtés fait avec le grand axe, de façon que, si l'on mène la corde qui joint les points où les côtés rencontrent l'ellipse, le triangle ainsi formé soit maximum.*

Considérons le triangle FMF′, formé par la distance focale $2c$ et les deux rayons vecteurs r et r'; on a d'abord

$$r + r' = 2a$$

et

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \alpha.$$

En éliminant r', et réduisant, on trouve

$$r = \frac{b^2}{a - c \cos \alpha}.$$

Si l'on change α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$, on sait que le cosinus se

change en sinus, et change de signe ; donc on aura pour le second rayon $r_1 = \frac{b^2}{a + c \cos \alpha}$.

Donc, pour résoudre la seconde partie de la question, on doit chercher le maximum du produit de rr_1, ou, ce qui revient au même, le minimum du produit

$$(a - c \cos \alpha)(a + c \sin \alpha).$$

Cette expression devient, lorsqu'on la développe,

$$a^2 + ac(\sin \alpha - \cos \alpha) - c^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Comme il y a une partie constante, il suffit de s'occuper du minimum de la partie variable, on a donc à chercher le minimum de

$$a(\sin \alpha - \cos \alpha) - c \sin \alpha \cos \alpha.$$

Posons $a(\sin \alpha - \cos \alpha) - c \sin \alpha \cos \alpha = m$.

Faisons passer le dernier terme dans le second membre, et élevons au carré ; il vient, après réduction,

$$a^2 - 2a^2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2 + c^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2mc \sin \alpha \cos \alpha$$

ou, en ordonnant, après avoir multiplié par 4, pour avoir $\sin 2\alpha$:

$$c^2 \sin^2 2\alpha + 4(mc + a^2) \sin 2\alpha + 4(m^2 - a^2) = 0$$

Il faut, pour que les valeurs ainsi trouvées pour $\sin 2\alpha$ conviennent, qu'elles soient d'abord réelles, puis comprises entre $+1$ et -1. On trouvera facilement que ces valeurs sont toujours réelles ; on peut reconnaître aussi que la plus grande racine, celle qui a le signe $+$ devant le radical, est toujours inférieure à 1, car la condition à remplir dans ce cas est $(c^2 + 2m)^2 > 0$, condition toujours satisfaite.

Pour que l'autre racine soit supérieure à 1, on trouve, après réduction, la condition

$$c^2 - 2m < 2a\sqrt{2}$$

ou

$$2m \geqq c^2 - 2a\sqrt{2}.$$

On trouve donc pour minimum de m, la valeur $c^2 - 2a\sqrt{2}$. Dans ce cas, on a $\sin 2\alpha = -1$; en supposant que l'on ne prenne pour α que des angles aigus, positifs ou négatifs, on trouve $\alpha = -45^\circ$;

c'est-à-dire que les deux rayons sont symétriques par rapport au grand axe.

9. — *Trouver la condition pour que l'on puisse décomposer en deux facteurs du premier degré à deux variables le polynôme complet* $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.

Nous prendrons deux facteurs du premier degré de la forme

$$x + my + p$$
$$x + ny + q,$$

et nous allons chercher à déterminer m, n, p et q de façon qu l'on ait identiquement

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$
$$= a(x + my + p)(x + ny + q).$$

Il suffira pour cela que les coefficients des mêmes puissances des variables soient égaux, ce qui donnera entre m, n, p, q et les coefficients du polynôme donné les relations suivantes

$$a(m + n) = b$$
$$amn = c$$
$$a(p + q) = d$$
$$apq = f$$
$$a(mq + np) = e.$$

En éliminant m, n, p, q entre ces cinq équations, on aura la relation cherchée.

Or, les deux premières nous permettent de déterminer m et n; ce sont les racines de l'équation du second degré

$$aZ^2 - bZ + c = 0\,;$$

de même p et q sont racines de l'équation

$$aT^2 - dT + f = 0.$$

On sait que l'on peut prendre, pour représenter l'une des variables, l'une quelconque des racines de l'équation correspondante. Si donc nous désignons, pour abréger, par R le radical correspondant à la première, par S le radical correspondant à la seconde, nous aurons les deux systèmes :

$$m = \frac{-b + R}{2a}, \qquad p = \frac{-d + S}{2a}$$

$$n = \frac{-b - R}{2a}, \qquad q = \frac{-d - S}{2a}$$

ou bien $m = \dfrac{-b+R}{2a}$, $p = \dfrac{-d-S}{2a}$

$n = \dfrac{-b-R}{2a}$, $q = \dfrac{-d+S}{2a}$;

car il est bien évident que les deux autres systèmes retomberaient dans les précédents.

En portant ces valeurs dans la dernière équation, nous trouvons après réduction par le premier système

$$\frac{bd - RS}{2a} = e$$

et par le second, $\dfrac{bd + RS}{2a} = e.$

Comme il faut élever au carré, nous trouverons dans tous les cas $R^2S^2 = (bd - 2ae)^2$.

Remplaçons R^2 par sa valeur $b^2 - 4ac$, S^2 par sa valeur $d^2 - 4af$; effectuons, nous trouverons facilement après simplification, pour la condition cherchée.

$$ae^2 + cd^2 - bde + f(b^2 - 4ac) = 0.$$

A. M.

QUESTION 189

Solution par M. Boulogne, élève du Lycée de Saint-Quentin.

Montrer que si, par un même point de l'arête d'un dièdre, on mène dans chaque face une droite formant un même angle α avec l'arête, l'angle de ces deux droites ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

Si α est droit, l'angle des deux droites est le rectiligne du dièdre, et on sait que le dièdre est mesuré par son rectiligne, c'est-à-dire qu'ils varient proportionnellement. Dans la démonstration suivante nous considérerons le rectiligne du dièdre au lieu du dièdre lui-même.

Soit le dièdre SO. Coupons-le par un plan perpendiculaire à l'arête. L'angle COE $= \omega$ sera le rectiligne du dièdre.

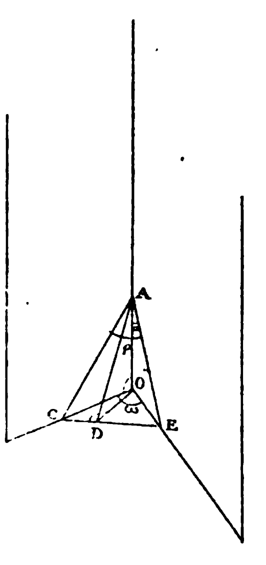
Par un point A de l'arête, menons des droites AC, AE

faisant chacune avec l'arête un angle α, et soit φ l'angle CAE de ces deux droites. Soit de plus l la longueur constante CA.

Le triangle rectangle CAO donne $CO = l \sin \alpha$ et le triangle COD donne aussi $CD = CO \sin \frac{}{2}$; donc

$$CD = l \sin \alpha \sin \frac{\omega}{2}.$$

Si l'on joint A à D, le triangle ACD donne $CD = l \sin \frac{\varphi}{2}$.



Égalant les deux valeurs de CD, on a après simplification

$$\sin \alpha \sin \frac{\omega}{2} = \sin \frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = \sin \alpha = \text{constante}.$$

Or les angles ne variant pas proportionnellement à leurs sinus, il en résulte que $\frac{\varphi}{2}$ ne varie pas proportionnellement à $\frac{\omega}{2}$, ou φ proportionnellement à ω ; et comme ω mesure le dièdre, φ ne varie pas proportionnellement au dièdre.

QUESTION 194

Solution par M. La Chesnais, élève du Lycée de Versailles.

On donne une circonférence O *et un diamètre* AB. *Trouver le lieu des points* M *tels que le carré construit sur la tangente* MT *soit équivalent à quatre fois le triangle* MOP, P *étant le pied de la perpendiculaire abaissée de* M *sur* AB.

Soit R le rayon du cercle, on doit avoir

$$MT^2 = 2MP \cdot OP.$$

Or $$MO^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2$$

donc $$MT^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 - R^2 = 2MP \cdot OP.$$

Par suite $(MP - OP)^2 = R^2$.

Le lieu est le même que celui des points tels que la différence de leur distance à des droites soit constante.

Or on sait que *pour un point pris sur le prolongement de la base d'un triangle isoscèle, la différence des distances aux deux autres côtés est constante et égale à l'une des hauteurs égales du triangle.*

Donc le lieu géométrique cherché est le prolongement des côtés du carré inscrit.

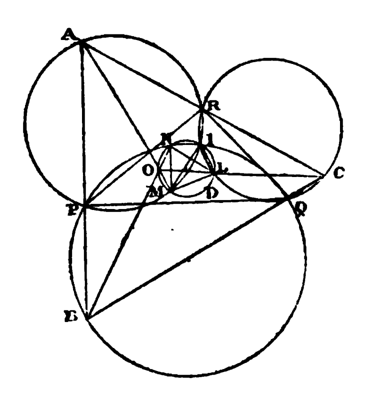
Nota : Ont résolu la même question : MM. Bernard, Prunget, de Châteauroux ; Latappy, à Saint-Paul-lès-Dax ; Vazou, collège Rollin à Paris.

QUESTION 228

Solution par M. Montérou du Lycée de Pau.

Lieu du centre d'un triangle équilatéral dont les côtés passent par trois points donnés.

Soit ABC un des triangles équilatéraux dont les côtés passent par trois points donnés P, Q, R. Les sommets A, B, C de ce triangle se trouvent évidemment sur les segments capables de 60° décrits sur les droites PR, PQ, QR.



Les bissectrices des angles A et B se coupent en O, centre du triangle équilatéral ABC, et passent par les points M, N, milieux des arcs opposés. Ces deux points M et N sont donc fixes. Joignons MN.

L'angle MON est égal à l'angle AOB, qui lui-même est égal

à 120°. Le lieu est donc le segment du cercle décrit sur MN et capable de 120°. Si l'on considérait les deux autres groupes de bissectrices, on prouverait de même que ce lieu n'est autre chose que les segments de cercle passant par M et L, L et N, capables de 120°.

Le lieu cherché est donc le cercle passant par les milieux des arcs capables de 120° décrits sur PR, PR, QR.

Remarque. — Le problème précédent n'est qu'un cas particulier du problème suivant.

On donne un triangle ABC *et un point* O *dans son plan. Le triangle se meut en restant constamment semblable à lui-même et de telle sorte que chacun de ses côtés passe par un point fixe. A chaque position du triangle correspond un point homologue à* O. *Lieu de ce point.*

Les sommets A et B ont pour lieu les segments capables de A et B décrits sur PR et PQ. Il résulte en outre de la construction du point O que les triangles AOB et CAO restent constamment semblables à eux-mêmes ; les angles BAO et OBC sont par suite constants. Les points M et N sont donc fixes et l'angle MON étant constant, le lieu est le segment capable de MON décrit sur MN.

Nota. — M. Berrut, élève de mathématiques élémentaires au lycée de Marseille, a résolu la même question. En outre, il fait remarquer :

1° Que les arcs NOM, NDL, LIN étant, chacun, capables de 120°, le triangle MLN est équilatéral. D'où le théorème :

Les milieux des segments de cercle capables de 120° *décrits sur les côtés d'un triangle sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

2° Le cercle lieu du point O passe par le point I commun aux trois segments de cercle.

En effet, joignons IM, IL, IR.

L'angle RIM a pour mesure la moitié de l'arc RAM, c'est-à-dire 150°. L'angle RIL vaut aussi 150° ; leur somme égale 300°. Donc MIL = 60°. Donc le point I commun aux trois segments de cercle bien sur la circonférence est lieu du point O.

Nota. — M. Comandré, du lycée Saint-Louis, a résolu la même question.

NOTE SUR UNE APPLICATION
DU CALCUL DES DÉTERMINANTS
A CERTAINES QUESTIONS DE MAXIMA ET DE MINIMA

Par M. E. J. Boquel.

1° Soit une fonction $F(x)$ d'une seule variable indépendante, et telle qu'on puisse la mettre sous la forme de la somme de deux carrés de deux fonctions linéaires de la variable x, comme il suit:

$$F(x) = (ax + b)^2 + (a'x + b')^2$$

en supposant les deux fonctions linéaires $ax + b$ et $a'x + b'$ distinctes, c'est-à-dire $ab' - ba' \lessgtr 0$.

Proposons-nous de trouver le minimum d'une pareille fonction. Considérons le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ formé avec les coefficients des deux fonctions linéaires qui entrent dans la composition de $F(x)$; déterminant que nous supposons différent de zéro

a et a' étant des constantes, le minimum de $F(x)$ a évidemment lieu pour la même valeur de x que le minimum de $(a^2 + a'^2)F(x)$. Mais on a identiquement, en représentant par A et A' les deux fonctions linéaires $ax + b$ et $a'x + b'$:

$$\begin{aligned}(a^2 + a'^2)(A^2 + A'^2) - (A'a - Aa')^2 &= a^2A^2 + a'^2A'^2 + 2aa'AA' \\ &= (aA + a'A')^2.\end{aligned}$$

Donc $(a^2 + a'^2)\, F(x) = (A'a - Aa')^2 + (aA + a'A')^2$.

Mais $A'a - Aa'$ est précisément le déterminant Δ ; car on a :

$$a(a'x + b') - a'(ax + b) = ab' - ba'.$$

Donc $(a^2 + a'^2)F(x) = \Delta^2 + (aA + a'A')^2$.

L'expression dont il s'agit de trouver le minimum est donc égale à la somme de deux carrés dont le premier est une constante; son minimum aura donc lieu quand le second carré sera nul, c'est-à-dire pour la valeur de x satisfaisant à l'équation $Aa + A'a' = 0$, ou $\frac{A}{a'} = -\frac{A'}{a}$, qui,

développée, devient :

$$(ax + b)a + (a'x + b')a' = 0$$

et qui conduit à la solution

$$x = -\frac{ab + b'a'}{a^2 + a'^2}.$$

Pour cette valeur de x, l'expression se réduit à Δ^2 qui est sa valeur minimum, et par conséquent le minimum de $F(x)$ est $\frac{\Delta^2}{a^2 + a'^2} = \frac{(ab' - ba')^2}{a^2 + a'^2}$, qui a lieu quand on donne à x la valeur $-\frac{ab + a'b'}{a^2 + a'^2}$. Ce sont d'ailleurs les résultats qu'on obtient par les procédés élémentaires connus.

Pour bien faire sentir l'avantage de la formule précédente, où le minimum de $F(x)$ est exprimé en fonction de Δ, prenons une application très simple, par exemple la distance d'un point $(x'' y'')$, à une droite $Ax + By + C = 0$ (coordonnées rectangulaires).

La distance cherchée est le minimum de l'expression

$$\delta^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2$$

où x', y' désignent les coordonnées d'un point de la droite considérée, c'est-à-dire des quantités telles que l'on ait identiquement $Ax' + By' + C = 0$. Remplaçons y' par $-\frac{Ax'}{B} - \frac{C}{B}$, dans δ^2 ; il vient :

$$\delta^2 = \left(\frac{Ax'}{B} + \frac{C}{B} + y''\right)^2 + (x' - x'')^2.$$

C'est là une fonction $F(x')$ de la variable x', présentant précisément la forme étudiée plus haut, et l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{A}{B} & \frac{C}{B} + y'' \\ 1 & -x'' \end{vmatrix} = -\left(\frac{Ax''}{B} + \frac{C}{B} + y''\right).$$

Le minimum de $F(x')$ est donc immédiatement, en vertu de la formule établie,

$$\delta^2 = \frac{\left(\frac{A}{B}x'' + \frac{C}{B} + y''\right)^2}{\frac{A^2}{B^2} + 1} = \frac{(Ax'' + By'' + C)^2}{A^2 + B^2}.$$

On reconnaît bien la formule usitée en géométrie analytique, quand la droite est sous la forme $Ax + By + C = 0$.

2° Soit maintenant une fonction $F(x, y)$ de deux variables indépendantes et telle qu'on puisse la mettre sous la forme de la somme de trois carrés de trois fonctions linéaires des deux variables x et y, comme il suit :

$$F(x, y) = (ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2 + (a''x + b''y + c'')^2.$$

Considérons le déterminant formé avec les coefficients des trois fonctions linéaires qui entrent dans la composition de $F(x, y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

et supposons ce déterminant différent de zéro.

Ordonnons-le par rapport aux éléments de la dernière colonne; il prendra la forme $\Delta = Cc + C'c' + C''c''$. C, C', C'' étant des constantes, le minimum de $F(x, y)$ a évidemment lieu pour les mêmes valeurs de x et de y que le minimum de l'expression $(C^2 + C'^2 + C''^2)F(x, y)$.

Désignons par A, A', A'' les trois fonctions linéaires

$$ax + by + c, \quad a'x + b'y + c', \quad a''x + b''y + c'';$$

on a identiquement :

$$(C^2 + C'^2 + C''^2)(A^2 + A'^2 + A''^2) - (AC + A'C' + A''C'')^2$$
$$= (C'A'' - C''A')^2 + (C''A - CA'')^2 + (CA' - C'A)^2.$$

Observons que $AC + A'C' + A''C''$ est précisément le déterminant Δ; car si, dans ce déterminant, on multiplie les éléments de la première colonne par x, ceux de la seconde par y, et qu'on ajoute ces éléments ainsi multipliés aux éléments correspondants de la troisième colonne, le déterminant nouveau est égal au premier, et l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & ax + by + c \\ a' & b' & a'x + b'y + c' \\ a'' & b'' & a''x + b''y + c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & A \\ a' & b' & A' \\ a'' & b'' & A'' \end{vmatrix}$$

Or, en ordonnant ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, on a précisément

$$\Delta = AC + A'C' + A''C'',$$

puisqu'il ne diffère du proposé que par le changement en A, A', A'', des éléments c, c', c'' de la colonne par rapport à laquelle on avait primitivement ordonné.

On a donc enfin :

$$(C^2 + C'^2 + C''^2)F(x, y) = \Delta^2 + (C'A'' - C''A')^2 + (C''A - CA'')^2 + (CA' - C'A)^2.$$

Cette expression est la somme de quatre carrés dont l'un est une constante; son minimum aura donc lieu quand les trois derniers carrés seront nuls (si cela est possible), c'est-à-dire pour les valeurs de x et de y satisfaisant aux équations
$C'A'' - C''A' = 0$, $C''A - CA'' = 0$, $CA' - C'A = 0$.

Ces trois équations n'en forment réellement que deux distinctes; car elles ne sont autre chose que l'égalité des rapports suivants : $\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'} = \frac{A''}{C''}$;
on pourra donc généralement trouver des valeurs de x et de y annulant les trois derniers carrés et pour ces valeurs l'expression $(C^2 + C'^2 + C''^2)F(x, y)$ atteint son minimum dont la valeur est Δ^2. Le minimum de $F(x, y)$ est donc

$$\frac{\Delta^2}{C^2 + C'^2 + C''^2}.$$

Appliquons ce résultat à une question simple, la recherche de la plus courte distance de deux droites de l'espace.

Soient $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$

et $\begin{cases} x = a'z + p'. \\ y = b'z + q' \end{cases}$

les équations des deux droites dont il s'agit (axes rectangulaires).

En appelant $(x'\ y'\ z')$ et $(x''\ y''\ z'')$ les coordonnées de deux points respectivement situés sur ces droites, le carré de la plus courte distance cherchée est le minimum de l'expression

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$$

ou $\delta^2 = (az' - a'z'' + p - p')^2 + (bz' - b'z'' + q - q')^2 + (z' - z'')^2$

C'est là une fonction $F(z', z'')$ des deux variables indépendantes z' et z'', présentant précisément la forme étudiée plus haut, et l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -a' & p - p' \\ b & -b' & q - q' \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Le minimum de $F(z', z'')$ est donc immédiatement, en vertu de la formule établie,

$$\delta^2 = \frac{\begin{vmatrix} a-a' & p-p' \\ b-b' & q-q' \\ 1-1 & 0 \end{vmatrix}^2}{(b'-b)^2+(a'-a)^2+(ba'-ab')^2}$$

On peut même retrouver par ce procédé les équations de la droite sur laquelle est comptée la plus courte distance.

Les valeurs de z' et de z'' satisfont aux équations :

$$\frac{az'-a'z''+p-p'}{b'-b} = \frac{bz'-b'z''+q-q'}{a-a'} = \frac{z'-z''}{ba'-ab'}$$

Éliminons z'' entre ces deux équations; à cet effet, multiplions les deux termes du dernier rapport par a', puis par b', et retranchons terme à terme des deux premières, nous aurons :

$$\frac{az'-a'z'+p-p'}{b'-b-a'(ba'-ab')} = \frac{bz'-b'z'+q-q'}{a-a'-b'(ba'-ab')},$$

équation qui peut s'écrire :

$$\frac{x'-a'z'-p'}{b'-b-a'(ba'-ab')} = \frac{y'-b'z'-q'}{a-a'-b'(ba'-ab')}.$$

Si l'on y regarde x', y', z' comme des coordonnées courantes, elle représente un plan qui passe par le pied de la plus courte distance sur la première droite.

Il est d'ailleurs évident que ce plan, qui est de la forme $\lambda(x-a'z-p')=\mu(y-b'z-q')$, contient la deuxième droite; il passe donc par le pied de la plus courte distance sur la deuxième droite; donc il contient la plus courte distance elle-même,

En éliminant d'une manière tout à fait semblable z' au lieu de z'', on obtiendra de même l'équation d'un second plan contenant aussi la plus courte distance; les équations de ces deux plans, considérées comme simultanées, sont donc les équations de la droite sur laquelle est comptée la plus conrte distance.

(A suivre.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE 1880

Composition en mathématiques.

Solution par M. GUICHARD, élève à l'école préparatoire de Sainte-Barbe.

Etant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A *de cette surface et la génératrice* B *du même système qui est perpendiculaire à la première; par les points* a *et* b *où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune, passent deux génératrices rectilignes* A′ *et* B′ *de l'autre système; soient* a′ *et* b′ *les points où les deux droites* A′ *et* B′ *sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.*

1° Trouver le lieu des points a *et* b, *et celui des points* a′ *et* b′ *quand la droite* A *décrit le paraboloïde.*

2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites A *et* B′ *ou* A′ *et* B.

3° Calculer le rapport des longueurs a′b′ *et* ab *des perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.*

1° Lieu des points a *et* b.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

La droite *ab* restant constamment perpendiculaire au plan directeur auquel sont parallèles A et B, quand la droite A se déplace sur la surface, *ab* décrit un cylindre. L'intersection de ce cylindre avec la surface donnera le lieu demandé. Pour déterminer ce cylindre, je prends pour plan horizontal de projection le plan directeur parallèle aux droites A. Les droites A et B se projettent sur ce plan suivant deux droites rectangulaires A_1, B_1; la verticale *ab* rencontre le plan horizontal au point M. Les droites A_1 et B_1 sont d'ailleurs tangentes à la parabole de contour apparent de la surface. Il en résulte que, lorsque la droite A se déplace, le point M décrit la directrice de cette parabole. La droite *ab* décrit le plan vertical qui a pour trace horizontale DM. Ce plan coupe la surface suivant une hyperbole qui est le lieu demandé.

SOLUTION ANALYTIQUE

Je place l'origine au sommet du paraboloïde ; je prends pour plan des xy le plan directeur parallèle aux droites A ; et dans ce plan, je prends pour axe des y l'axe du paraboloïde : l'axe des x sera alors la droite suivant laquelle le plan des xy coupe la surface. L'équation de la surface sera :

$$z(ax + bz) = y.$$

Les droites A et B ont pour équation

$$\text{A} \qquad z = \lambda \qquad \lambda(ax + bz) = y.$$

$$\text{B} \qquad z = \mu \qquad \mu(ax + bz) = y. \qquad (1)$$

Avec la relation $a^2\lambda\mu + 1 = 0$

qui exprime que les droites sont rectangulaires.

Les projections de A et B sur le plan de xy ont pour équations

$$A_1 \qquad \lambda(ax + b\lambda) = y, \qquad (2)$$

$$B_1 \qquad \mu(ax + b\mu) = y. \qquad (3)$$

Pour avoir l'équation du cylindre que décrit ab, il suffit d'éliminer λ et μ entre (1) (2) et (3). Pour cela, je retranche membre à membre (2) et (3), on obtient

$$(\lambda - \mu)\,[ax + b(\lambda + \mu)] = 0$$

ou, en laissant de côté pour le moment la solution $\lambda - \mu = 0$.

$$\lambda + \mu = -\frac{ax}{b}.$$

La relation (1) donne d'ailleurs

$$\lambda\mu = -\frac{1}{a^2},$$

d'où

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{a^2x^2}{b^2} + \frac{2}{a^2}.$$

D'ailleurs, si j'ajoute (2) à (3) membre à membre

$$ax(\lambda + \mu) + b(\lambda^2 + \mu^2) = 2y. \qquad (4)$$

En portant dans cette équation les valeurs précédentes de $\lambda + \mu$ et $\lambda^2 + \mu^2$, on a : $y = \frac{b}{a^2}$.

La droite ab décrit un plan perpendiculaire à l'axe des y; ce plan coupe la surface suivant une hyperbole dont les équations sont $y = \frac{b}{a^2}$, $(ax + bz) = z\,\frac{b}{a^2}$.

Cette hyperbole a son centre sur l'axe des y.

Les asymptotes sont parallèles à Ox et OA, traces des plans directeurs sur le plan des zx.

Je reprends la solution $\lambda = \mu$.

La relation (1) donne

$$\mu = \lambda = \pm \frac{i}{a}.$$

L'équation (4) donne

$$y = \pm xi - \frac{b}{a^2}.$$

Ce qui représente deux plans imaginaires; leur droite d'intersection est verticale, et son pied sur le plan des xy a pour coordonnées $x = 0$, $y = -\frac{b}{a^2}$.

Les droites A et B sont confondues pour ces valeurs de λ et μ, elles se projettent suivant les droites

$$\left(y + \frac{b}{a^2}\right)^2 + x^2 = 0.$$

Ces droites appartiennent aux directions asymptotiques d'une sphère; on peut considérer chacune de ces droites comme perpendiculaires sur elles-mêmes, le lieu des pieds des perpendiculaires communes sera ces droites elles-mêmes.

On aurait pu trouver cette solution singulière par la géométrie, en remarquant que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole se compose de la directrice et des deux droites isotropes menées par le foyer.

On peut vérifier facilement que la droite $y = \frac{b}{a^2}$ et le point $x = 0$, $y = -\frac{b}{a^2}$ sont la directrice et le foyer de la parabole de contour apparent dont l'équation est

$$a^2x^2 + 4by = 0.$$

Dans cette discussion, j'ai supposé a et $b \gtrless 0$; si $a = 0$, la surface est un cylindre parabolique; il n'y a plus de problème.

Si $b = 0$, la surface est un hyperboloïde équilatère, les droites A_1 et B_1, au lieu d'envelopper une parabole, passent par un point fixe qui est le sommet de la surface. Les équa-

tions des droites A_1 et B_1

$$\lambda a x = y$$
$$\mu a x = y$$

avec $a^2\lambda\mu + 1 = 0$, ce qui donne comme lieu de ab l'équation

$$x^2 + y^2 = 0,$$

qui représente deux plans imaginaires passant par l'axe des z. Il était bien évident, *a priori*, que l'axe des z ferait partie du lieu, puisque toutes les droites A s'appuient sur l'axe des z et lui sont perpendiculaires.

Lieu des points a′ *et* b′.

Les équations des droites A′ et B′ sont :

A′ $\quad (ax + bz) = \mu_1 \qquad \mu_1 z = y$

B′ $\quad (ax + bz) = \lambda_1 \qquad \lambda_1 z = y.$

Les droites A′ et B sont dans un même plan vertical ; elles se projettent horizontalement suivant la même droite. Les équations de ces projections sont :

$A'_1 \qquad \mu_1 a x + b y = \mu_1^2,$

$B_1 \qquad \mu a x + b\mu^2 = y.$

Pour que ces équations représentent une même droite il faut que l'on ait :

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{-\mu_1^2}{b\mu^2} = \frac{b}{-1}.$$

Toutes ces relations sont vérifiées pour la même valeur de μ_1 ; ce qui était évident, d'après la discussion géométrique ci-dessus. Il faut donc prendre

$$\mu_1 = -b\mu,$$
$$\lambda_1 = -b\lambda.$$

Les équations des droites A′ et B′ deviennent :

A′ $\quad ax + bz = -b\mu \qquad -b\mu z = y,$

B′ $\quad ax + bz = -b\lambda \qquad -b\lambda z = y.$

La droite $a'b'$ reste perpendiculaire au deuxième plan directeur $ax + bz = 0$. Pour avoir la section droite de ce cylindre, je fais tourner les axes de coordonnées dans le plan des zx en prenant pour nouvel axe des x la droite ON et pour nouvel axe des z la droite ON′ perpendiculaire.

Dans ce système d'axes la droite Ox aura pour équation $ax + bz = 0$, la droite Oz, $-bx + az = 0$.

Pour passer de l'ancien système au nouveau il suffira de remplacer

$$x \text{ par } \frac{-bx+az}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z \text{ par } \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On voit d'après ces formules que

$$ax+bz \text{ devient } z\sqrt{a^2+b^2}.$$

L'équation du paraboloïde restera la même, ce qui était évident d'ailleurs, puisque les deux plans directeurs doivent jouer le même rôle dans la surface.

Les équations des droites A′ et B′ deviennent dans ce système en posant $\delta = \sqrt{a^2+b^2}$

A′ $\quad \delta z = -b\mu \qquad -b\mu\,(ax+bz) = \delta y,$

B′ $\quad \delta z = -b\lambda \qquad -b\lambda\,(ax+bz) = \delta y.$

Les projections de A′ et B′ sur le deuxième plan directeur ont pour équation :

$$b\mu\,(\delta ax - b^2\mu) = -\delta^2 y, \qquad (5)$$

$$b\lambda\,(\delta ax - b^2\lambda) = -\delta^2 y. \qquad (6)$$

Avec (1) $\quad \lambda\mu a^2 + 1 = 0.$

En éliminant λ et μ entre ces trois équations on aura l'équation du cylindre que décrit $a'b'$.

En retranchant (5) et (6) membre à membre et en supposant a et $b \gtrless 0$ $\quad (\lambda-\mu)\,[\delta ax - b^2(\lambda+\mu)] = 0.$

En laissant de côté la solution $\lambda - \mu = 0$

$$\lambda+\mu = \frac{\delta ax}{b^2}$$

$$\lambda\mu = -\frac{1}{a^2}$$

d'où $$\lambda^2+\mu^2 = \frac{\delta^2 a^2 x^2}{b^4} + \frac{2}{a^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$b\delta ax(\lambda+\mu) - b^2(\lambda^2+\mu^2) = -2\delta^2 y$$

obtenue en ajoutant (5) et (6), membre à membre, on a :

$$\delta^2 y = \frac{b^3}{a^2}.$$

Dans le plan des xy cette équation représente une droite parallèle à la directrice de la parabole de contour apparent. Dans l'espace elle représente un plan perpendiculaire à l'axe de la surface ; ce plan coupe la surface suivant une

hyperbole qui se projette en vraie grandeur sur le plan des zx. L'équation de cette projection est

$$z(ax + bz) = \frac{b^2}{a^2\delta^2}.$$

L'équation ne changera pas d'ailleurs si l'on revient aux axes primitifs.

La solution $\lambda - \mu = 0$ donne encore deux plans imaginaires.

2° Lieu des points de rencontre des droites A *et* B′, *ou* A′ *et* B.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Au point d'intersection de A et B′ le plan tangent à la surface, qui contient les droites A et B′, est vertical ; le point d'intersection se trouve donc sur la courbe de contact du cylindre vertical, circonscrit à la surface. Cette courbe de contact n'est autre chose que la parabole du contour apparent.

SOLUTION ANALYTIQUE

Les droites A et B′ ont pour équation :

A	$z = \lambda$	$\lambda(ax + bz) = y,$
B′	$ax + bz = -b\lambda$	$-b\lambda z = y.$

Le z du point d'intersection sera égal à λ. Pour avoir une relation entre l'x et l'y du point d'intersection, c'est-à-dire pour avoir le cylindre projetant verticalement la courbe d'intersection, il suffira d'éliminer λ entre

$$ax + b\lambda = -b\lambda \qquad \text{et} \qquad \lambda(ax + b\lambda) = y.$$

Ce qui donne $$-\frac{ax}{2b}\left(ax - \frac{ax}{2}\right) = y$$

$$a^2x^2 + 4by = 0;$$

la trace de ce cylindre sur le plan des xy est la parabole de contour apparent.

3° Calculer le rapport des longueurs a′b′ *et* ab *et étudier les variations de ces longueurs.*

La plus courte distance des horizontales A et B est la distance des plans horizontaux menés par A et B, c'est-à-dire en valeur absolue $\lambda - \mu$.

De même la distance des droites A′ et B′ est la distance des plans menés par ces droites, parallèlement au deuxième

plan directeur; plans qui ont pour équation dans le deuxième système de coordonnées :

$$z = -\frac{b}{\delta}\cdot\lambda \qquad z = -\frac{b}{\delta}\cdot\mu.$$

La plus courte distance $a'b'$ est en valeur absolue

$$\frac{b}{\delta}\cdot(\lambda-\mu).$$

On a, par conséquent, $\frac{a'b'}{ab} = \frac{b}{\delta}$, rapport qui reste constant.

Pour étudier les variations de ab, $a'b'$, il suffit d'étudier les variations de $\lambda - \mu$; λ et μ étant reliés par la relation

$$\lambda\mu = -\frac{1}{a^2},$$

λ et μ sont de signes contraires, leur produit est constant, la somme $\lambda+\mu$ peut prendre toutes les valeurs. Je prends $\lambda+\mu$ comme variable indépendante.

$$(\lambda-\mu)^2 = (\lambda+\mu)^2 + \frac{4}{a^2}.$$

$\lambda-\mu$ croît en même temps que $\lambda+\mu$ croît en valeur absolue et peut prendre toutes les valeurs plus grandes que $\frac{2}{a}$; $\frac{2}{a}$ est donc le minimum de la plus courte distance des droites A et B. $\frac{2}{a}\cdot\frac{b}{\delta}$ sera le minimum de la plus courte distance des droites A′ et B′.

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Algèbre.

Chercher pour quelles valeurs de x la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots \text{ est convergente.}$$

Trouver en même temps la limite vers laquelle tend $\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ quand n croît indéfiniment, sans employer la règle de L'Hospital.

— En cherchant la plus grande commune mesure entre deux longueurs A et B, on a les égalités successives

$$A = Bq + R$$
$$B = Rq_1 + R_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$R_{n-2} = R_{n-1}q_n + R_n$$

En supposant $R_n = 0$, le rapport $\frac{A}{B}$ s'exprime par une fraction continue terminée. On propose de déduire de cette considération que les réduites successives d'une fraction continue sont des fractions irréductibles.

— Sachant qu'entre trois racines x', x'', x''' de l'équation $f(x) = 0$ on a une relation $\varphi(x', x'', x''') = 0$, on demande la marche à suivre pour abaisser le degré de l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire pour ramener sa résolution à celle d'une équation du degré moindre.

— On demande, à propos de la dérivation de a^x, si le rappport $\frac{a^h - 1}{h}$ tend vers sa limite en croissant ou en décroissant.

Distinguer entre $a > 1$ et $a < 1$.

— a étant un nombre entier, réduire $\sqrt{a(a+1)}$ en une fraction continue.

— Soit l'expression $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; on demande à quelles conditions doit satisfaire une valeur de x comprise entre les deux nombres a et b pour que la fonction considérée soit croissante pour cette valeur de x, a et b ne comprenant entre eux aucune racine de la dérivée.

— Soit la fraction $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$; on demande de former l'équation du deuxième degré qui admet pour racines les valeurs de x qui répondent au maximum et au minimum de la fraction donnée.

— Décomposer en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{x^p + x^q - 1}{(x-1)^3(x^2+1)}$, p et q désignant deux nombres entiers quelconques.

— $f(x) = 0$ étant une équation à coefficients imaginaires, qui admet pour racine une imaginaire de la forme $a + b\sqrt{-1}$, établir que l'équation conjuguée de la proposée (c'est-à-dire celle que l'on en déduit en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$) admet pour racine l'imaginaire $a - b\sqrt{-1}$ conjuguée de $a + b\sqrt{-1}$.

— Etudier les variations de la fonction

$$y = x + \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Démontrer : 1° que quand on multiplie deux polynômes par un troisième, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce troisième polynôme; 2° que si un polynôme divise un produit de deux polynômes et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

— Réduire $2 + \sqrt{5}$ en fraction continue.

— Etablir que les logarithmes de deux nombres, pris chacun dans le système dont l'autre est la base, sont inverses l'un de l'autre, c'est-à-dire que

$$\log_b a \times \log_a b = 1.$$

— Former l'équation du deuxième degré dont l'une des racines est la valeur de la fraction continue

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{8 + \cdots}}}}}}$$

— Etant donnée l'équation $f(x) = 0$, on demande de former une équation telle que chacune de ses racines y soit liée à deux quelconques des racines de la proposée par une relation telle que $y = \varphi(x', x'')$.

— Expliquer comment on peut faire la séparation des racines de l'équation du quatrième degré au moyen du théorème de Rolle.

— Décomposer en fractions simples la fraction

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n)}.$$

— De la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, déduire la formule qui donne $\sin(a+b)$, par la dérivation.

— Réduire $\sqrt{a^2 - 1}$ en fraction continue.

— Etudier les variations de la fonction implicite définie par l'équation $x^3 + y^4 - 1 = 0$, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Les conditions que l'on trouve en exprimant, au moyen du théorème de Sturm, qu'une équation du degré m a toutes ses racines réelles, sont-elles toutes distinctes? — Pourquoi y en a-t-il qui rentrent dans les autres? — Si l'une des fonctions de Sturm, X_p, a des racines imaginaires, l'équation proposée peut-elle avoir toutes ses racines réelles? — Combien en a-t-elle au moins d'imaginaires? — Que peut-on dire de l'équation proposée quand $X_p = 0$ a une racine double?

— Le nombre $1 + \sqrt[p]{N}$ rend-il aussi positif le premier membre de la dérivée du polynôme $Ax^m - N(x^{m-p} + x^{m-p-1} + \ldots + 1)$?

Rend-il aussi positif le premier membre de la dérivée de l'équation proposée?

Géométrie analytique plane.

Construire la courbe dont l'équation est :

$$y = x\sqrt[3]{\frac{1-x}{1-x}}\ \text{asymptotes.}$$

— On donne une tangente à une parabole, ainsi que le point où cette tangente rencontre la directrice de la courbe; on donne en outre un cercle ayant ce point pour centre et un rayon donné r, cercle que l'on considère comme le lieu des sommets des paraboles considérées; former l'équation générale de ces courbes.

— Déduire de l'équation de la tangente en coordonnées polaires l'équation de l'asymptote.

Trouver les asymptotes de la courbe

$$\rho^3(1 - 2\sin\omega) - 2\rho^2\cos\omega + 1 - \operatorname{tg}\omega = 0.$$

— Étant donnés deux points A et B, trouver le lieu des points M tels que l'angle MBA soit le double de l'angle MAB.

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 = 1.$$

— Étant donné un cercle O et un rayon fixe OA, on prend un rayon mobile OB; trouver le lieu du point M de rencontre des perpendiculaires AH et BK abaissées de l'extrémité de chaque rayon sur l'autre rayon.

— On donne les équations de deux cercles en coordonnées rectangulaires

$$x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0.$$

Exprimer que ces deux cercles se coupent orthogonalement en leurs points de rencontre.

Généraliser pour deux courbes quelconques.

— Démontrer que par les points de rencontre de deux ellipses quelconques, on peut toujours faire passer une hyperbole.

— On donne une asymptote d'une hyperbole, ainsi que le point où elle rencontre la tangente en l'un des sommets; on donne en outre la longueur de l'axe transverse. On demande l'équation générale des hyperboles ayant ces conditions communes.

— On demande l'équation générale des paraboles qui ont de commun un point de l'axe, un point de la directrice et le paramètre.

— L'équation générale du deuxième degré à deux variables représentant une parabole, on demande de calculer la valeur du paramètre en fonction des coefficients.

— Étant donnée l'équation d'une courbe en coordonnées bipolaires, on demande de déterminer la tangente en un de ses points. — Appliquer le résultat à l'ellipse, à l'hyperbole et à la lemniscate.

— On prend sur une ellipse deux points M' et M''. Du point M' comme centre on décrit un cercle passant par le foyer de droite. Du point M'' on décrit un deuxième cercle passant par le même foyer. Calculer la longueur de la tangente commune à ces deux circonférences.

— On mène deux diamètres quelconques MOM' et POP' d'une hyperbole équilatère; on joint un point Q quelconque de cette hyperbole aux points M, P, M', P'; démontrer que les angles PQM et P'QM' sont égaux.

— Former l'équation générale des coniques qui ont en commun une tangente, son point de contact, et les points où cette tangente rencontre les deux directrices.

— On donne un foyer d'une ellipse, et une droite sur laquelle est compté l'un des diamètres conjugués égaux. Trouver l'équation générale des ellipses satisfaisant à ces conditions.

— Former l'équation générale des hyperboles ayant une asymptote commune, ainsi que le point où l'autre asymptote coupe l'une des deux directrices.

— Trouver les asymptotes de la courbe représentée par l'équation

$$\rho^3 (1 - 4\sin^2 \omega) + 2\rho^2 \sin \omega + \cos \omega - 1 = 0.$$

— Former l'équation générale des paraboles qui ont en commun une tangente, le point A où cette tangente rencontre les directrices, et dont le lieu des foyers est un cercle décrit de A comme centre avec rayon donné.

— Intersection de deux coniques ayant un foyer commun.

— Lieu des foyers des hyperboles ayant une asymptote et un sommet communs.

— Construire la courbe $\rho = \text{tang}\ \omega - 1$.

— Étant donnés un cercle et une direction fixe, par un point quelconque d'un diamètre donné on mène une ordonnée dont on prend le milieu. Trouver le lieu du rabattement de ce point milieu sur la parallèle à la direction fixe menée par le pied de l'ordonnée.

— Construire la courbe $y = x^3 - x$.

Trouver le lieu des milieux des cordes de cette courbe qui sont parallèles à la droite $y = x$.

— Trouver le maximum de la distance du centre à une normale à l'ellipse.

— On donne une droite et trois points dans un plan; former l'équation de la conique qui passe par les trois points, et dont la droite donnée est un axe.

— On donne une hyperbole équilatère, et un point fixe M sur l'un des axes. On mène un diamètre quelconque qui rencontre l'hyperbole aux points A et B. Par les trois points M, A, B on fait passer un cercle, et on mène en A et B les tangentes à ce cercle; elles se coupent en un point P. On joint PM; cette droite rencontre le cercle aux deux points M et N. A chaque position de la droite AB répond un point N; démontrer que ce point N décrit la polaire du point M par rapport à l'hyperbole.

— Former l'équation générale des paraboles qui ont en commun une tangente, le point où elle rencontre l'axe, et dont le lieu des sommets est une certaine droite perpendiculaire à la tangente.

— Lieu des milieux des cordes normales à la parabole.

— L'équation d'une courbe algébrique étant supposée mise sous la forme

$$x^m \varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} \varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-2} \varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

former l'équation de la tangente en un point donné, et en déduire l'équation de l'asymptote en considérant cette dernière comme une tangente dont le contact s'est éloigné à l'infini sur la courbe.

CONCOURS GÉNÉRAUX 1880

Mathématiques spéciales.

Premier concours (*retiré*). — Le produit

$$(1 + qz)(1 + q^3z)(1 + q^5z) \ldots (1 + q^{2n-1}z)\left(1 + \frac{q}{z}\right)\left(1 + \frac{q^3}{z}\right) \ldots \left(1 + \frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$

étant représenté par

$$\frac{A_{-n}}{Z^n} + \frac{A_{-(n-1)}}{Z^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{Z} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n,$$

on demande d'exprimer en fonction de q le coefficient des différentes puissances de z; 2° le paramètre q étant un nombre réel dont la valeur absolue est inférieure à l'unité, ou une quantité imaginaire dont le module est inférieur à l'unité, démontrer que le coefficient de z^r tend vers une limite quand r augmente indéfiniment, et déterminer cette limite.

Deuxième concours. — Sur une courbe donnée du troisième degré ayant un point de rebroussement O, on considère une suite de points A_{-n}, $A_{-(n-1)}$ ... A_{-1}, A_0, A_1, A_2 ... A_n tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe aux points suivants. 1° Etant données les coordonnées du point A_0, on propose de trouver les coordonnées des points A_{-n} et A_n, et de déterminer la limite de ces points quand n augmente indéfiniment.

2° On demande le lieu décrit par le premier point limite lorsque la courbe

du troisième degré, en conservant le même point de rebroussement et la même tangente en ce point, passe constamment par trois points fixes P, Q, R. On étudiera comment varie le point d'intersection de ce lieu et des côtés PQR quand les sommets se déplacent sur des droites passant par le point O.

Mathématiques élémentaires.

Résoudre le système de n équations à n inconnues :

$$x_1 (x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x\ ) + 1.2 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = 9 a^2$$
$$x_2 (x_3 + x_4 + \dots + x_n + x_1) + 2.3 (x_1 + x_2 + \dots + x\ )^2 = 25 a^2$$

. . . .

$$x_n (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1}) + n (n + 1) (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = (2n + 1)^2 a^2$$

— D'un point O, pris dans le plan d'un cercle, passent quatre droites qui coupent la circonférence, la première aux points a et a', la seconde en b et b', la troisième en c et c', la quatrième en d et d'. Prouver que le sinus des moitiés des arcs ac, bd, ad, bc, $a'c'$, $b'd'$, $a'd'$, $b'c'$, sont liés par la relation

$$\frac{\sin \frac{1}{2} ac \,.\, \sin \frac{1}{2} bd \,.\, \sin \frac{1}{2} a'd' \,.\, \sin \frac{1}{2} b'c'}{\sin \frac{1}{2} cb \,.\, \sin \frac{1}{2} da \,.\, \sin \frac{1}{2} d'b' \,.\, \sin \frac{1}{2} a'c'} = 1$$

Philosophie.

— La terre étant supposée sphérique, on considère les points M de la surface dont la latitude est égale à la longitude:

1° Déterminer le lieu des projections du point M sur le plan de l'équateur;

2° Déterminer le lieu des droites AM, A étant le point de l'équateur à partir duquel on compte les longitudes.

LICENCE DES INSTITUTS TECHNIQUES EN ITALIE

Session d'été 1880.

Connaissant deux côtés a et b d'un triangle, et la bissectrice l de l'angle C, résoudre le triangle. — Application :

$$a = 3{,}15\,;$$
$$b = 2{,}25\,;$$
$$l = 1{,}62.$$

— Trouver les quatre termes d'une progression arithmétique connaissant le produit des termes moyens, le produit des extrêmes et la somme des cubes des quatre termes.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE PARIS

Session de juillet 1880.

On donne le rayon R du quart de cercle AOB; déterminer la distance OD de la parallèle CD à OA, de telle sorte que le rapport des volumes engendrés par les triangles COD, COA, dans la rotation autour de OA, soit égal à un nombre donné m. Indiquer les limites entre lesquelles doit être compris le rapport donné m.

— Déterminer le nombre a de façon que la somme des carrés des racines de l'équation
$$x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$$
soit la plus petite possible.

— On donne $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = b$. On demande de trouver $\sin a$ en fonction de b. On appliquera au cas de $b = 2 - \sqrt{3}$, et dans ce cas, on donnera en degrés la valeur de l'arc a sans avoir recours aux logarithmes.

— Former une équation du second degré dont les racines x' et x'' satisfassent aux relations
$$x'x'' + x' + x'' - a = 0,$$
$$x'x'' - a(x' + x'') + 1 = 0;$$
quelle valeur faut-il donner à a pour que les racines de cette équation soient réelles? pour qu'elles soient positives?

— Les trois côtés d'un triangle ont pour valeur:
$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; on demande de donner en degrés les valeurs des angles de ce triangle sans avoir recours aux logarithmes. On calculera la surface du triangle et le rayon du centre circonscrit.

— Trouver en degrés toutes les valeurs de l'arc x qui satisfont à l'égalité
$$\cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

ÉCOLE CENTRALE 1880

SESSION DE JUILLET

Géométrie analytique.

Soient Ox, Oy, deux axes rectangulaires; sur Ox, un point A, sur Oy, un point B. On mène par le point A une droite quelconque, AR, de coefficient angulaire m.

1° Former l'équation de l'hyperbole H, qui est tangente à l'axe Ox au point O, qui passe par le point B, et pour laquelle la droite AR est une asymptote.

2° On fait varier m, et on demande le lieu décrit par le point de rencontre de la tangente en B à l'hyperbole et à l'asymptote AR.

3° On considère le cercle circonscrit au triangle AOB ; ce cercle coupe l'hyperbole H aux points O et B, et en deux autres points P et Q. Former l'équation de cette droite PQ ; puis, faisant varier m, trouver successivement les lieux des points de rencontre de cette droite PQ avec les parallèles menées par le point O, soit à l'asymptote AR, soit à la seconde asymptote de l'hyperbole H.

Géométrie descriptive.

Une sphère donnée, dont le rayon est égal à $0^m,090$, touche les deux plans de projection à $0^m,100$ du bord gauche du cadre. Dans le plan du petit cercle de front, distant de $0^m,120$ du plan vertical de projection à la droite du centre de ce cercle, et à une distance de ce centre égale à la moitié du rayon du même petit cercle, on mène une verticale ; sur la partie de cette verticale comprise entre son point supérieur de rencontre avec la sphère et le plan horizontal de projection, on construit un triangle équilatéral ; ce triangle, en tournant autour de cette verticale, engendre un double cône ; on demande de représenter la sphère donnée, supposée pleine et opaque, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le double cône.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne commune à la sphère et à l'un des cônes, et la tangente en ce point.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Biandsutter, professeur à Lucerne, une solution fort simple de la question n° 159 ; nous croyons devoir signaler cette solution ici.

Le problème proposé était celui-ci : *Par quatre points donnés, faire passer quatre droites, de façon que la figure formée soit un carré.*

L'auteur de la solution que nous signalons s'appuie sur la proposition suivante qu'il est très facile de vérifier : *Deux droites rectangulaires menées dans le plan d'un carré, sont telles que les portions de chacune de ces droites comprises entre deux côtés opposés du carré sont égales.*

D'après cela rien n'est plus facile que de trouver un cinquième point du carré, situé sur l'un des côtés. Appelons α, β, γ, δ les quatre points donnés α et γ étant sur deux côtés opposés, β et δ sur les deux autres ; si par α et γ je mène une droite et que par β je mène une perpendiculaire à $\alpha\gamma$, sur laquelle je prends $\beta\delta'$ égal à $\alpha\gamma$, le point δ est un point du côté qui passe par δ ; donc en menant $\delta\delta'$, et par β une parallèle à cette droite, puis par α et γ des perpendiculaires à $\delta\delta'$, on aura le carré cherché. Il est facile de voir que le problème est déterminé tant que δ n'est pas confondu avec δ'.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

258. — Dans le triangle ABC, on mène les deux bissectrices AA′ et BB′, qui coupent les côtés opposés respectivement en A′ et B′, et se rencontrent en O; démontrer la relation

$$\frac{AA'\,.\,OB'}{BB'\,.\,OA'} = \frac{AC}{BC}.$$

(Reidt.)

259. — On donne une circonférence O, et un point fixe A dans son plan; on joint le point A à un point quelconque B de la circonférence; la bissectrice intérieure de l'angle AOB rencontre la droite AB en un point M dont on demande le lieu lorsque le point B décrit la circonférence. Ce lieu rencontre le diamètre en P; démontrer que, C étant le point de la circonférence le plus voisin de A sur la droite OA, les quatre points O, C, P, A forment une division harmonique.

(Launoy.)

260. — On joint un point fixe A intérieur à une circonférence, à un point quelconque B de la courbe; on prend sur AB un point M tel que $\frac{AM}{AB} = K$. On joint chacune des extrémités du diamètre qui passe par le point A aux points M et B; ces droites se rencontrent en deux points M et N′ autres que A et B. Démontrer : 1° que la ligne NN′ partage MB en deux parties dont le rapport est constant; 2° que la ligne qui joint les milieux de MB et de NN′ passe par le centre de la circonférence donnée; enfin, trouver le lieu des points N et N′.

(Launoy.)

261. — On donne une circonférence O et deux points A et B dans son plan; on prend sur AB le point fixe C tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{a}{b}$. On prend un point P quelconque sur la circonférence, et on le joint au point B; on prolonge BP jusqu'à D de telle sorte que $\frac{DP}{DB} = \frac{p}{q}$; on demande le lieu du

point de rencontre des deux droites AP et CD lorsque P décrit la circonférence donnée.

Mathématiques spéciales.

262. — Résoudre et discuter, dans les diverses hypothèses que l'on peut faire, le système des trois équations

$$x^n + y^n + z^n = a^n$$
$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = b^{2n}$$
$$x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = c^{3n}$$

263. — Établir la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation du sixième degré complète pour que la somme de trois des racines soit égale à la somme des trois autres.

264. — Démontrer que, lorsque n est un entier supérieur à 5, on a la double inégalité

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

265. — Étant donnée la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

on mène en un point M de cette courbe une tangente qui rencontre les axes de coordonnées en A et B. On achève le rectangle ayant pour côtés OA et OB; soit M′ le sommet opposé à O. On propose de trouver le lieu décrit par ce point M′ quand M décrit la courbe donnée.

Cela fait, on projette un point quelconque de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^p = 1$$

sur les axes en C et D, on joint le point C au point D, et on propose de trouver immédiatement l'enveloppe des droites telles que CD.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET C[ie],
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 17970-0.

NOTE

SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES

Dans la note suivante, nous nous proposons d'indiquer, d'après un mémoire dû à M. *A. Boucher* (*), quelques propriétés des périodes, lorsque la fraction ne se réduit pas exactement en décimales; nous examinerons également le moyen de trouver rapidement le nombre de chiffres de la période d'après la forme du dénominateur de la fraction irréductible considérée. La connaissance de ces propriétés peut être d'une grande commodité lorsque l'on veut réduire en décimales des fractions dont le dénominateur est un peu considérable.

1. — Supposons que nous ayons à réduire en décimales la fraction $\frac{1}{N}$. Poussons l'opération de façon à avoir k chiffres décimaux au quotient; appelons x le quotient, abstraction faite de la virgule, y le reste, on a identiquement

$$1 = N \cdot \frac{x}{10^k} + \frac{y}{10^k}.$$

On en tire facilement

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x}{10^k}}{1 - \frac{y}{10^k}},$$

c'est-à-dire que la fraction considérée est équivalente à la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{x}{10^k}$, et dont la raison est $\frac{y}{10^k}$. Par suite, il nous sera souvent facile, connaissant les k premiers chiffres décimaux de la fraction, d'en obtenir autant que

(*) *Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales par un procédé nouveau, et nouvelles propriétés des périodes*, par M. Aug. Boucher, professeur au lycée d'Angers. - 1857.

nous voudrons; il nous suffira de multiplier $\frac{x}{10^k}$ successivement par les différentes puissances de $\frac{y}{10^k}$, et d'ajouter les résultats. Cela pourra présenter un très grand avantage si y est un nombre simple. Prenons l'exemple suivant, emprunté au mémoire de M. Boucher (*).

Soit à réduire en décimales la fraction $\frac{1}{83}$; après avoir trouvé trois chiffres décimaux, nous obtenons comme reste 4; le quotient étant 0,012, on a

$$\frac{1}{83} = \frac{0,012}{1 - 0,004}.$$

Calculons les divers termes de la progression, nous aurons

0,012
0,000048
0,000000192
0,000000000768
0,000000000003072
0,000000000000012288

En ajoutant, et en supprimant les deux derniers chiffres, nous aurons, avec seize chiffres, la fraction décimale

0,0120481927710843.

On voit donc que si l'on arrive à un reste simple, il est très facile de trouver autant de chiffres que l'on veut; on n'a du reste pas besoin d'écrire les zéros qui sont à gauche; il suffira, quand on fait un produit, d'en placer le premier chiffre k rangs à droite du premier chiffre du produit précédent.

2. — Nous allons maintenant partir de cette manière de considérer la fraction décimale périodique pour étudier quelques propriétés des périodes; mais, avant tout, nous allons donner quelques définitions.

Lorsque deux nombres contenant autant de chiffres donneront une somme composée exclusivement de chiffres 9, nous dirons que ces deux nombres sont *complémentaires*.

(*) *Loco cit.*, p. 8.

Lorsque une période sera formée de deux nombres complémentaires placés à la suite l'un de l'autre, nous l'appellerons période *complète* (*).

3. — Considérons la fraction irréductible $\frac{1}{N}$; soit p la période, D le dénominateur formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période; on a donc

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{D};$$

il est facile de voir que p possède les propriétés suivantes :

D'abord, D est toujours divisible par 9, et par suite, si N est premier avec 3, p doit être divisible par 9. C'est en particulier ce qui arrivera si N est premier, autre que 3.

Si D a un nombre pair de chiffres, il est divisible par 11, et par suite, si N est premier avec 11, p doit être divisible par 11.

En général, p doit contenir tous les facteurs premiers de D qui ne se trouvent pas dans N.

Il est facile de voir que, si l'on a inversement

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{D},$$

p étant plus petit que D sera la période, car on a

$$D = 10^k - 1,$$

donc

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{p}{10^k}}{1 - \frac{1}{10^k}}.$$

On voit donc bien que la fraction est égale à la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{p}{10^k}$, et la raison $\frac{1}{10^k}$. Elle s'écrira donc très facilement, en prenant p pour période.

De même, en prenant un nombre a, inférieur à N,

(*) Nous préférons ce mot *période complète* au nom de *période mixte* employé par M. Boucher, seulement parce que cette dernière dénomination pourrait induire en erreur les élèves, le mot de *fraction périodique mixte* ayant déjà une signification différente dans les cours.

on a $$\frac{a}{N} = \frac{ap}{D},$$

et *ap* est inférieur à D; *ap* est donc la période correspondant à la fraction $\frac{a}{N}$.

4. — Si, en réduisant la fraction $\frac{1}{N}$ en décimales, nous trouvons le reste $N - 1$, la période est complète.

En effet, dans ce cas on a, en supposant k chiffres décimaux avant le reste $N - 1$,

$$1 = \frac{Nx}{10^k} + \frac{N-1}{10^k}.$$

On en tire facilement

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x+1}{10^k}}{1 + \frac{1}{10^k}}.$$

On voit que la fraction $\frac{1}{N}$ est la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison est $-\frac{1}{10^k}$; ou bien encore, elle est la différence entre deux progressions géométriques dont la première a pour premier terme $\frac{x+1}{10^k}$, et pour raison $\frac{1}{10^{2k}}$, et l'autre a pour premier terme $\frac{x+1}{10^{2k}}$, et pour raison $\frac{1}{10^{2k}}$; il est tres facile d'écrire ces deux progressions, la première commencera par $x + 1$, puis après on écrira k zéros, et le nombre $(x + 1)$, et k zéros, et ainsi de suite; la seconde commencera au contraire par k zéros, puis le nombre $(x + 1)$, puis k zéros, le nombre $(x + 1)$, etc.; on les partagera en groupes de $2k$ chiffres, à partir de la gauche, et en retranchant les groupes correspondants l'un de l'autre, on verra facilement que la période est complète.

5. — Plus généralement, si en réduisant la fraction $\frac{a}{N}$

en décimales, on trouve le reste $N - a$, la période est complète.

Pour le prouver, je vais démontrer que si j'appelle $a, b, c \ldots$ les restes successifs, avant le reste $N - a$, on obtient les restes successifs $N - a$, $N - b$, $N - c$, ... et que les chiffres du quotient correspondant aux restes a et $N - a$, b et $N - b$, etc., ont respectivement pour somme 9.

En effet, soit f le chiffre du quotient obtenu en divisant $10a$ par N; on a $10a = Nf + b$.

Prenons le reste $N - a$; multiplions-le par 10, pour avoir un nouveau chiffre au quotient; on a identiquement

$$10(N - a) = 10N - 10a.$$

Remplaçons $10a$ par sa valeur, on a

$$10(N - a) = N(9 - f) + N - b;$$

donc, lorsque nous arrivons à un reste $N - a$, le reste suivant est bien $N - b$, et la somme des deux quotients correspondants est bien 9.

6. — Si la fraction $\frac{a}{N}$ est irréductible, le nombre des chiffres de sa période est le même que celui de la période correspondant à $\frac{1}{N}$.

D'abord, de l'égalité $\frac{a}{N} = \frac{ap}{D}$,

on déduit, comme nous l'avons vu, que la période correspondant à $\frac{a}{N}$ ne peut pas avoir plus de chiffres qu'il n'y a de 9 dans D, et, par conséquent, pas plus de chiffres que la période correspondant à $\frac{1}{N}$; mais peut-il y en avoir moins? en d'autres termes, peut-on considérer ap comme formé de plusieurs périodes, telles que la fraction $\frac{4545}{9999}$, qui se réduit à $\frac{45}{99}$? Je dis que c'est impossible, car si l'on posait

$$\frac{a}{N} = \frac{p'}{D'},$$

comme la fraction $\frac{a}{N}$ est supposée irréductible, p' devrait

être divisible par a; on aurait donc $p' = aq$; d'où l'on tirerait facilement $\frac{1}{N} = \frac{q}{D'}$.

Donc $\frac{1}{N}$ ne contiendrait à sa période qu'un nombre de chiffres égal au nombre de 9 qu'il y a dans D', ce qui est contre l'hypothèse. Donc $D' = D$, et par suite $p' = ap$.

7. — Il résulte de cette proposition que, si N est un nombre premier, toutes les fractions plus petites que l'unité, et ayant pour dénominateur N, ont le même nombre de chiffres à la période.

8. — Si l'on considère la fraction $\frac{1}{N}$, que l'on réduit en décimales, et si h est l'un des restes obtenus dans cette opération, la fraction $\frac{h}{N}$ donnera naissance à une fraction périodique dont la période ne différera de la précédente que parce qu'on devra la supposer commençant à un chiffre autre que le premier.

Cela résulte évidemment de la manière même dont se fait la réduction d'une fraction en décimales.

Si, au contraire, h n'est pas l'un des restes obtenus en réduisant $\frac{1}{N}$ en décimales, la période correspondant à $\frac{h}{N}$ sera différente de la précédente, et aucun des restes obtenus dans cette réduction ne sera égal à l'un des restes fournis par la réduction de $\frac{1}{N}$ en décimales.

9. — Si N est un nombre premier, la réduction de la fraction $\frac{1}{N}$ en décimales donnera une période dont le nombre de chiffres sera $N - 1$ ou un sous-multiple de $N - 1$.

D'abord, il est bien évident que le nombre de chiffres de la période ne peut pas dépasser $N - 1$, car il ne peut pas y avoir plus de $N - 1$ restes différents, et par suite, après la $(N - 1)^e$ division au plus, nous retrouverons le reste 1; nous aurons ainsi obtenu, au quotient, tous les chiffres de la période.

En second lieu, il peut arriver que le reste 1 se reproduise après p divisions, p étant inférieur à N — 1 ; alors, la période n'aura que p chiffres ; et, en vertu de ce que nous avons dit plus haut (7), toutes les fractions inférieures à l'unité ayant N pour dénominateur donneront lieu à des périodes de p chiffres. Cela posé, prenons la fraction $\frac{a}{N}$, moindre que l'unité; en admettant que a ne soit pas un des restes fournis dans la réduction en décimales de la fraction $\frac{1}{N}$, la période correspondant à $\frac{a}{N}$ sera différente de la période correspondant à $\frac{1}{N}$, et donnera lieu à p restes différents de ceux que l'on a obtenus précédemment ; il est facile de voir de la même manière que les N — 1 nombres inférieurs au dénominateur pourront ainsi se classer en groupes contenant p nombres, et par suite p sera un sous-multiple de N — 1. *(A suivre.)*

SUR LE PARTAGE DES POLYGONES

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

En novembre 1878, je donnais dans ce journal (*) la solution géométrique d'un problème dont on ne connaissait jusqu'alors qu'une solution approximative (**) et seulement applicable aux opérations pratiques de l'arpentage, puisqu'elle exige des évaluations numériques de surface.

Ce problème est le suivant :

Par un point donné sur le périmètre d'un polygone quelconque, mener une droite qui divise la surface de ce polygone en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

(*) T. II, p. 332.

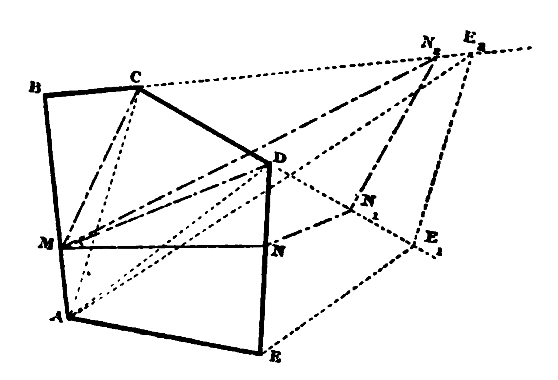
(**) Voir *Arpentage, levé des plans et nivellement*, par F. J. O. P., p. 79.

J'ai fait voir dans la note en question par quel procédé géométrique le problème pouvait toujours être ramené de proche en proche au cas du triangle.

Mais pour cela je considérais toute la suite des polygones intermédiaires entre le polygone proposé et le triangle équivalent. La présente note a pour but de faire voir comment on peut supprimer toute cette suite de polygones et effectuer directement la construction pour un ***polygone absolument quelconque***. Cette simplification considérable permet de résoudre facilement le problème dans tous les cas.

Auparavant, je tiens à indiquer la construction géométrique à effectuer dans le cas du triangle, que j'avais oublié dans ma première note.

Si M est le point donné sur le côté AC du triangle ABC, je porte sur ce côté à partir du point C, et à la suite l'une de l'autre deux longueurs CP, PQ proportionnelles à m et à n. Je tire MB; par A je mène à MB la parallèle AL qui coupe CB en L; je tire LQ; par P je mène à LQ la parallèle PN qui coupe BC en N; MN est la droite cherchée; il résulte, en effet, de cette construction que CN a la longueur déterminée pour ce segment (t. II, p. 133).



Voyons maintenant comment se résout la question pour un polygone quelconque. Je vais, pour simplifier les raisonnements, exposer la solution pour un pentagone; mais on verra facilement que cette solution est absolument générale.

Soit le point M donné sur le côté AB du pentagone ABCDE. Je vais transformer directement ce pentagone en un triangle équivalent ayant en commun avec lui le côté AB. Pour cela, je proposerai la construction suivante : tirer AD et AC ; par E mener, à AD, la parallèle EE_1, qui coupe CD en E_1, et par E_1, à AC, la parallèle E_1E_2, qui coupe BC en E_2. On voit facilement que ABCDE est équivalent à $ABCE_1$, qui lui-même est équivalent à ABE_2, en considérant deux à deux ces figures comme formées d'une partie commune et de triangles équivalents.

Par la construction indiquée plus haut, je détermine la droite MN_2 divisant la surface du triangle ABE_2 dans le rapport donné. Puis je tire MC et MD; par N_2 je mène à MC la parallèle N_2N_1 qui coupe CD en N_1; par N_1, à MD, la parallèle N_1N qui coupe DE en N; MN est la droite cherchée. On voit en effet, comme précédemment, que MBCDN est équivalent à MBN_2.

Si MN_2 avait rencontré BC entre les points B et C, le problème se fût terminé là; de même N_2N_1 aurait pu rencontrer CD entre les points C et D; mais il pourrait aussi se faire que N_1N ne rencontrât DE que sur son prolongement; dans ce cas, on n'aurait qu'à mener par N, à ME, une parallèle qui couperait AE en P; MP serait alors la droite cherchée.

On voit que cette construction très symétrique, très facile à retenir, est la même, quel que soit le polygone considéré; elle résout donc d'une manière simple le problème dans toute sa généralité.

NOTE SUR LES IRRATIONNELLES

Par M. **Desmons**, professeur au Lycée Blaise Pascal, à Clermont.

1. — La racine carrée d'un nombre entier qui n'est pas un carré parfait se définit généralement en disant qu'elle est la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées, par défaut et par excès, de la racine à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, etc. Il faudrait

faire voir que, en prenant la racine carrée à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ .... on obtient en général des racines par défaut de plus en plus grandes, et des racines par excès de plus en plus petites.

On regarde cette proposition comme évidente; il serait bon, toutefois, de montrer qu'il en est ainsi, et que les racines carrées par défaut croissent ou restent stationnaires, mais ne diminuent jamais, tandis que les racines carrées par excès décroissent ou restent stationnaires, mais n'augmentent jamais.

2. — Soit A un nombre entier et soit m sa racine carrée à une unité près, de sorte que l'on a :

$$A = m^2 + R,$$

R désignant le reste de l'opération.

Si $\frac{x}{n}$ désigne la racine carrée de A à $\frac{1}{n}$ près, on doit avoir

$$x^2 < n^2(m^2 + R) < (x + 1)^2.$$

Cette double inégalité fait voir :

1° Que la racine $\frac{x}{n}$ est *au moins* égale à m.

2° Que la racine $\frac{x+1}{n}$ est *au plus* égale à $m + 1$, car $x + 1$ ne peut être supérieur à $(m + 1)n$; s'il en était ainsi, $x + 1$ serait au moins égal à $mn + n + 1$, et par suite, la racine par défaut serait au moins $(m + 1)n$, ce qui revient à dire que A serait supérieur au carré de $m + 1$, ce qui est contre l'hypothèse.

3. — Pour qu'on approche de plus en plus de la racine, il faut que l'on ait : $x > mn$

et $(x + 1) < (m + 1)n$,

c'est-à-dire $mn < x < mn + n - 1$.

Or, x désignant la racine carrée de An^2 à une unité près, et, d'après la double inégalité précédente, devant être supérieur à mn, on devra avoir

$$n^2 R \geq 2mn + 1;$$

car alors si

$$n^2 R \lesseqgtr 2mn,$$

on aura :

$$An^2 = n^2(m^2 + R) \geq n^2m^2 + 2mn + 1 \geq (mn + 1)^2.$$

La racine par défaut sera au moins égale à $mn + 1$, et, par suite, supérieure à mn.

D'ailleurs, si $n^2R < 2mn(n-1) + (n-1)^2$,

alors

$$A < m^2n^2 + 2mn(n-1) + (n-1)^2 < (mn + n - 1)^2 :$$

la racine par défaut sera donc inférieure à $mn + n - 1$.

En réunissant les deux conditions précédentes dans une double inégalité, on obtient :

$$2mn < n^2R < (n-1)[2mn + n - 1];$$

telles sont les conditions cherchées.

4. — En remplaçant n par 10, on trouve les conditions

$$20m < 100R < 9(20m + 9);$$

si ces deux conditions sont remplies, les deux racines vont constamment l'une en augmentant, l'autre en diminuant, et par conséquent se rapprochent l'une de l'autre.

Ces expressions $20m$ et $9(20m + 9)$ sont aisées à former : car on a dû former le double de la racine, et l'expression $9(20m + 9)$ n'est autre que le résultat qui devrait être effectué si l'on avait le chiffre 9 à essayer.

On pourrait d'ailleurs trouver de suite les conditions précédentes, en remarquant que le second chiffre de la racine doit être au moins 1, et au plus 9 ; donc le quotient de 10R par le double de la racine doit être supérieur à 1, c'est-à-dire $100R > 20m$, et le reste suivi comme on sait de deux zéros, ou 100R, doit être en outre plus petit que le double produit de la racine, exprimant ici des dizaines, par le chiffre 9, augmenté du carré de ce chiffre ; ou $100R < 20m \times 9 + 9^2$, ce qui fournit bien la seconde condition.

Exemples. — *Racine carrée de 3.* — Soient $R_1, R_2, R_3 \ldots$, les restes successifs ; on a

$$R_1 = 2;\ R_2 = 11;\ R_3 = 71;\ R_4 = 176.$$

On obtient

$$20 < 200 < 9.29$$
$$340 < 1100 < 9.349$$
$$3460 < 7100 < 9.3469$$
$$34640 < 17600 < 9.34649.$$

La première condition n'est pas remplie dans cette dernière inégalité, et en effet on a

$$\sqrt{3} = 1,73205,$$

et, si l'on prend les deux racines par défaut,

$$1,732 \text{ et } 1,7320,$$

elles sont égales.

Racine carrée de 6. — Ici, $R_1 = 2$; $R_2 = 24$; $R_3 = 464$; $R_4 = 2399$.

On obtient

$$40 < 200 < 9.49$$
$$480 < 2400 < 9.489$$
$$4880 < 46400 < 9.4889;$$

dans cette dernière inégalité, la seconde condition n'est pas remplie, et deux racines par excès sont stationnaires; en effet

$$\sqrt{6} = 2,449;$$

les deux racines par excès

$$2,45 \text{ et } 2,450$$

sont égales.

5. — *Racines cubiques*. On peut appliquer, sans qu'il soit besoin d'entrer dans de grands développements, ce qui précède à la racine cubique.

On trouvera sans peine la double condition

$$3m^2n^2 + 3mn < n^3R < [3m^2n^2 + 3mn(n-1) + (n-1)^2](n-1),$$

et si l'on fait $n = 10$, on a

$$300m^2 + 30m < 1000R < (300m^2 + 30m\, 9 + 9^2)9.$$

Ces expressions ont dû être formées dans l'extraction de la racine.

Exemple. — *Racine cubique de 2.* — On a $R_1 = 1$; $R_2 = 272$; $R_3 = 46875$; $R_4 = 4383021$.

Les conditions sont

$$330 < 1000 < 9\,(300 + 30.9 + 9^2)$$
$$43200 + 360 < 272000 < 9\,(43200 + 360.9 + 9^2)$$
$$4687500 + 3750 < 46875000 < 9\,(4687500 + 3750.9 + 9^2).$$

La dernière partie de cette double inégalité n'est pas vérifiée; en effet $\sqrt[3]{2} = 1,259$ et on obtient deux racines cubiques par excès qui sont égales, savoir $1,26$ et $1,260$.

6. — On peut suivre ensuite pour définir $\sqrt{A}$ ou $\sqrt[3]{A}$ les

raisonnements connus, et montrer, comme le fait M. Bourget en toute rigueur dans son *Arithmétique*, que la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées de la racine, par défaut et par excès, est indépendante du mode d'approximation adopté.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir page 297 et suiv.)

25. — Les triangles semblables BHC, BA'B' donnent

$$\frac{h'_c}{c_1} = \frac{a}{h_b};$$

de même, les triangles semblables C'HB', BA'B' donnent

$$\frac{h''_c}{p_a} = \frac{a_1}{h_b}.$$

On chasse les dénominateurs, on ajoute membre à membre et l'on a

$$h_b\, h_c = ac_1 + a_1 p_a.$$

De même, la comparaison des triangles semblables BHC, C'AC' d'une part, C'HB', C'A'C d'autre part, donne facilement par une méthode analogue

$$h_b\, h_c = ab_1 + a_1 q_a.$$

Par suite, en ajoutant membre à membre, et remarquant que l'on a

$$p_a + q_a = a,$$

on a

$$2h_b\, h_c = a(a_1 + b_1 + c_1).$$

Donc, en multipliant par $\frac{h_a}{2}$, et posant

$$a_1 + b_1 + c_1 = 2p_1,$$

on a

$$h_a\, h_b\, h_c = 2Sp_1.$$

26. — On a, d'après la formule que nous venons de trouver,

$$h_b\, h_c = ap_1.$$

On trouverait de même

$$h_c\, h_a = bp_1$$
$$h_a\, h_b = cp_1$$

Donc, en ajoutant, on aura

$$h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c = (a + b + c)p_1 = 2pp_1.$$

27. — On sait que l'angle A' est le supplément du double de l'angle A, et que le rayon du cercle des neuf points est la moitié du rayon du cercle circonscrit ; on en déduit

$$a_1 = \text{R} \sin 2\text{A} = a \cos \text{A}$$
$$b_1 = \text{R} \sin 2\text{B} = b \cos \text{B}$$
$$c_1 = \text{R} \sin 2\text{C} = c \cos \text{C}$$

Ajoutons membre à membre, on trouvera

$$a_1 + b_1 + c_1 = a \cos \text{A} + b \cos \text{B} + c \cos \text{C}.$$

Mais on a

$$\frac{a}{\sin \text{A}} = \frac{b}{\sin \text{B}} = \frac{c}{\sin \text{C}} = \frac{2p}{\sin \text{A} + \sin \text{B} + \sin \text{C}};$$

donc on aura

$$2p_1 = p \frac{\sin 2\text{A} + \sin 2\text{B} + \sin 2\text{C}}{\sin \text{A} + \sin \text{B} + \sin \text{C}}.$$

Comme les angles A, B, C sont les angles d'un triangle, la fraction qui est au second membre se réduit à

$$8 \sin \frac{\text{A}}{2} \sin \frac{\text{B}}{2} \sin \frac{\text{C}}{2};$$

donc $$p_1 = 4p \sin \frac{\text{A}}{2} \sin \frac{\text{B}}{2} \sin \frac{\text{C}}{2}.$$

RELATIONS DIVERSES

En appelant R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit et r', r'', r''' les rayons des cercles ex-inscrits tangents respectivement aux côtés a, b, c ; et conservant en outre les autres notations indiquées précédemment, nous aurons les relations suivantes :

28. — On a $$r'' = \frac{\text{S}}{p - b}; \quad r''' = \frac{\text{S}}{p - c},$$

par suite $$r''r''' = \frac{\text{S}^2}{(p - b)(p - c)} = p\,(p - a),$$

de même $$rr' = (p - b)(p - c);$$

on en tire alors $$r''r''' - rr' = 2p^2 - 2pa - bc$$

ou bien $$r''r''' - rr' = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2).$$

Mais nous avons vu précédemment (n° 20) que l'on a

$$h_a h'_a = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2);$$

donc on a $\quad r''r''' - rr' = h_a h'_a$.

On aurait deux autres formules analogues, et en ajoutant on trouverait

$$r'r'' + r''r''' + r'''r' - rr' - rr'' - rr''' = h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

29. — Les formules qui donnent les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits donnent facilement la formule

$$rr'r''r''' = S^2.$$

D'autre part, on a $\qquad R = \frac{abc}{4S}.$

Multipliant les deux membres de cette dernière égalité par $\frac{h_a h_b h_c}{2}$, on trouve facilement après réduction

$$\frac{R\, h_a h_b h_c}{2} = S^2.$$

En comparant cette égalité avec celle précédemment obtenue, on a la relation

$$\frac{r'r''r'''}{h_a h_b h_c} = \frac{R}{2r}.$$

30. —Nous avons vu plus haut (n° 26) que l'on avait la relation

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = 2pp_1;$$

d'autre part on sait aussi que

$$S = Rp_1 = rp.$$

Cette dernière relation nous donne

$$\frac{p^2}{2pp_1} = \frac{R}{2r}.$$

En remplaçant $2pp_1$ par sa valeur, il vient

$$\frac{p^2}{h_a h + h_a h_c + h_b h_c} = \frac{R}{2r}.$$

31. — D'autre part, il est facile de reconnaître que l'on a

$$r'r'' + r''r''' + r'''r'' = p^2.$$

Donc en remplaçant p^2 par sa valeur dans la formule que

nous venons de trouver, et comparant l'égalité ainsi écrite à celle de l'article précédent, nous trouvons

$$\frac{r'r''r'''}{h_a h_b h_c} = \frac{r'r'' + r''r''' + r'''r'}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c}.$$

32. — On a $ah_a = bh_b = ch_c = 2pr = 2S$.
On en tire immédiatement

$$h_a h_b h_c = \frac{(a+b+c)^3}{abc} r^3.$$

33. — La formule bien connue

$$r' + r'' + r''' - r = 4R$$

nous donne, en élevant les deux membres au carré et tenant compte de la formule donnée au n° 29,

$$r'^2 + r''^2 + r'''^2 + r^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Mais d'autre part on a

$$h'^2_a = 4R^2 - a^2$$
$$h'^2_b = 4R^2 - b^2$$
$$h'^2_c = 4R^2 - c^2$$

Ajoutons membre à membre, nous aurons

$$h'^2_a + h'^2_b + h'^2_c = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

On en tire facilement

$$r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 = 4R^2 + h'^2_a + h'^2_b + h'^2_c.$$

34. — Nous avons vu (n° 27) que l'on avait la relation

$$p_1 = 4p \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

Multiplions les deux membres par R, et remplaçons p_1R par son égal pr; nous aurons la formule

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

On aurait de même

$$p_1 = 4(p-a) \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2};$$

en multipliant par R les deux membres et remplaçant p_1R par son égal $(p-a)r'$, on a

$$r' = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$$

On trouvera également

$$r'' = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$r''' = 4R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

35. — En ajoutant membre à membre ces trois dernières formules, on trouve

$$r' + r'' + r''' = 2R\left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right)$$
$$= 3R + R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

36. — On trouverait facilement en prenant les rayons deux à deux, les égalités suivantes :

$$r + r' = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$r' + r'' = 4R \cos^2 \frac{C}{2},$$

et aussi $$r' - r = 4R \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$r'' - r' = 4R \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

et les formules analogues.

On en déduit immédiatement

$$r' + r'' + r''' - 3r = 4R\left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}\right)$$

et aussi

$$3r + r' + r'' + r''' = 4R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

QUESTION 208

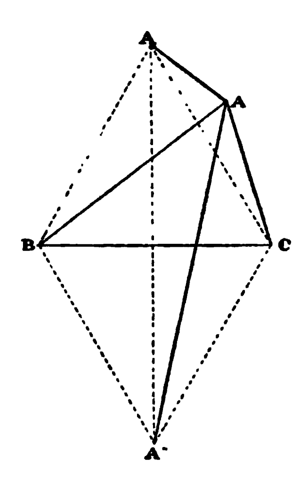
Solution par M. V.-M. Arnaud, élève du Lycée de Nice.

Soit ABC *un triangle; de part et d'autre de* BC *on construit les triangles équilatéraux* A'BC, A"BC; *soit* X *l'angle* A'AA". *Soient de même* Y *et* Z *les angles obtenus de la même façon en prenant les autres côtés. On a la relation*

$$\cos X + \cos Y + \cos Z = 0.$$

(E. Lemoine.)

Soit m^2 l'aire du triangle ABC, et $2k^2$ la somme des carrés des côtés.



On a d'abord

$$\cos X = \frac{AA'^2 + AA''^2 - A'A''^2}{2AA' \times AA''};$$

on a, d'autre part, d'après un théorème connu,

$$AA'^2 + AA''^2 = 2k^2;$$

$$AA'' = \sqrt{k^2 + 2m^2\sqrt{3}};$$

$$AA' = \sqrt{k^2 - 2m^2\sqrt{3}}.$$

Donc

$$AA' \times AA'' = \sqrt{k^4 - 12m^4}.$$

Enfin $A'A''^2 = 3a^2$.

Donc

$$\cos X = \frac{2k^2 - 3a^2}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}}.$$

On aurait de même

$$\cos Y = \frac{2k^2 - 3b^2}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}},$$

$$\cos Z = \frac{2k^2 - 3c^2}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}}.$$

En faisant la somme il vient

$$\cos x + \cos y + \cos z = \frac{6k^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}}$$

$$= \frac{6k^2 - 6k^2}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}} = 0.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Heurtaux, Externat des étudiants nantais; Raymondier, Pensionnat Saint-Louis à Saint-Etienne; Payeux, Collège de Verdun; Huet, à Orléans; Wittenmayer, à Vendôme.

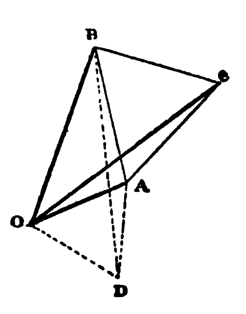
QUESTION 222

Solution par M. d'Ocagne, du Lycée Fontanes.

Mener par un point trois droites de longueurs données telles que leurs extrémités soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Soient OA, OB, OC les droites cherchées.

Construisons sur OA le triangle équilatéral OAD et joignons BD. Les triangles BAD et OAC sont égaux : car AB = AC, AD = OA et BAD = 60° + OAB = OAC. Par suite BD = OC.



D'où la solution : On construit le triangle OBD ayant pour côtés les trois longueurs données, puis on mène OA faisant avec OD un angle de 60° et sur laquelle on prend OA = OD. On achève alors le triangle équilatéral ABC et on tire OC.

Le problème sera possible si l'on peut construire avec les trois droites données le triangle OBD.

NOTA : Ont résolu la même question : MM. Bois, du lycée de Montauban; Marin, à Agen; Huet, à Orléans; Billier et Simon, à Lons-le-Saulnier ; Joly, à Tarbes; Bonneville, à Toulouse ; Heurtaux, à Nantes ; Roubault, à Melun ; Renault, à Bordeaux; H. Bourget, à Aix; Malcor, Lacan, à Toulon; Lachesnais, à Versailles.

QUESTION 223

Solution par M. P. Chrétien, élève au Lycée du Havre.

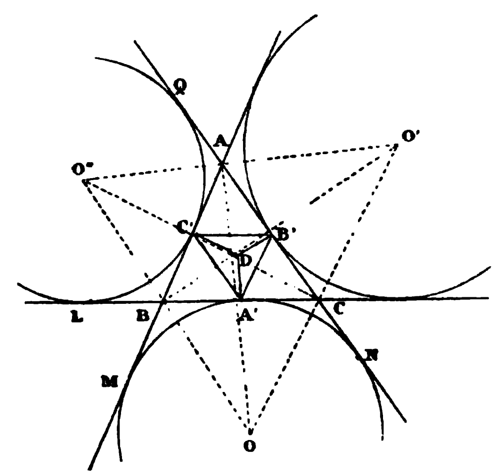
Les six axes radicaux des quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle pris deux à deux sont les bissectrices des angles du triangle formé en joignant les milieux des côtés.

Soit ABC un triangle; OO'O'' les centres des cercles exinscrits, M, N les points de contact des côtés AB, AC avec le cercle O. Si 2μ est le périmètre du triangle ABC, on a AM = AN = μ.

De même si L et Q sont les points de contact de O' avec BC et AC, on a CL = CQ = μ. Donc AN = CQ, par suite CN = AQ et B' étant le milieu de AC, nous aurons B'N = B'Q.

B' est donc un point de l'axe radical des deux cercles O et O''. Cet axe radical est perpendiculaire à OO'', ligne

des centres, par suite parallèle à BO'. Joignons A'B'C' milieux des côtés du triangle ABC. B'D est bissectrice de l'angle A'B'C', car les angles A'BC' et A'B'C' sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et l'ouverture dirigée en



sens contraire et de plus BO' est la bissectrice de ABC. De même les axes radicaux A'D, C'D sont les bissectrices des angles C'A'B' et A'C'B'. Le point D est donc le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Daguillon, du Lycée Henri IV ; Monterou, à Pau ; Deslais, au Mans ; Heurtaux, à Nantes ; Callon, Lycée Louis-le-Grand ; Bénard, à Châteauroux.

QUESTION 225

Solution par M. Louis SICARD, élève du Lycée de Lyon.

Trouver le plus grand des triangles inscrits dans un cercle donné, pour lesquels la différence de deux angles est constante.

Soit ABC l'un de ces triangles inscrits dans un cercle de rayon R. Soit S sa surface, on a

$$S = \frac{ac \sin B}{2}$$

avec $B - C = \omega$.

Or, $a = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

Dès lors $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$;

mais $2 \sin B \sin C = \cos(B - C) - \cos(B + C)$;

dès lors $S = R^2 \sin A (\cos \omega + \cos A)$.

On a donc à chercher le maximum de

$$\sin A (\cos \omega + \cos A),$$

lequel a lieu en même temps que celui de

$$\sin^2 A (\cos \omega + \cos A)^2$$

ou de $(1 + \cos A)(1 - \cos A)(\cos \omega + \cos A)^2$.

Cette expression sera maximum lorsque l'on aura

$$\frac{1}{1 + \cos A} - \frac{1}{1 - \cos A} + \frac{2}{\cos \omega + \cos A} = 0;$$

d'où $2 \cos^2 A + \cos \omega \cos A - 1 = 0$

et $$\cos A = \frac{-\cos \omega \pm \sqrt{8 + \cos^2 \omega}}{4}$$

Les deux valeurs que l'on trouve pour cos A sont réelles. Voyons si elles conviennent toutes les deux.

Un cosinus devant toujours être compris entre $+1$ et -1, on posera

$$\frac{-\cos \omega + \sqrt{8 + \cos^2 \omega}}{4} \leq 1; \qquad (1)$$

d'où $\cos \omega \geq -1$:

cette solution (1) est toujours admissible.

Si l'on pose

$$\frac{-\cos \omega - \sqrt{8 + \cos^2 \omega}}{4} \geq -1, \qquad (2)$$

on en tire $\cos \omega \leq 1$:

cette seconde solution (2) est également admissible. Il y aura donc deux valeurs de l'angle A pour lesquelles le triangle en question sera maximum.

NOTA. — Ont résolu cette question : MM. Bois, de Montauban; Santel, de Perpignan; La Chesnais, à Versailles.

SUR LES TANGENTES AUX POINTS DOUBLES

DE L'INTERSECTION DES SURFACES

Par M. **Songaylo**, examinateur d'admission à l'Ecole centrale
des arts et manufactures.

Théorème. — *Lorsqu'une surface de révolution est tout à la fois touchée et coupée par un plan, le point de contact est un point double de la section.*

Soient (*fig.* 1) : z, z', les projections de l'axe supposé vertical ; μ', μ'_1 la projection verticale du méridien de

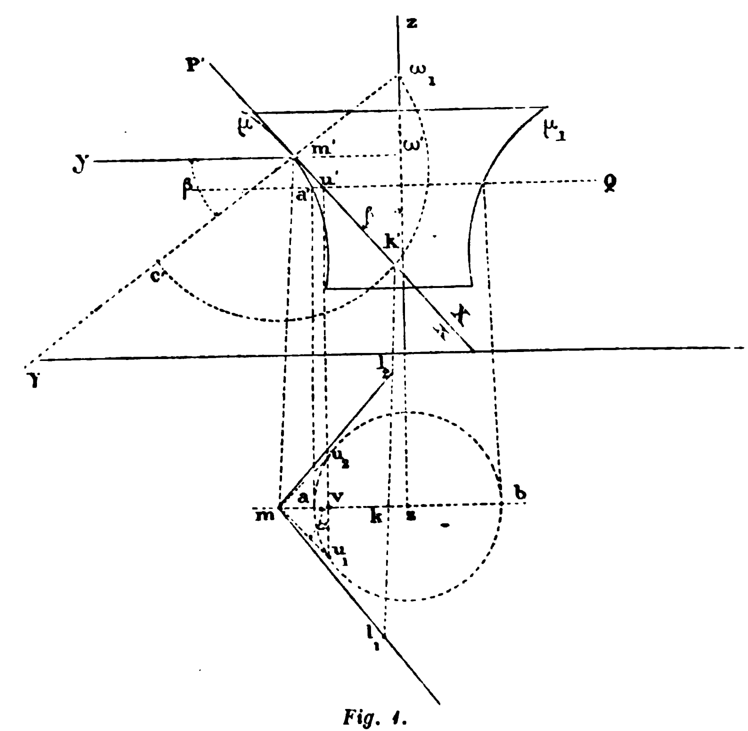


Fig. 1.

front ; m, m' le point de contact, amené, par une rotation autour de z, z' sur ce méridien de front.

La tangente P′, en m', à μ', est la trace verticale du plan tangent au point choisi ; nous l'adopterons pour axe des abscisses et nous prendrons pour axe des ordonnées la parallèle à la ligne de terre menée par m'. Tout d'abord, construisons par l'emploi d'un plan horizontal auxiliaire ayant Q′ pour trace verticale et voisin de m, m', deux points (u_1, u'), (u_2, u') de la section.

En faisant voir que la courbe d'intersection a deux tangentes en m, nous aurons par là même démontré que la courbe dans l'espace présente elle-même au point correspondant M deux tangentes, et que, par suite, ce point est double.

Pour ce but, tirons les droites mu_1, mu_2 ; désignons par v la rencontre des droites u_1u_2, mz et par α l'angle u_1mz. Lorsque le plan horizontal dont Q′ est la trace verticale se déplace en se rapprochant du point m, m', les points u_1, u_2 se déplacent également et se rapprochent de m; il s'ensuit que, à la limite, les droites mu_1mu_2 seront tangentes en m à la projection horizontale de la courbe étudiée. Pour déterminer les positions de ces tangentes, cherchons donc la limite de tang α.

On voit, immédiatement, que l'on a

$$\text{tang}\,\alpha = \pm\,\frac{u_1 v}{mv}.$$

Désignons : par R_1, R les rayons des parallèles placés, respectivement, dans le plan horizontal auxiliaire et dans celui qui contient le point m, m' ; par a', x, y le point de rencontre de μ' avec Q′ et ses coordonnées ; par a, b les points de croisement du plan de front conduit par z, z' avec la projection horizontale du parallèle de rayon R_1, et enfin par β l'angle que fait P′ avec une verticale quelconque. Cela posé, on aura

$$u_1 v = \sqrt{av\,.\,vb} = \sqrt{y\,(2R_1 - y)},$$
$$mv = x \sin\beta.$$

La substitution des valeurs de u_1v et de mv dans la première formule donne ensuite

$$\text{tang}\,\alpha = \pm\,\frac{\sqrt{y\,(2R_1 - y)}}{x \sin\beta}$$

ou bien

$$\operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{1}{\sin \beta} \sqrt{2R_1 \frac{y}{x^2} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Lorsqu'on passe à la limite, R_1 tend vers R et le rapport $\frac{y}{x}$, qui n'est autre chose que le coefficient angulaire de la tangente menée par l'origine à la courbe μ', devient nul; on trouve donc

$$\lim \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{1}{\sin \beta} \sqrt{2R \lim \frac{y}{x^2}}.$$

Tout se réduit actuellement à la recherche de la limite du rapport $\frac{y}{x^2}$.

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe μ'; en développant son second membre par la formule de Mac-Laurin, on trouve

$$y = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{1.2} f''(o) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(o)$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{n+1}(\theta x), \qquad (1)$$

dans laquelle θ est une fraction proprement dite, inconnue.

Dans la présente question $f(o) = o$, $f'(o) = o$, puisque la courbe μ' touche l'axe des abscisses à l'origine; l'équation (1) se peut donc écrire

$$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{1.2} f''(o) + \frac{x}{1.2.3} f'''(o) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots n} f^n(o) + \frac{x^{n-1} f^{n+1}(\theta x)}{1.2.3\ldots n(n+1)}$$

en faisant tendre x vers zéro, on trouve, en général,

$$\lim \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2} f''(o). \qquad (2)$$

La relation cherchée est donc

$$\lim \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{1}{\sin \beta} \sqrt{R f''(o)}. \qquad (3)$$

En général $f''(o)$ n'est pas nul; donc, à cause du double signe compris dans la formule (3), m, m' est un point double de la section.

Les tangentes au point double, nous allons le faire voir

dans un instant, se déterminent facilement en construisant la limite de l'angle α ; mais, antérieurement, cherchons une interprétation géométrique de $f''(o)$.

L'équation de la ligne μ', dans le système xmy, peut s'écrire $x = \varphi(y)$: les fonctions f et φ étant inverses.

Conservons l'axe des abscisses et remplaçons celui des ordonnées par une perpendiculaire Y à $m'x$, menée par m' ; les formules de transformation donnent, en appelant X, Y les coordonnées nouvelles d'un point quelconque de la courbe μ', $\quad x = X + Y \text{ tang } \beta,$

$$y = \frac{y}{\cos \beta};$$

donc, dans le nouveau système d'axes, l'équation de μ' est

$$X = -Y \text{ tang } \beta + \varphi\left(\frac{Y}{\cos \beta}\right).$$

D'autre part, il est manifeste que le rayon de courbure de la courbe μ' en m', que nous désignerons par ρ, est égal à la limite de la sous-normale, comptée sur l'axe $m'Y$, et relative à un point de μ' qui, d'abord voisin de m', se rapprocherait de ce dernier et tendrait à se confondre avec lui. Nous désignerons par (x_1, y_1), (X_1, Y_1) les coordonnées, prises respectivement dans chacun des systèmes d'axes, de ce point voisin ; l'équation correspondante de la normale à μ' sera alors $\quad Y - Y_1 = - X'_1(X - X_1),$
et la sous-normale sera égale à

$$X'_1 X_1,$$

par suite, on aura $\quad \rho = \lim (X'_1 X_1).$

D'ailleurs, de l'équation de la courbe μ' dans le nouveau système d'axes, on tire

$$X'_1 = - \text{tang } \beta + \varphi'(y_1) \frac{1}{\cos \beta};$$

la substitution de la valeur de X'_1 dans celle de ρ donne, puisque X_1 tend vers zéro,

$$\rho = \lim \left[\frac{1}{\cos \beta} X_1 \varphi'(y_1)\right]$$

ou
$$\rho = \frac{1}{\cos \beta} \lim \frac{X_1}{f'(x_1)}$$

ou encore
$$\rho = \frac{1}{\cos \beta} \lim \frac{x_1 - y_1 \sin \beta}{f'(x_1)}.$$

Lorsqu'on donne à x_1 la valeur zéro, la dernière fraction devient indéterminée; remplaçons-la donc par le rapport des dérivées de ses deux termes, ce qui donne

$$\rho = \frac{1}{\cos\beta} \lim \frac{1 - f'(x_1)\sin\beta}{f''(x_1)},$$

en passant à la limite, on trouve

$$\rho = \frac{1}{\cos\beta}\,\frac{1}{f''(0)}$$

ou, finalement,

$$f''(0) = \frac{1}{\rho\cos\beta}. \qquad (4)$$

La relation (3) devient alors

$$\lim \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{R}{\rho\cos\beta}}.$$

Soient: ω' la projection verticale du centre du parallèle qui passe par le point double; ω'_1 la projection de même nom du sommet du faisceau des normales à la surface menées par les divers points de ce parallèle, et c' la projection verticale du centre de courbure, en m, m', du méridien de front. Nous aurons :

$$m'\omega'_1 = \frac{m'\omega'}{\cos\beta} = \frac{R}{\cos\beta};\ m'c' = \rho$$

et, par suite,

$$\lim \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{m'\omega'_1}{m'c'}} = \pm \frac{m'\omega'_1}{\sin\beta\sqrt{m'c' \,.\, m'\omega'_1}}.$$

Décrivons sur ω_1c' comme diamètre une demi-circonférence et soit K' son point de croisement avec P', projetons ensuite K en K', sur zm; on aura alors

$$\sin\beta\sqrt{m'c' \,.\, m'\omega'_1} = mK,$$

et, finalement, $$\lim \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{m'\omega'_1}{mK}:$$

La construction se termine manifestement comme il suit: à partir de K, sur KK' et sur son prolongement, on portera des longueurs Kl_1, Kl_2 égales toutes deux à $m'\omega'_1$ et les droites de jonction des points l_1, l_2 au point m seront les tangentes cherchées.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Jouanne**, professeur au Lycée de Caen.

SYSTÈME DE DIAMÈTRES CONJUGUÉS PARALLÈLES DANS DEUX CONIQUES.

En prenant les équations de deux coniques rapportées à des axes quelconques

$$ax^2 + 2bxy + cx^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$
$$a'x^2 + 2b'xy + c'x^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0,$$

les diamètres conjugués d'une droite de direction m sont donnés par les deux suivantes :

$$ax + by + d = m(bx + dy + e) = 0$$
$$a'x + b'y + d' = m(b'x + d'y + e') = 0.$$

Pour que ces droites soient parallèles, on doit avoir :

$$\frac{a + bm}{a' + b'm} = \frac{b + mc}{b' + mc'},$$

ce qui conduit à l'équation du second degré

$$(bc' + cb')m^2 + ac' + ca')m + (ab' - ba') = 0. \qquad (1)$$

En général, on a donc deux diamètres conjugués parallèles. Les directions sont données par les racines de cette équation; en effet, en prenant pour axe des x l'une d'elles et pour axe des y sa conjuguée, on est conduit à l'équation

$$0m^2 + (ac' - ca')m = 0$$

dont une racine est 0 et l'autre est ∞, c'est-à-dire les directions des deux axes choisis.

Lorsqu'on a $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$, il y a une infinité de diamètres conjugués parallèles.

Il importe de savoir si les racines de (1) sont toujours réelles, ou d'indiquer dans quels cas ce fait se présente.

La condition de réalité est

$$(ac' - ca')^2 - 4(bc' - cb')(ab' - ba') \geq 0, \qquad (2)$$

qu'on peut écrire aussi sous cette autre forme :

$$(2bb' - ac' - ca')^2 - (b^2 - ac)(b'^2 - a'c') \geq 0. \qquad (2 \text{ bis})$$

Cette fonction des coefficients que je désigne par R n'est

autre chose que la résultante ou l'éliminant des équations des directions asymptotiques :

$$f(m) = a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$$
$$\varphi(m) = a'\mu^2 + 2b'\mu + c' = 0.$$

La question est donc ramenée à l'étude de R.

A cet effet il faut considérer les cas suivants :

1° *Deux ellipses*. — En désignant par α et β les racines de $f(m) = 0$ et par α' et β' celles de $\varphi\mu = 0$, on sait que $R = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$.

Dans le cas des ellipses

$$\alpha = p_1 + iq_1 \qquad \alpha' = p_2 + iq_2$$
$$\beta = p_1 - iq_1 \qquad \beta' = p_2 + iq_2.$$

Alors

$$R = a^2[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2][(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2].$$

Cette quantité est essentiellement positive; alors les racines de (1) sont réelles et deux ellipses ont toujours un système de diamètres conjugués parallèles ; c'est ce que montre d'ailleurs la fonction R.

2° *Deux hyperboles*. — Alors α, β, α' et β' sont réelles : supposons d'abord $\alpha' > \alpha > \beta > \beta'$,

alors $R = a^2 (\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\beta' - \alpha)(\beta' - \beta) > 0$

et les racines de (1) sont réelles; ce résultat serait le même pour $\alpha > \alpha' > \beta' > \beta$.

Supposons que $\alpha' > \alpha > \beta' > \beta$; alors $R < 0$ et les racines de (1) sont imaginaires.

Si on a $\alpha' = \alpha$, $R = 0$ et les valeurs de m sont égales : leur valeur commune $-\dfrac{ac' - ca'}{2bc' - cb'}$ est précisément la raison commune aux équations $\varphi(m) = 0$ et $f(m) = 0$. C'est donc une des directions asymptotes.

Or on sait que, dans ce cas, le diamètre se confond avec la direction de la corde conjuguée ; c'est ce qui explique l'égalité des racines.

Alors quand les directions asymptotiques de l'une des coniques renferment celles de l'autre, il y a un système de diamètres conjugués parallèles; autrement il n'y en a pas.

3° *Ellipse et parabole.* — En prenant $R = (2bb' - a'c - ac')^2 - (b^2ac)(b'^2a'c')$, on voit qu'il se réduit à $(2bb' - a'c - ac')^2$ et par conséquent que les racines de (1) sont réelles.

4° *Hyperbole et parabole.* — Alors $R > o$, ou $R = o$; pour $R = o$ la direction de l'axe de la parabole est celle de l'une des asymptotes et on retombe sur les diamètres singuliers.

5° *Ellipse et hyperbole.* — En prenant pour R la forme déjà employée au 3° cas, on voit immédiatement la réalité des racines et l'existence du système de diamètres parallèles.

6° *Deux paraboles.* — Dans ce cas les deux diamètres conjugués parallèles sont toujours réels, et si les axes sont parallèles, il y en a une infinité.

On peut former le tableau suivant qui résume cette discussion :

Deux ellipses, Ellipse et hyperbole, Ellipse et parabole, Deux paraboles.	$R > o$ Certitude de la réalité des diamètres conjugués parallèles.
Deux hyperboles, Hyperbole et parabole.	Incertitude, la réalité dépend des directions des asymptotes.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS PARALLÈLES DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE

En prenant pour axes des coordonnées un système de diamètres conjugués de l'une des deux surfaces, les équations seront :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = o$$

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + F = o.$$

Pour que les plans diamétraux conjugués de la direction donnée par α, β et γ soient parallèles, on doit avoir :

$$\frac{a\alpha + b''\beta + b'\gamma}{A\alpha} = \frac{b''\alpha + a'\beta + b\gamma}{A'\beta} = \frac{b'\alpha + a\beta + a''\gamma}{A''\gamma},$$

et, faisant tous ces rapports égaux à λ, on en tire les trois

équations : $(a - A\lambda)\alpha + b''\beta + b'\gamma = 0;$
$$b''\alpha + (a' - \lambda A')\beta + b\gamma = 0;$$
$$b'a + b\beta + (a'' - \lambda A'')\gamma = 0;$$

Ces équations ne peuvent être compatibles que si l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - \lambda A & b'' & b' \\ b'' & a' - \lambda A' & b \\ b' & b & a'' - \lambda A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du troisième degré a ses racines réelles, comme on peut l'établir.

En effet, si on représente par A, A′, A″, B, B′, B″, les mineurs du premier ordre du déterminant Δ, et par *a*, *a′*, *a″*, *b*, *b′*, *b″*, les mineurs de même ordre du déterminant adjoint dont les éléments sont A, A′, etc...;

Comme on a $d = (a - \lambda A)\Delta$ ou $A'A'' - B^2 = (a - \lambda A)\Delta$, il suffit de connaître le signe de d pour en déduire le *signe* de Δ

$$A' = (a - \lambda A)(a'' - \lambda A'') - b'^2$$
$$A'' = (a - \lambda A)(a' - \lambda A') - b''^2$$

Soit $\frac{a}{A} > \frac{a'}{A'} > \frac{a''}{A''}$; désignons par λ_1 et λ_2 les racines de $A' = 0$; $\lambda_1 > \frac{a}{A} > \frac{a''}{A''} > \lambda_2$.

Pour $\lambda = \infty$ $\quad d > 0, \quad a - \lambda A < 0, \quad \Delta < 0;$
$\lambda = \lambda_1$ $\quad d < 0, \quad a - \lambda A < 0, \quad \Delta > 0;$
$\lambda = \lambda_2$ $\quad d < 0, \quad a - \lambda A > 0 \quad \Delta < 0;$
$\lambda = -\infty$ $\quad d > 0, \quad (a - \lambda A) > 0 \quad \Delta > 0.$

Donc les trois racines sont réelles.

De la réalité des racines de $\Delta = 0$, il ne faut pas conclure l'existence de trois diamètres conjugués parallèles dans les deux surfaces ; il peut arriver que pour chaque racine il y ait une direction à laquelle correspond seulement dans chaque surface un plan diamétral parallèle à l'autre. C'est ce qu'on peut établir en considérant successivement deux surfaces quelconques.

1° *Deux ellipsoïdes ou un ellipsoïde et un hyperboloïde.* — Rien n'est changé dans la direction des diamètres conjugués par une simple translation. Alors on peut amener les deux centres à coïncider.

Prenons pour axe des z la direction donnée par l'une des racines de $\Delta = 0$ et pour plan des xy, le plan diamétral conjugué ; on aura pour les deux surfaces les équations suivantes :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + \gamma + F = 0;$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + \gamma + f = 0.$$

Pour $z = 0$, on a les sections du plan diamétral qui sont deux coniques ayant deux diamètres conjugués communs, ainsi qu'il a été démontré. Il en résulte que deux surfaces à centre dont un ellipsoïde ont toujours un système de diamètres conjugués parallèles.

2° *Ellipsoïde et paraboloïde.* — On peut effectuer une translation du paraboloïde qui place le centre de l'ellipsoïde sur cette surface et alors, en prenant les mêmes axes que précédemment, on a les équations :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + F = 0;$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2\sqrt{aa'}xy + 2ex + 2e'y = 0,$$

et les sections par le plan $z = 0$ sont une ellipse et une parabole ayant deux directions conjuguées parallèles. Donc le système de diamètres conjugués parallèles existe dans ce cas.

3° *Deux hyperboloïdes ou deux cônes.* — Les deux centres étant amenés à coïncider comme précédemment, le plan $z = 0$ donne pour intersection deux hyperboles, et on sait qu'elles n'ont de diamètres conjugués communs que si les asymptotes de l'une renferment celles de l'autre. Il n'y a donc de systèmes de diamètres conjugués parallèles que si les cônes asymptotes transportés parallèlement de manière à ce que le centre soit commun, sont tels que l'un soit intérieur à l'autre.

En suivant la même marche pour d'autres surfaces, on est conduit à former le tableau suivant qui résume toute l'analyse de la question.

Deux ellipsoïdes. Ellipsoïde et hyperboloïde. Id. et cône. Id. et paraboloïde. Id. et cylindre elliptique. Id. et cylindre hyperbolique. Ellipsoïde et cylindre parabolique. Deux paraboloïdes elliptiques. Paraboloïde elliptique et cylindre elliptique. Paraboloïde elliptique et cylindre parabolique. Deux cylindres elliptiques. Cylindre elliptique et parabolique. Deux cylindres paraboliques.	Les trois racines de $\Delta = o$ donnent trois diamètres conjugués parallèles.
Deux hyperboloïdes ou deux cônes. Cône ou hyperboloïde et paraboloïde. Paraboloïde elliptique et hyperbolique. Paraboloïdes hyperboliques. Paraboloïde et cylindre hyperbolique. Cylindre elliptique et hyperbolique. Cylindres hyperboliques.	L'existence du système de trois directions conjuguées parallèles est subordonnée aux positions respectives des cônes asymptotes, plans asymptotes, plans directeurs et axes. Dans le cas de contact il n'y a pas de directions conjuguées parallèles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Solution de la composition mathématique
par M. Janin, élève à l'école préparatoire de Sainte-Barbe.
(Voir l'énoncé, p. 324.)

L'équation d'une hyperbole équilatère passant par les points M et N est

$$x^2 - y^2 + 2mxy + 2pRy - R^2 = 0. \qquad (1)$$

Prenons maintenant un point Q sur le cercle et soient

$$x_0 = R\cos\varphi \qquad y_0 = R\sin\varphi$$

les coordonnées de ce point.

Si de ce point nous menons des tangentes à l'hyperbole équilatère (1), l'équation de la corde des contacts sera :

$$x(\cos\varphi + m\sin\varphi) + y(m\cos\varphi - \sin\varphi + p) + (p\sin\varphi - 1)R = 0. \qquad (2)$$

Joignons maintenant le point Q aux points A et B, où la droite (2) rencontre le cercle donné. Pour trouver plus facilement l'équation du système des droites QA, QB, transportons l'origine des coordonnées au point Q ; nous avons alors

$$x = x' + R\cos\varphi \qquad y = y' + R\sin\varphi \qquad (3)$$

et les équations du cercle et de la droite (2) deviennent :

$$x'^2 + y'^2 + 2R(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi) = 0 \qquad (C)$$

$$x'(\cos\varphi + m\sin\varphi) + y'(m\cos\varphi - \sin\varphi + p) + 2(m\cos\varphi - \sin\varphi + p)R\sin\varphi = 0. \qquad (2)'$$

Pour trouver maintenant l'équation des droites QA et QB, il suffit de former une combinaison homogène des équations (C) et (2)'. Cette combinaison est :

$$(x'^2 + y'^2)(m\cos\varphi - \sin\varphi + p)\sin\varphi = (x'\cos\varphi + y'\sin\varphi) \times [x'(\cos\varphi + m\sin\gamma) + y'(m\cos\varphi - \sin\varphi + p]$$

c'est-à-dire en ordonnant

$$[x'(1 - p\sin\varphi) + y'(m + p\cos\varphi)]x' = 0. \qquad (4)'$$

Telle est l'équation des droites QA et QB, l'origine étant en Q ; pour avoir l'équation de ces droites dans l'ancien système, il faut, dans l'équation (4)', remplacer x' et y' par leurs valeurs tirées des formules (3), ce qui donne l'équation (4)

$$[x(1 - p\sin\varphi) + y(m + p\cos\varphi) - (\cos\varphi + m\sin\varphi)R][x - R\cos\varphi] = 0.$$

En séparant les équations de ces deux droites, on obtient pour l'une l'équation

$$x - R\cos\varphi = 0$$

qui représente une droite parallèle à l'axe des y.

L'autre droite est représentée par l'équation

$$(1 - p\sin\varphi)x + (m + p\cos\varphi)y - (\cos\varphi + m\sin\varphi)R = 0$$

Cette équation peut s'écrire

$$(py - R)\cos\varphi - (px + mR)\sin\varphi + (x + my) = 0.$$

On voit maintenant que, quel que soit φ, cette équation est vérifiée pour

$$y = \frac{R}{p} \qquad x = -\frac{mR}{p};$$

d'où

$$x + my = 0.$$

Par suite, cette droite passe par le point fixe dont les coordonnées sont

$$a = -\frac{mR}{p} \qquad b = \frac{R}{p}. \qquad \text{(P)}$$

Remarque. — Il est facile de voir géométriquement que le point P est le pôle de l'axe des x par rapport à l'hyperbole considérée.

En effet, lorsque le point Q vient en M, la corde des contacts coïncide avec la tangente à l'hyperbole au point M, et des droites QA, QB, l'une devient la tangente au cercle au point M (tangente parallèle à l'axe des y) et l'autre devient la tangente à l'hyperbole au point M.

En répétant la même construction pour le point N, on voit que le point fixe se trouve à l'intersection des tangentes menées aux extrémités de la corde MN, c'est-à-dire est le pôle de MN.

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante est déterminée.

En effet, si l'on joint le point P aux points M et N, on obtient les tangentes PM, PN à l'hyperbole aux points M et N, et l'hyperbole demandée se trouve déterminée sans ambiguïté par deux points et les tangentes en ces points.

Pour construire le centre de cette hyperbole, remarquons qu'il est déterminé par l'intersection des deux droites

$$x + my = 0, \qquad mx - y + pR = 0.$$

Si dans ces équations on remplace m et p par leurs valeurs tirées en fonction des coordonnées du point P, elles deviennent $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $ax + by - R^2 = 0$.

Ces deux droites représentent : la première, la droite qui joint le centre du cercle au point P ; la seconde, la polaire du point P par rapport au cercle.

On obtiendra donc le centre de l'hyperbole en prenant sur le diamètre PO le conjugué harmonique du point P.

Comme on sait faire cette construction, le problème proposé est résolu.

Par le centre C de l'hyperbole menons une parallèle Cx' à l'axe des x ; les deux droites CP, Cx' formeront un système de diamètres conjugués. Il suffit pour le vérifier de remarquer que la droite PO est le diamètre conjugué de la direction Ox.

Pour construire les asymptotes, puisque l'hyperbole est équilatère et que nous connaissons un système de diamètres conjugués, il suffira de mener les bissectrices de l'angle PCx.

Soient CI, CJ ces bissectrices, on obtiendra les axes de l'hyperbole en menant les bissectrices CX, CY de l'angle ICJ.

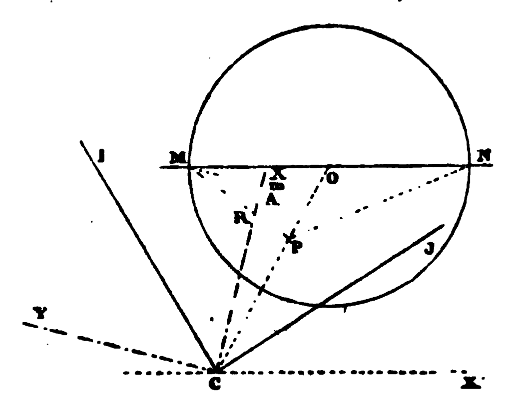


Fig. 1.

Pour construire les sommets de l'hyperbole nous chercherons l'intersection de l'hyperbole avec l'axe transverse.

Nous allons déterminer cet axe transverse.

Après avoir construit le centre et les asymptotes d'après la méthode indiquée précédemment, on mènera les bissectrices de l'angle ICJ (supposons pour fixer les idées que OP soit dans l'angle ICJ); l'axe transverse sera dans l'angle ICJ si le centre C n'est pas entre O et P (*fig. 1*); l'axe transverse sera dans l'angle adjacent si le centre C est entre O et P (*fig. 2*).

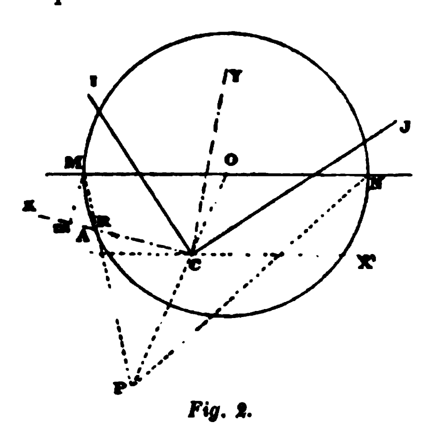


Fig. 2.

Quoi qu'il en soit, après avoir construit l'axe transverse CX, du point M on abaissera une perpendiculaire Mm sur CX e l'on considérera le point R où la tangente MP au point M à l'hyperbole considérée rencontre l'axe CX.

Le point R est le pôle de la droite Mm.

Par suite, les points R, m sont conjugués harmoniques par rapport aux sommets AA' de l'hyperbole et l'on a

$$CA^2 = CA'^2 = CR \cdot Cm$$

relation qui permet de construire les points A et A' à l'aide d'une moyenne proportionnelle.

Cherchons maintenant le lieu des foyers des hyperboles lorsque le point P décrit la droite $y = x$.

Pour cela désignons comme précédemment par a et b les coordonnées du point fixe P; on a

$$pa + mR = 0 \qquad pb = R,$$

d'où l'on tire $\quad m = -1 \qquad p = \dfrac{R}{a};$

Et l'équation de l'hyperbole devient

$$x^2 - y^2 - 2xy + 2py - R^2 = 0.$$

Soient α, β les coordonnées des foyers de cette hyperbole, l'équation de l'hyperbole pourra s'écrire :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 2(x \cos \omega + y \sin \omega - d)^2.$$

L'identification de ces deux équations nous donne les

relations :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} 1 - 2\cos^2\omega = \lambda. \\ 1 - 2\sin^2\omega = -\lambda. \\ 2\cos\omega\sin\omega = \lambda. \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{l} \alpha - 2d\cos\omega = 0. \\ \beta - 2d\sin\omega = -\lambda p. \\ \alpha^2 + \beta^2 - 2d^2 = -\lambda R^2 ; \end{array}\right.$$

Les équations (1) se réduisent à deux. Pour trouver le lieu des foyers, il faut entre ces cinq équations éliminer les quatre paramètres

$$\omega \qquad \lambda \qquad d \qquad p$$

l'élimination peut être simplifiée ; en remarquant que les équations (1), la première et la dernière des équations (2) ne contiennent pas p, nous ne devrons éliminer que

$$\omega \qquad \lambda \qquad d$$

Des deux premières des équations (1) on tire

$$2\cos^2\omega = 1 - \lambda. \qquad 2\sin^2\omega = 1 + \lambda.$$

En multipliant membre à membre il vient

$$4\sin^2\omega\cos^2\omega = 1 - \lambda^2.$$

Et en tenant compte de la troisième relation

$$4\sin^2\omega\cos^2\omega = 1 - \lambda^2 = \lambda^2,$$

on en tire $$\lambda^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \varepsilon\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En représentant par ε la quantité ± 1 ;

En portant cette valeur de λ dans la première des relations (1) on tire

$$\cos\omega = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \varepsilon\sqrt{2}}}{2}.$$

Nous ne prenons pas le double signe, parce que l'on peut toujours choisir arbitrairement le signe de l'une des trois quantités $\cos\omega \qquad \sin\omega \qquad d$

le signe des deux autres se trouvant par là déterminé.

Nous connaissons maintenant λ et $\cos\omega$, qui sont les seuls paramètres des équations (1) qui entrent dans les relations

$$\alpha - 2d\cos\omega = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2d^2 + \lambda R^2 = 0.$$

Entre ces relations éliminons d.

De la première on tire :

$$d = \frac{\alpha}{2 \cos \omega};$$

portant dans la seconde, il vient, en remplaçant $\cos^2 \omega$ et λ par leurs valeurs,

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2\alpha^2}{2 - \varepsilon\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} R^2 = 0.$$

Pour faire disparaître l'irrationnelle en dénominateur, multiplions les deux termes de la fraction

$$\frac{2\alpha^2}{2 - \varepsilon\sqrt{2}}$$

par la quantité $\quad 2 + \varepsilon\sqrt{2}$

et remarquons que $\quad \varepsilon^2 = 1;$

nous aurons $\quad \dfrac{2\alpha^2}{2 - \varepsilon\sqrt{2}} = \alpha^2 \left(2 + \varepsilon\sqrt{2}\right)$

et l'équation du lieu des foyers devient alors

$$\left(\varepsilon\sqrt{2} - 1\right) \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} R^2 = 0.$$

Si dans cette équation on remplace successivement ε par ± 1, on obtient les deux équations :

$$\left(\sqrt{2} - 1\right) \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} R^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{2} + 1\right) \alpha^2 - \beta^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} R^2 = 0.$$

La première de ces équations représente une ellipse rapportée à ses axes. Les longueurs des axes sont

$$a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} - 1} R^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{2} + 1\right) R^2$$

$$b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} R^2$$

et le carré de la demi-distance focale est

$$c^2 = a^2 - b^2 = R^2,$$

ce qui montre que les foyers de l'ellipse sont les points M et N.

La seconde équation représente une hyperbole rapportée

à ses axes. Les longueurs des axes sont

$$a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} R^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} - 1) R^2$$

$$b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} R^2$$

et le carré de la demi-distance focale a pour expression

$$c^2 = a^2 + b^2 = R^2.$$

Les foyers sont encore les points M et N.

Le lieu des foyers des hyperboles équilatères de l'énoncé se compose d'une ellipse et d'une hyperbole ayant pour foyers les points M et N.

Cherchons les points d'intersection de ces coniques avec le cercle donné.

L'équation de ces coniques est

$$(\varepsilon \sqrt{2} - 1) x^2 + y^2 - \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} R^2 = 0$$

et l'équation du cercle est $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

Multiplions la seconde de ces équations par $-\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}$ et ajoutons-la à la première, il vient :

$$\left(\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} - 1\right) x^2 + \left(1 - \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}\right) y^2 = 0$$

ou

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Cette équation représente les deux bissectrices de l'angle des axes de coordonnées.

Comme elle ne dépend pas de ε, il en résulte que les deux coniques du lieu se coupent sur le cercle aux points situés sur les bissectrices.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

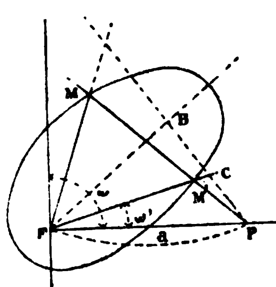
Par M. **Nettre**, élève de Mathématiques spéciales, à Sainte-Barbe.

La propriété que l'auteur s'est proposé d'établir n'est, en réalité, pas nouvelle ; mais la démonstration qu'il nous a apportée nous semble originale, et le corollaire qu'il en a déduit n'est pas sans intérêt. Cette propriété est la suivante :

Si, par un point fixe P, *pris dans le plan d'une conique, on trace diverses sécantes et qu'on joigne à un foyer les points où chaque sécante rencontre la courbe, les lignes de jonction ainsi obtenues forment avec la droite qui joint le foyer au point fixe* P *des angles* ω *et* ω' *satisfaisant aux deux relations suivantes :*

$$\frac{\cos\frac{\omega+\omega'}{2}}{\cos\frac{\omega-\omega'}{2}} = C^{te} \qquad \text{et} \qquad tg\,\frac{\omega}{2}\,tg\,\frac{\omega}{2} = C^{te}.$$

Prenons pour axes de coordonnées la droite FP et la perpendiculaire élevée à cette droite au foyer F. L'équation de la conique donnée, par rapport à ces axes, est



$$x^2 + y^2 = e^2U^2,$$

e étant l'excentricité de la conique, et $U = o$, l'équation de la directrice correspondant au foyer F. On sait que $U = x \cos \alpha + y \sin \alpha$

L'équation d'une droite quelconque du plan peut être écrite sous la forme

$$mx + ny + \lambda U = o^1. \qquad (1)$$

Si l'on appelle ρ et ω, ρ' et ω' les coordonnées polaires des points M et M' par rapport au point F, pris pour pôle, et à l'axe FP pris pour axe polaire, on aura, en exprimant que la droite précédente (1) passe par les points M et M',

$$m\rho \cos \omega + n\rho \sin \omega + \lambda U = o,$$

x et y étant remplacées dans U par les coordonnées des points considérés. Or, ces points étant sur la conique, on a:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = e^2U^2,$$

d'où
$$U = \frac{\rho}{e}.$$

Par conséquent, pour les points M et M', on aura:

$$m\rho \cos \omega + n\rho \sin \omega + \lambda \frac{\rho}{e} = o$$

et
$$m\rho' \cos \omega' + n\rho' \sin \omega' + \lambda \frac{\rho'}{e} = o.$$

En joignant à ces deux conditions l'équation générale $mx + ny + \lambda U = 0$, on obtiendra l'équation de la droite particulière MM′ en éliminant m, n et λ entre ces trois relations homogènes. Le résultat de cette élimination est le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & U \\ \cos\omega & \sin\omega & \frac{1}{e} \\ \cos\omega' & \sin\omega' & \frac{1}{e} \end{vmatrix} = 0$$

c.-à-d.

$$x\frac{\sin\omega - \sin\omega'}{e} + y\frac{\cos\omega' - \cos\omega}{e} + U(\cos\omega\sin\omega' - \sin\omega\cos\omega') = 0$$

ou

$$2x\sin\frac{\omega-\omega'}{2}\cos\frac{\omega+\omega'}{2} + 2y\sin\frac{\omega-\omega'}{2}\sin\frac{\omega-\omega'}{2} + eU\sin(\omega'-\omega) = 0$$

ou enfin

$$x\cos\frac{\omega+\omega'}{2} + y\sin\frac{\omega+\omega'}{2} - eU\cos\frac{\omega-\omega'}{2} = 0.$$

Si l'on écrit alors que cette droite passe au point fixe P $\left(\begin{matrix} y = 0 \\ x = a \end{matrix}\right)$, il vient :

$$a\cos\frac{\omega+\omega'}{2} - eU\cos\frac{\omega-\omega'}{2} = 0$$

c.-à-d.

$$\frac{\cos\frac{\omega+\omega'}{2}}{\cos\frac{\omega-\omega'}{2}} = \frac{eU}{a} = \frac{e(a\cos\alpha - p)}{a}$$

ce qui constitue la première relation énoncée.

Cette formule peut s'écrire :

$$\frac{\cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2} + \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2}} = \text{constante}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}} = K$$

en appelant K la constante.

Il en resulte :

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}(K+1)=1-K;$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}=\frac{1-K}{1+K}=\frac{a-(a\cos\alpha-p)e}{a+(a\cos\alpha-p)e}=C^{te}.$$

C'est la seconde relation énoncée.

Corollaire. — La première formule conduit à une propriété remarquable de l'ellipse.

Si l'on mène la bissectrice FB de l'angle MFM′, l'angle BFP est égal à $\frac{\omega+\omega}{2}$; pour avoir son cosinus, il suffit d'abaisser du point fixe P une perpendiculaire PB sur la bissectrice, et en prolongeant FM′ jusqu'à la rencontre en C de cette perpendiculaire, on a

dans le triangle FBC :

$$FB = FC\cos\frac{\omega-\omega}{2},$$

et dans le triangle FBP :

$$FB = FP\cos\frac{\omega+\omega'}{2}.$$

Par suite :

$$\frac{FC}{FP}=\frac{\cos\frac{\omega+\omega'}{2}}{\cos\frac{\omega-\omega'}{2}}=\frac{e(a\cos\alpha-p)}{a}=K.$$

Donc $\qquad FC = K\,.\,FP = Ka = C^{te}.$

On voit donc, par cette dernière considération, que, *si l'on joint un point fixe du plan à un foyer, que par le point fixe on mène une sécante* PMM′ *à travers la courbe, et que de ce point* P *on abaisse une perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle* MFM′, *les segments interceptés par cette perpendiculaire sur les rayons vecteurs* FM, FM′ *sont constants. De plus, le lieu des points* C, *où la perpendiculaire rencontre le rayon* FM′ *prolongé, est un cercle.*

QUESTION 234

Solution par M. Moulines, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Pierron).

Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position. Son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers.

Soient $2a$, $2b$ les longueurs des axes d'une ellipse. Soit $2a'$ la longueur du diamètre AA' donné de grandeur et de position et $2b'$ la longueur du diamètre donné de grandeur seulement.

On a
$$AF + A'F = 2a;$$
élevant au carré
$$(1) \qquad AF^2 + A'F^2 + 2AF \cdot A'F = 4a^2.$$
Mais dans le triangle AFA' on a
$$AF^2 + A'F^2 = 2OF^2 + 2a'^2.$$
Dès lors, l'égalité (1) devient
$$AF \cdot A'F = 2a^2 - a'^2 - \overline{OF}^2$$
et comme
$$OF^2 = a^2 - b^2$$
et
$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$
$$AF \cdot A'F = b'^2.$$

Le lieu est donc une *ovale de Cassini* ayant pour pôles A et A' et b'^2 pour puissance.

Remarque I. — Si $b' = a'$, c'est-à-dire si l'on donne seulement un des diamètres conjugués égaux de grandeur et de position, on aura $AF \cdot A'F = \dfrac{AA'^2}{4}$ et le lieu sera une *lemniscate*.

Remarque II. — En cherchant le même lieu pour une hyperbole en se donnant la longueur géométrique du diamètre conjugué imaginaire, on obtiendrait la même équation : car il suffirait pour avoir le lieu de changer le signe du produit AF . AF' et le signe de b'^2.

Remarque III. — Dans l'hyperbole équilatère, tous les diamètres conjugués ont même longueur géométrique. Donc,

le lieu des foyers des hyperboles équilatères qui ont m[illegible] centre et passent par un point commun est une *lemnisc*[illegible] ayant pour pôles le point donné et son symétrique [illegible] rapport au centre.

Nota. — La même question a été aussi résolue par M. V. Arnaud, élè[illegible] mathématiques spéciales au lycée de Nice.

QUESTION 244.

Solution par M. A. Coignard, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Étant donnée une conique qui passe à l'origine des axes supp[illegible] *rectangulaires, on considère les cordes de cette conique qui so*[illegible] *vues sous un angle droit; par les extrémités de chacune de ces cordes et par l'origine on fait passer un cercle; on demande le lieu des centres de tous ces cercles.*

Soit la conique rapportée à une tangente et à la normale, son équation sera

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0;$$

on sait d'après le théorème de Frégier que toutes les cord[illegible] considérées passent par un point fixe sur la normale. Soi[illegible] son ordonnée; on a à trouver le lieu des milieux de la cor[illegible]

$$y - \beta = mx.$$

Il suffit donc d'éliminer m entre cette équation et l'équatio[illegible] du diamètre conjugué de la direction m, qui est

$$f'_x + mf'_y = 0;$$

le lieu est donc $f'_x + \dfrac{y-\beta}{x} f'_y = 0.$

On voit sous cette forme que le lieu cherché est un[illegible] conique qui passe par le centre de la conique donnée.

Cette équation développée devient

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + (E - C\beta)y - B\beta x - E\beta x - E\beta = 0.$$

Ce lieu passe par le point d'ordonnée β et situé sur l'axe des y. C'est une conique homothétique à la conique proposée.

Nota. — Ont résolu cette question : MM. Comandré, élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Pierron); Lestoquoy, du lycée de Saint-Quentin; Hugot et Simon, du lycée de Lyon; Gino Loria, à Mantoue; Libmann, collège Stanislas, à Paris.

QUESTION 245

Solution par M. D. Comandré, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Etant données deux courbes S *et* S_1 *par leurs équations, dans un système de coordonnées polaires, on suppose que l'on sache construire les tangentes à ces courbes en deux points* M *et* M_1, *situés sur un même rayon vecteur; on demande d'en déduire la tangente au point* M_2, *situé sur le même rayon vecteur dans la courbe* S_2, *qui est le lieu des milieux des distances telles que* MM_1 *dans les deux courbes proposées.*

Considérons les deux courbes

$$\rho = f(\omega), \qquad (1)$$

$$\rho = \varphi(\omega). \qquad (2)$$

La courbe considérée sera

$$\rho = \frac{f(\omega) + \varphi(\omega)}{2}. \qquad (3)$$

Les sous-normales à (1) et à (2) sont respectivement $-f'(\omega), -\varphi'(\omega)$. Or, la sous-normale à (3) est $-\dfrac{f'(\omega)+\varphi'(\omega)}{2}$ c'est-à-dire la demi-somme des sous-normales à (1) et à (2).

Donc, on connaît la sous-normale à (3), car on connaît les tangentes à (1) et (2); par suite, on a la tangente en M_2 à la courbe (3).

Nota. — On peut remarquer que quand on connaîtra plusieurs courbes et les tangentes à ces courbes, si on en considère une dont le rayon vecteur soit une fonction linéaire et homogène des rayons vecteurs des premières, on pourra construire la tangente à cette courbe en un point quelconque.

En effet, soient $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots \rho_n$ les ρ de plusieurs courbes. Soit une courbe définie par la relation

$$R = a\rho_1 + b\rho_2 + c\rho_3 + \ldots\ldots \quad n\rho_n :$$

on remarque que si on prend la dérivée on a

$$R' = a\rho'_1 + b\rho'_2 + c\rho'_3 \dots + n\rho'_n .$$

Donc, on connaît la sous-normale à la courbe R. D
on connaît la tangente.

NOTA. — Cette question a été résolue par MM. Coignard, élève au
Saint-Louis; Landre, élève du Prytanée militaire de La Flèche; de Prat, à l

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. M. D'OCAGNE, élève au lycée Fontanes.

Soit O le pôle. La normale à l'enveloppe de la droite
est la perpendiculaire à cette droite menée par le point
Appelons N et N_1 les points où cette perpendiculaire co
les normales en M et M_1 aux courbes correspondantes. Pr
nons le milieu N_2 de NN_1. La ligne M_2N_2 est la normale a
lieu de M_2 (*); on en déduit la tangente.

BIBLIOGRAPHIE

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE *(1er volume)*, *par M.* **E. Jurisch**, *pro-
seur aux Écoles supérieures municipales Colbert et J.-B. Say. — Par
librairie Delagrave.*

Les élèves de mathématiques élémentaires paraissent, en général, as
rebelles à l'étude de la géométrie descriptive; cela tient, croyons-nous, à
que les ouvrages qui exposent les éléments de cette science n'insistent p
assez sur les petits problèmes qui constituent ce que l'on peut app
l'*alphabet* de la géométrie descriptive.

Le volume que nous signalons aujourd'hui contient, dans une premi
partie, ces petits problèmes exposés dans un ordre méthodique et dévelop
assez simplement pour que les élèves puissent se les approprier rapidem
lorsqu'ils posséderont ces éléments, ils seront à même de faire des épu
analogues à celles qui leur sont demandées aux examens.

La seconde partie du volume, qui traite des *polyèdres* et de la *sphère*, re
ferme d'ailleurs de nombreuses applications de ces problèmes élémentaires;
elles achèveront d'en montrer l'utilité aux élèves.

L'emploi des *projections obliques* pour résoudre certaines questions tend à
s'introduire dans l'enseignement, et il n'existe, à notre connaissance, aucu
ouvrage élémentaire qui en fasse une étude spéciale; les principes et le
applications élémentaires de la méthode des projections obliques que l'auteur
a placés à la fin du volume constituent donc une innovation qui, si modeste
qu'elle soit, mérite d'être remarquée.

(*) Voir Mannheim, *Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique*,
p. 174.

Signalons aussi les *deux cents questions* comprises dans ce volume; un certain nombre d'entre elles, proposées aux examens divers, contiennent des données numériques permettant aux élèves de s'exercer en vue de l'épure qui leur sera imposée dans les épreuves de fin d'année.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

266. — On donne un point P dans l'intérieur d'un triangle ; par ce point, on mène des parallèles aux côtés ; la parallèle à AC rencontre les côtés aux points 1 et 4 ; la parallèle à BC rencontre les côtés aux points 2 et 5 ; enfin la parallèle à AB rencontre les côtés aux points 3 et 6 ; en joignant les points 1, 3, 5 on forme un triangle ; de même pour les points 2, 4, 6. On demande : 1° de démontrer que ces deux triangles sont équivalents ; 2° de déterminer le point P de façon que le triangle (1, 3, 5) soit maximum.

267. — On donne dans un plan deux circonférences qui se coupent en A, et un point B. On demande de décrire de B comme centre une circonférence telle que deux des points C et D où elle coupe les deux premières soient en ligne droite avec le point A. En outre, on suppose que le point B parcourt la plus grande des deux circonférences ; par chacune de ses positions, on mène une parallèle à la direction correspondante ACD. Démontrer que cette parallèle est constamment tangente à une certaine ellipse fixe, que l'on propose de déterminer. *(Vazou.)*

268. — Sur les trois côtés d'un triangle quelconque comme diamètre, on décrit des circonférences et on mène les tangentes communes à ces circonférences, prises deux à deux. Démontrer que la somme des carrés des inverses des tangentes est égale au carré de l'inverse du rayon du cercle inscrit. *(Blessel.)*

269. — Par un point donné dans un angle, et également distant de ses deux côtés, mener une droite terminée à ces

mêmes côtés de telle sorte que le point donné la divise e deux segments dont la somme des carrés soit donnée.

(Conc. gén. 1819.)

270. — Résoudre un triangle connaissant un cô l'angle opposé et le produit d'un des côtés inconnus par l somme ou la différence de ces deux côtés.

Mathématiques spéciales.

271. — Trouver le coefficient du terme en x^p dans l développement suivant :

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1})^2$$

(F. Fabre.)

272. — Vérifier l'identité

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots (1 + x^{p})$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k,$$

et exprimer K en fonction de p. *(F. Fabre.)*

273. — Si m désigne un nombre entier positif, à quelle condition doit-il satisfaire pour que $(x + y)^m - (x^m + y^m)$ soit divisible par $x^2 + xy + y^2$? *(F. Fabre.)*

274. — Étant donné l'arc $2a$, effectuer la somme S déterminée par la formule

$$S = 3 + \sin^4 a + \cos^4 a + \sin^6 a + \cos^6 a + \sin^8 a$$
$$+ \cos^8 a + \dots + \sin^{2n} a + \cos^{2n} a + \dots$$

275. — La somme de n nombres positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, multipliée par la somme de leurs inverses, ne peut jamais être égale à n^2 ; en d'autres termes, l'équation

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)\left(x_1 + x_2 + \dots + x_n\right) = n^2$$

est toujours impossible, sauf pour $x_1 = x_2 = x_3 \dots = x_n = 1$.

(De Longchamps.)

Le Rédacteur-Gérant.
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS — 20578-0.

NOTE

SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES

(*Suite*, voir page 481.)

10. — Lorsqu'une fraction dont le dénominateur est premier donne naissance à une période non complète, le nombre de chiffres de la période est impair.

Dans l'égalité $$\frac{1}{N}=\frac{p}{D}$$
on sait que D est de la forme $10^k - 1$, k étant le nombre de chiffres de la période. Je dis que si la période n'est pas complète, k est impair. En effet, supposons que k soit pair, et égal à $2k'$. On aurait alors
$$\frac{1}{N}=\frac{p}{10^{2k'}-1}=\frac{p}{(10^{k'}+1)(10^{k'}-1)}.$$
N, étant premier, doit diviser l'un des deux facteurs du dénominateur; supposons d'abord qu'il divise $10^{k'}+1$; on aurait $$10^{k'}+1=Nq,$$
d'où l'on tirerait $$\frac{1}{N}=\frac{\dfrac{q}{10^{k'}}}{1+\dfrac{1}{10^{k'}}}$$
et nous avons vu que si la fraction $\frac{1}{N}$ se présente sous cette forme, la fraction est complète, ce qui est contre l'hypothèse. Si au contraire N divise le facteur $10^{k'}-1$, on tire $$\frac{1}{N}=\frac{\dfrac{q}{10^{k'}}}{1-\dfrac{1}{10^{k'}}}$$
et par suite la période n'aurait que k' chiffres, ce qui est encore contre l'hypothèse. Donc k est forcément impair.

11. — Nous venons de voir que si N est un diviseur de 10^k+1, la période est complète. Réciproquement, si N

donne naissance à une fraction décimale à période complète, N est un diviseur de $10^k + 1$.

En effet, soit $2k$ le nombre des chiffres de la période, x la première partie de cette période, on a (4)

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x+1}{10^k}}{1 + \frac{1}{10^k}} = \frac{x+1}{10^k+1};$$

donc N doit diviser $10^k + 1$.

Donc on trouvera les diviseurs premiers qui donnent naissance à des périodes complètes en cherchant les facteurs premiers de $10^k + 1$, où l'on donne à k les valeurs entières 1, 2, 3, 4....

12. — Nous allons nous proposer, connaissant le nombre de chiffres de la période correspondant à la fraction $\frac{1}{N}$, N étant premier, d'en déduire le nombre de chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N^2}$.

D'abord, en appelant p la période, qui contient par hypothèse k chiffres, on en déduit

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{10^k - 1}.$$

Si p est divisible par N, on a $p = Nq$, et par suite

$$\frac{1}{N^2} = \frac{q}{10^k - 1};$$

donc, dans ce cas, la fraction correspondant à $\frac{1}{N^2}$ contient autant de chiffres à la période que la fraction correspondant à $\frac{1}{N}$.

Mais supposons que p ne soit pas divisible par N; posons alors

$$p = Np + r;$$

r, étant inférieur à N, est nécessairement premier avec lui.

Cela posé, prenons deux périodes au numérateur; on sait que l'on a encore une fraction égale à la fraction proposée, et on a

$$\frac{1}{N} = \frac{p.10^k + p}{10^{2k} - 1}.$$

Mais on a par hypothèse

$$10^k - 1 = SN,$$

donc $$10^k = SN + 1$$

et par suite

$$\frac{1}{N} = \frac{(qN + r)(SN + 1) + (qN + r)}{10^{2k} - 1} = \frac{TN + 2r}{10^{2k} - 1},$$

On trouverait de même, en prenant trois périodes :

$$\frac{1}{N} = \frac{VN + 3r}{10^{3k} - 1},$$

et ainsi de suite; or, il faut que le numérateur, *formé d'un nombre entier de périodes*, soit divisible par N, pour qu'on puisse en déduire le nombre de chiffres de la période de $\frac{1}{N^2}$: mais, d'après la forme du numérateur, il faut, pour que cette condition soit remplie, que l'on prenne N périodes ; donc, en général, le nombre de chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N^2}$ est Nk.

On verrait de même que, si la période correspondant à $\frac{1}{N^2}$ n'est pas divisible par N, le nombre de chiffres de la période de $\frac{1}{N^3}$ est N^2k, et ainsi de suite.

3. — La période correspondant à $\frac{1}{N_h}$, N, étant un nombre premier, est de même nature que la période correspondant à $\frac{1}{N}$, c'est-à-dire complète ou incomplète en même temps que cette dernière.

En effet, soit k le nombre des chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N}$; le nombre des chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N^h}$ sera, d'après ce qui précède, égale à $N^{h'} k$, h' étant un entier égal ou inférieur à $h - 1$; or N étant premier, $N^{h'}$ est impair ; donc $N^{h'}.k$ sera pair ou impair en même temps que k.

14. — Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible est formé d'un produit de facteurs premiers, aucun des restes n'est divisible par un des facteurs premiers du dénominateur.

Soit la fraction $\frac{a}{bc}$, que je suppose irréductible ; je dis que je ne pourrai pas obtenir un reste divisible par b ou par c ; en effet, supposons que, après k opérations, j'aie un reste divisible par b par exemple, j'aurais

$$a \times 10^k = bc \times q + bm = bQ,$$

donc $a \times 10^k$ serait divisible par b, ce qui est impossible.

Cela nous indique immédiatement combien il y a au plus de chiffres à la période d'une fraction dont le dénominateur est composé de plusieurs nombres premiers ; en effet, prenons par exemple la fraction $\frac{1}{NN'}$. Parmi les $NN' - 1$ restes possibles, il y en a $(N' - 1)$ divisibles par N, et aussi $(N - 1)$ divisibles par N' ; on ne pourra pas les obtenir, et par suite il en restera au plus

$$NN' - 1 - (N' - 1) - (N - 1) = (N - 1)(N' - 1).$$

Donc le nombre des chiffres de la période sera $(N - 1)(N' - 1)$ ou un sous-multiple de ce nombre.

Si nous prenons de même la fraction $\frac{1}{NN'N''}$, nous verrons que, parmi les $NN'N'' - 1$ restes possibles, il y en a qui sont multiples de N, et dont le nombre est $N'N'' - 1$; d'autres, au nombre de $N''N - 1$, sont divisibles par N' ; d'autres encore, au nombre de $NN' - 1$, sont divisibles par N'' ; enfin il y en a $N - 1$ divisibles par $N'N''$; $N' - 1$ divisibles par $N''N$; $N'' - 1$ divisibles par NN'. En retranchant tous ces restes, que l'on ne peut avoir, on voit facilement qu'on peut en trouver un nombre marqué par

$$(N - 1)(N' - 1)(N'' - 1) ;$$

donc ce nombre, ou un de ses sous-multiples, marquera le nombre de chiffres de la période correspondant à la fraction considérée.

15. — On sait que, au lieu de prendre pour représenter une fraction décimale périodique, une fraction ordinaire

dont le numérateur est la période, et le dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à la période, on peut prendre au numérateur n périodes, à la condition que le dénominateur contiendra un nombre de 9 égal à n fois le nombre de chiffres de la période. Je dis que l'on ne pourrait pas prendre un nombre de 9 qui ne fût pas un multiple du nombre de chiffres de la période.

En effet, désignons par A le numérateur de la fraction que l'on formerait ainsi, et qui aurait autant de chiffres que le dénominateur; posons

$$\frac{1}{N} = \frac{A}{10^{nk+r} - 1};$$

appelons p le nombre formé en prenant n périodes ; on a

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{10^{nk} - 1} = \frac{p.10^r}{10^{nk+r} - 10^r}.$$

On en déduit, par une propriété connue

$$\frac{1}{N} = \frac{A - p.10^r}{10^r - 1};$$

donc la période correspondant à $\frac{1}{N}$ n'aurait que r chiffres au lieu de k chiffres, ce qui est contre l'hypothèse.

16. — Cela posé, nous allons démontrer le théorème important suivant :

Le nombre de chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N.N'.N''\ldots}$ est égal au plus petit commun multiple des nombres de chiffres des périodes correspondant aux fractions $\frac{1}{N}, \frac{1}{N'}, \frac{1}{N''}\ldots$

D'abord, le nombre de chiffres de la période correspondant à la fraction composée est un multiple commun des nombres de chiffres des autres périodes; en effet, on a, en appelant D' le dénominateur de la fraction composée

$$\frac{1}{NN'N''} = \frac{p}{D'};$$

d'où $$\frac{1}{N} = \frac{N'N''p}{D'}; \quad \frac{1}{N'} = \frac{N''Np}{D'}, \text{ etc.}$$

donc le nombre de chiffres de D' est un multiple du nombre de chiffres des périodes correspondant aux fractions $\frac{1}{N}$, $\frac{1}{N'}$...

En outre, je dis que D' a précisément un nombre de chiffres égal au plus petit commun multiple des nombres de chiffres des autres périodes. Pour le prouver, je vais prendre deux fractions irréductibles, $\frac{1}{N}$ et $\frac{1}{N'}$. Je prendrai un dénominateur D formé d'autant de 9 qu'il y a d'unités dans le plus petit commun multiple des nombres de chiffres des périodes; alors je prendrai un nombre correspondant de périodes dans chaque fraction, et j'aurai

$$\frac{1}{a} = \frac{P}{D}; \quad \frac{1}{b} = \frac{P}{D}.$$

d'où
$$\frac{a+b}{ab} = \frac{P+P'}{D}.$$

Or, la fraction $\frac{a+b}{ab}$ est irréductible, puisque a et b sont premiers, donc P + P' est divisible par $(a+b)$; appelons p le quotient, nous aurons $\frac{1}{ab} = \frac{p}{D}$;

donc la fraction $\frac{1}{ab}$ donnera naissance à une fraction dont la période ne contiendra pas plus de chiffres qu'il n'y a d'unités dans le plus petit commun multiple des nombres de chiffres des périodes de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$; du reste, d'après la première partie du raisonnement, il ne peut pas y en avoir moins ; le théorème est donc démontré pour ce cas.

c étant premier avec ab, le théorème s'applique en considérant la fraction $\frac{1}{abc}$ comme provenant de la fraction $\frac{1}{ab}$, combinée avec la fraction $\frac{1}{c}$, et ainsi de suite.

17. — Cette proposition nous permet de résoudre la question suivante, qui a été donnée dans des concours : Trouver

tous les nombres N tels que la période de $\frac{1}{N}$ ait p chiffres décimaux. Il suffit évidemment que N soit diviseur de $10^p - 1$; on formera donc les diviseurs de 10^p; parmi ces diviseurs se trouveront toujours 3 et 9, qui ne donnent qu'un chiffre à la période et que l'on laissera de côté. Si le nombre p est formé du produit de deux nombres entiers, a et b, on laissera de côté ceux des diviseurs de $10^p - 1$ qui sont diviseurs de $10^a - 1$, ou de $10^b - 1$, et ainsi de suite.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Maurice d'Ocagne,** élève au Lycée Fontanes.

On considère trois circonférences passant par un même point et se coupant deux à deux sur une droite : 1° par un point de cette droite, on mène une tangente à chacune des trois circonférences ; les points de contact de ces tangentes et le point commun aux trois circonférences sont sur une même circonférence ; 2° les points diamétralement opposés au point commun dans les trois circonférences sont sur une même circonférence avec ce point commun.

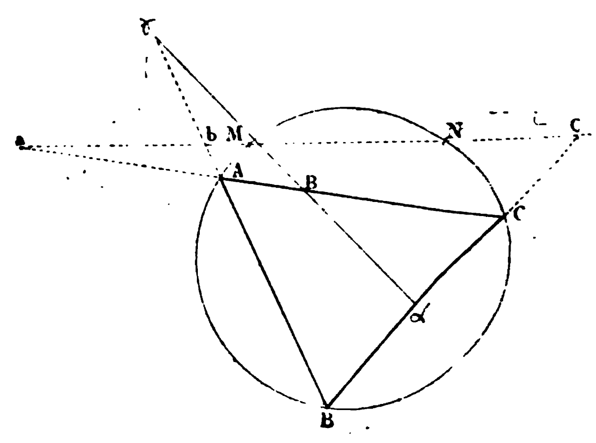
1° Transformons par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle le point commun aux trois circonférences et un module quelconque.

Les trois circonférences se transforment en trois droites. Comme ces circonférences se coupaient deux à deux sur une droite, leurs transformées se coupent deux à deux sur une circonférence passant par le pôle. L'inverse du point d'où on menait les tangentes se trouve sur cette circonférence. Quant aux tangentes qui étaient issues de ce point, elles se transforment en circonférences passant par le pôle et l'inverse de leur point de concours, et tangentes aux trois droites en lesquelles se sont transformées les circonférences primitives.

Si donc les points de contact primitifs se trouvaient sur

une même circonférence avec le point que nous avons pr…
pour pôle, leurs inverses seront en ligne droite; tout revie…
donc à démontrer cette dernière proposition, c'est-à-dire q…
*si on prend deux points sur la circonférence circonscrite à…
triangle et que par ces points on fasse passer des circonféren…
tangentes respectivement aux trois côtés du triangle, les poin…
de contact sont en ligne droite.*

Soient M et N les points donnés sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, α, β et γ les points de tangence



des circonférences décrites sur MN avec les côtés qu'elles touchent respectivement.

Je dis que $\alpha\beta\gamma$ est rectiligne.

L'un des cercles de corde MN étant tangent à AC en β,

on a $$\overline{a\beta}^2 = aM \times aN.$$

Or $$aA \times aC = aM \times aN,$$

donc $$\overline{a\beta}^2 = aA \times aC$$

ou $$\frac{\beta a}{aC} = \frac{aA}{\beta a}.$$

On verrait de même que

$$\frac{\gamma b}{bA} = \frac{bB}{\gamma b}$$

et que $$\frac{\alpha c}{cB} = \frac{cC}{\alpha c}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre nous avons

$$\frac{\beta a \times \gamma b \times \alpha c}{aC \times bA \times cB} = \frac{aA \times cC \times bB}{\beta a \times \gamma b \times \alpha c} \tag{1}$$

Maintenant remarquons que

$$aA \times aC = \overline{a\beta}^2,$$

égalité obtenue précédemment, peut s'écrire

$$aA(aA + A\beta + \beta C) = (aA + A\beta)^2$$

ou $\overline{aA}^2 + aA \times A\beta + aA \times \beta C = \overline{aA}^2 + 2aA \times A\beta + \overline{A\beta}^2$

ou encore $aA \times \beta C = \beta A(\beta A + Aa)$

ou enfin $aA \times \beta C = \beta A \times \beta a$;

d'où $$\frac{\beta A}{\beta C} = \frac{aA}{\beta a}.$$

On trouverait de même

$$\frac{\gamma B}{\gamma A} = \frac{bB}{\gamma b}$$

$$\frac{\alpha C}{\alpha B} = \frac{cC}{\alpha c}$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre nous avons

$$\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{\beta C \times \gamma A \times \alpha B} = \frac{aA \times bB \times cC}{\beta a \times \gamma b \times \alpha c}. \tag{2}$$

Comparant (1) et (2), on voit que

$$\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{\beta C \times \alpha B \times \gamma A} = \frac{\beta a \times \gamma b \times \alpha c}{aC \times bA \times cB}. \tag{3}$$

Multiplions (2) et (3) membre à membre

$$\left(\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{BC \times \gamma A \times \alpha B}\right)^2 = \frac{aA \times bB \times cC}{aC \times bA \times cB}.$$

Mais la droite abc étant sécante par rapport au triangle ABC, on a

$$\frac{aA \times bB \times cC}{aC \times bB \times cB} = 1.$$

Donc $$\left(\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{\beta C \times \gamma A \times \alpha B}\right)^2 = 1;$$

ce qui donne $$\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{\beta C \times \gamma A \times \alpha B} = \pm 1.$$

Mais si on prenait la valeur -1, cela indiquerait que $A\alpha$, $B\beta$ et $C\gamma$ concourent en un même point, ce qui est inadmissible. Il faut donc prendre la valeur $+1$; par suite la ligne $\alpha\beta\gamma$ est droite.

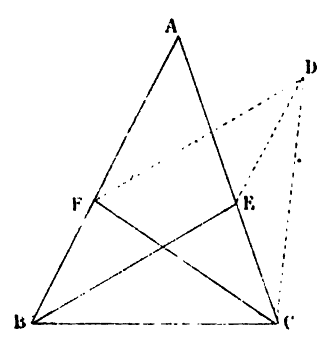
2° Dans la transformation que nous avons faite de la figure les points diamétralement opposés au point commun sont devenus les pieds des perpendiculaires abaissées du pôle sur les transformées des trois circonférences ; ces points sont en ligne droite d'après le théorème de Simson : donc leurs inverses sont sur une même circonférence avec le pôle, c'est-à-dire avec le point commun aux trois circonférences données.

THÉOREME DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Descube**, ingénieur.

Si les deux bissectrices d'un triangle sont égales, les deux angles qui leur correspondent sont égaux et le triangle est isoscèle.

Soit ABC un triangle ; BE, CF les deux bissectrices que nous supposons égales : il s'agit de démontrer que l'angle B est égal à l'angle C.



Si les angles B et C ne sont pas égaux, admettons que B soit le plus grand ; l'angle EBC sera aussi plus grand que l'angle FCB ; donc les deux triangles EBC, FCB auront un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, donc on aura :

$$EC > BF.$$

D'un autre côté, par le point F menons une parallèle à BE et par le point E une parallèle à BA, le parallélogramme formé nous donnera

$$FD = BE = FC.$$

Donc le triangle DFC sera isoscèle, par suite l'angle FDC sera égal à l'angle FCD ; mais l'angle FDE qui est égal à FBE est plus grand que l'angle ECF par hypothèse ; donc

par compensation, l'angle EDC est moindre que l'angle ECD; donc EC est moindre que DE ou BF.

Nous arrivons ainsi à une conclusion contradictoire à celle que nous avons déjà obtenue. Donc l'hypothèse de l'inégalité des angles B et C est absurde; donc

$$B = C;$$

par suite le triangle est isoscèle; c. q. f. d.

NOTE SUR UNE LIGNE

CONSIDÉRÉE DANS LE TRIANGLE RECTILIGNE

Par M. **M. d'Ocagne,** élève au Lycée Fontanes.

1. Dans un triangle quelconque, considérons la droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice issue du même sommet; cette ligne, qui jouit de propriétés intéressantes, sera désignée, dans ce qui suit, par la notation (M′), la lettre M servant à désigner la médiane.

2. *Construction de la ligne* (M′). — Je porte sur le côté AB, de A vers B, une longueur AC′ égale à AC, et sur AC, de A vers C, une longueur AB′ égale à AB; il résulte de la définition de la ligne (M′) que cette ligne passe par le milieu de B′C′ et que ce milieu se trouve facilement avec le compas, lorsque l'on connaît le milieu de BC.

3. Les principales propriétés de la ligne (M′), qui se démontrent avec la plus grande facilité, sont les suivantes, que nous nous contenterons d'énoncer:

a. — *Les distances d'un point quelconque de la ligne* (M′) *aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.*

b. — *Les segments déterminés par* (M′) *sur le côté opposé sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents.*

c. — *Si le triangle est rectangle, la ligne* (M′) *se confond avec la hauteur.*

d. — *Les trois lignes* (M′) *d'un triangle concourent au même point.*

e. — *Le point de concours de ces lignes est le barycentre*

des sommets des triangles affectés des coefficients **a², b², c²**, …
sin² A, sin² B, sin² C.

f. — Considérons la ligne (M') menée par le point A
menons la perpendiculaire AH à cette ligne, et, par le poi…
C, la perpendiculaire CH à AC ; ces deux lignes se coupe…
en H ; enfin, menons la perpendiculaire HI sur AB ; on a
AI = AB.

4. *Relations métriques.* — Soit D' le point de rencontre d…
(M') avec le côté opposé (nous désignons par D le pied de
la médiane). Posons

$$BD' = c' ; \qquad CD' = b' ;$$

on a
$$c' = \frac{ac^2}{b^2 + c^2} ; \quad b' = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}.$$

Si nous désignons par m' la longueur de la ligne (M'), on a

$$m' = \frac{bc}{b^2 + c^2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} .$$

Dans le cas où le triangle est rectangle, on trouve

$$m' = \frac{bc}{a},$$

ce qui donne bien la hauteur.

En appelant β l'angle D'AB, γ l'angle D'AC, on trouve

$$\sin\beta = \frac{c \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}}$$

$$\sin\gamma = \frac{b \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}}.$$

En supposant A = 90°, on retrouve les valeurs connues pour le triangle rectangle.

Enfin, en appelant d la distance du côté BC au point de concours des trois lignes (M'), on trouve

$$d = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2},$$

S, étant la surface de ABC.

On trouve des formules analogues pour les distances aux deux autres côtés.

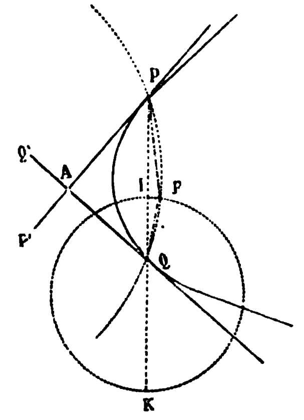
5. **Problème.** — *Construire une parabole, connaissant deux tangentes et leurs points de contact.*

Soient PP' et QQ' les deux tangentes, dont les points de contact sont P et Q; appelons F le foyer; on sait que

$$PFQ = 2P'AQ;$$

on a donc un premier lieu du foyer en décrivant sur PQ un segment capable du double de l'angle P'AQ. De plus, on a

$$\frac{AP^2}{AQ^2} = \frac{FP}{FQ}.$$



D'autre part, si nous menons la ligne (M') du triangle PAQ, et que I soit le point où elle rencontre le côté PQ, on a

$$\frac{AP^2}{AQ^2} = \frac{PI}{IQ} \text{ (prop. } b\text{)}.$$

Donc, si l'on prend le point I et son conjugué K par rapport aux points P et Q, le foyer se trouve sur la circonférence décrite sur IK comme diamètre; on a donc deux lieux du foyer, et par suite ce point se trouve à leur intersection.

6. **Théorème.** — *Si* L *est un point d'une lemniscate, dont les pôles sont* P *et* P', *la ligne* (M') *issue du point* L *dans le triangle* PLP' *est normale à la courbe en* L.

On sait, d'après la définition de la lemniscate, que la tangente à la courbe se construit de la manière suivante : on prend IL = LP'; on mène à LI une perpendiculaire par le point I, et à MP une perpendiculaire par le point P; ces lignes se coupent en T; LT est la tangente cherchée. Je dis que la perpendiculaire LN à LT n'est autre chose que la ligne (M') du triangle LPP'. (*)

En effet, si du point N nous abaissons des perpendiculaires NH et NH' sur LP et LP', nous avons

$$LT = \frac{LI}{\cos ILT} = \frac{LP}{\cos PLT}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

ou, puisque $LP' = LI$,

$$\frac{LP'}{LP} = \frac{\sin NLP'}{\sin NLP} = \frac{LN \sin NLP'}{LN \sin NLP} = \frac{NH'}{NH}$$

7. On peut facilement déduire de la définition de la lemniscate une autre démonstration très simple de ce théorème. En effet, l'équation en coordonnées bipolaires est

$$rr' - K = o.$$

D'après le théorème de Poinsot, on sait que la normale s'obtient en prenant des longueurs égales à F'_r et $F'_{r'}$ sur les rayons vecteurs, et composant ces longueurs comme des focus; on a ici $F_r = r'$; $F'_{r'} = r$.

On portera donc sur LP une longueur égale à LP', et sur LP' une longueur égale à LP; on joindra les extrémités de ces longueurs, puis on mènera la ligne passant par le point L et le milieu de la ligne que l'on vient de tracer, et on aura la normale. C'est précisément la construction que nous avons donnée pour la ligne (M').

8. **Corollaire.** — *La circonférence décrite sur la ligne des pôles d'une lemniscate comme diamètre, coupe la courbe en des points où la tangente est parallèle à la ligne des pôles.*

Car le triangle PLP' étant alors rectangle en L, la normale se confond avec la perpendiculaire abaissée du point L sur la ligne PP' (3, c).

QUESTION 229

Solution par M. Giroud, élève au Lycée de Marseille.

Construire un triangle ABC *connaissant les points* M, N, P, *milieux des arcs sous-tendus par les côtés* BC, AC *et* AB *dans le cercle circonscrit au triangle.*

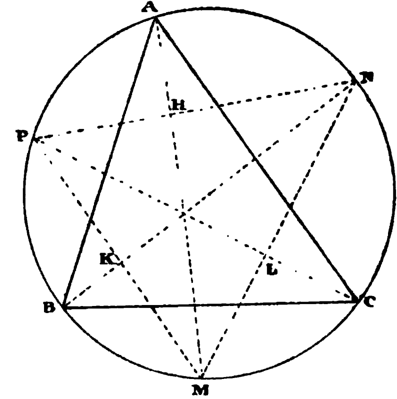
La figure montre facilement que

$$PMN = \frac{\text{arc AP} + \text{arc AN}}{2} = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$MPC = \frac{A}{2};$$

donc $MPC + PMN = 90°$. Donc la droite PC est perpendiculaire sur MN.

Il suffira donc pour obtenir le triangle ABC de joindre les points d'intersection des hauteurs du triangle MNP avec le cercle circonscrit.

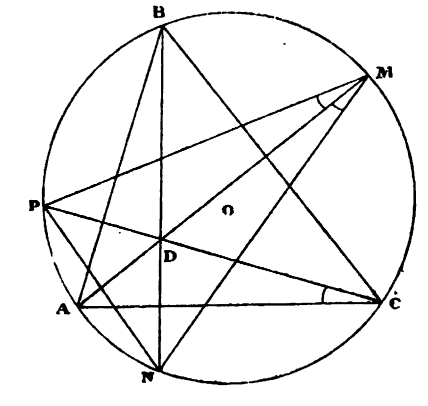


NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Boulogne, à Saint-Quentin; Hugot, Mathey, à Lyon ; Gino Loria, à Mantoue; Tricon, à Marseille; Daguillon, lycée Henri IV; Darmandieu, à Mont-de-Marsan ; Tinel, au Havre; Marin, à Agen; Joly, à Tarbes; Roubault, à Melun; Huet, à Orléans; Pecquery, au Havre; Benard, à Châteauroux; Heurtaux, à Nantes; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Jourdan, à Rouen; Bois, à Montauban; Letellier, à Tarbes; Couron, Cros, Tranié, à Toulouse; de Prat, à Lille; Lacan, à Toulon; Deslais, au Mans; H. Bourget, à Aix; Lesoille, école de Cluny; Montérou, à Pau; Payeux, à Verdun; van Aubel, à l'Athénée de Liège.

QUESTION 230

Solution par M. MANGEOT, élève au Lycée de Nancy.

Construire un triangle connaissant les points de rencontre du cercle circonscrit avec les hauteurs du triangle.



Supposons le problème résolu; soit ABC le triangle cherché; M, N, P les points de rencontre du cercle circonscrit et des hauteurs du triangle; joignons MN, NP et PM. Les angles PCA et ABN sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires et dirigés dans le

même sens. Donc PMA = AMN comme ayant mêmes mesures que PCA et ABN et AM est bissectrice de l'angle PMN. On verrait de même que les deux autres hauteurs sont bissectrices des angles P et N. Donc pour construire le triangle cherché, il suffira de mener les bissectrices du triangle PMN, qui donneront par leurs intersections avec le cercle circonscrit les sommets du triangle cherché.

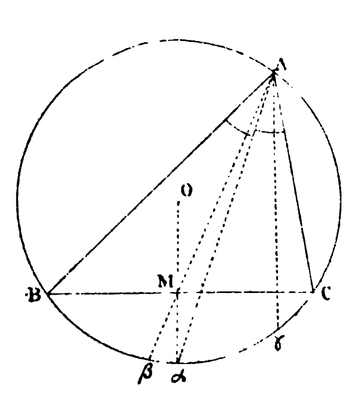
Nota : Ont résolu la même question : MM. Boulogne, de Saint-Quentin ; Tricon, à Marseille ; Darmandieu, à Mont-de-Marsan ; Tinel, au Havre ; Bonneville, à Toulouse ; Marin, à Agen ; Daguillon, lycée Henri IV ; Joly, à Tarbes ; Roubault, à Melun ; Huet, à Orléans ; Heurtaux, à Nantes ; Bois, à Montauban ; Jourdan, à Rouen ; Callon, lycée Louis-le-Grand ; Giroud, à Marseille ; Pecquery, au Havre ; Benard, à Châteauroux ; Cavrais, à Toulouse ; Hugot, Mathey, à Lyon ; Gino Loria, à Mantoue ; Marge, lycée Charlemagne ; Malcor, à Toulon ; H. Bourget, à Aix ; Deslais, Cottereau, au Mans ; de Brévans, à Besançon ; Lesoille, école de Cluny ; van Aubel, à l'Athénée de Liège.

QUESTION 232

Solution par M. Hugot, élève du Lycée de Lyon.

Construire un triangle, connaissant les points de rencontre α, β, γ, du cercle circonscrit avec la bissectrice, la médiane et la hauteur issues d'un même point.

Soit O le centre du cercle circonscrit. En menant par le point γ une parallèle à Oα on obtient en A le sommet du triangle d'où sont issues les trois droites ayant leur pied en α, β, γ. Joignant Aβ, on obtient par son intersection avec Oα un point M du côté opposé au sommet A. Il suffit pour avoir ce côté BC de mener par M une perpendiculaire à Oα. On obtient ainsi les sommets B et C et le triangle est construit.



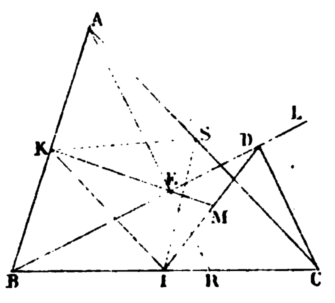
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Boulogne, Labro, de Saint-Quentin ; Tricon, Giroud, à Marseille ; Darmandieu, Jacquillat, Renaud, à Bordeaux ; Bonneville, Gros, Cavrais, à Toulouse ; Marin, à Agen ; Mangeot, Nancy ; Gino-Loria, à Mantoue ; Mathey, à Lyon ; Lacan, à Toulon ; Tranier, Toulouse ; H. Bourget, à Aix ; de Brévans, à Besançon ; Joly, Letellier, Tarbes ; Roubault, à Melun ; Pecquery, au Havre ; Heurtaux, à Nantes ; Langer, à la Martinique ; Bois, à Montauban ; Lafitte, à Rouen ; Callon, lycée Louis-le-Grand ; Montérou, à Pau ; Deslais, au Mans ; Lesoille, école de Cluny ; Manger, lycée Charlemagne, à Paris ; Benard, à Châteauroux.

QUESTION 242

Solution par M. POPINEAU, élève du Lycée de Niort.

On donne un triangle ABC; *une droite* BL *pivote autour du sommet* B. *On abaisse des perpendiculaires* AE, CD *des deux autres sommets sur cette droite. On joint le point* E *au milieu* K *de* AB, *et le point* D *au milieu* I *de* BC. *Trouver le lieu du point de rencontre* M *des deux droites* KE *et* DI.

Considérons l'angle KMI. Il est extérieur au triangle DEM. Par suite (1) KMI = MED + EDM ; or MED = KEB = KBE, car le triangle KBE est isoscèle, la droite KE étant médiane du triangle rectangle AEB et par suite égale à la moitié BK de l'hypoténuse. Pour la même raison BDI est un triangle isoscèle et BDI = DBI, donc en remplaçant dans (1) KMI = B. Dès lors le lieu du point M sera un segment capable de l'angle B construit sur la droite KI comme corde. Ce segment passant par le milieu S du côté AC, puisque l'angle KSI est égal à l'angle B et que ses côtés passent par les points K et I, appartiendra au cercle des neuf points du triangle ABC.



NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Maret, Callon, du lycée Louis-le-Grand ; Moyon, Daguillon, du lycée Henri IV ; Bonneville, de Toulouse ; Mangeot, de Nancy ; Roubault, de Melun ; Letellier, de Tarbes ; Deslais, au Mans ; Huet, à Orléans ; Malcor, à la Seyne, près Toulon.

QUESTION 248

Solution par M. Giroud, élève **du Lycée de Marseille.**

Dans un quadrilatère ABCD *nous désignerons par* a, b, c, *les côtés;* d *et* d' *les diagonales,* ω *leur angle,* h_1 *et* h_2 *les perpendiculaires abaissées des sommets sur la diagonale* d *et* h_3 h_4 *les perpendiculaires abaissées sur la diagonale* d. *Démontrer les formules*

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = (d + d') \sin \omega$$

$$\frac{h_1 + h_2}{h_3 + h^5} = \frac{d'}{d}$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{(h_1 + h_2)(h_3 + h_4)}{\sin \omega}$$

$$h_1 h_2 h_3 h_4 = \frac{a^2 b^2 c^2 e^2}{d^2 d'^2} \sin A \sin B \sin C.$$

Le triangle BHE donne $h_1 = \text{BE} \sin \omega$.

Le triangle DKE donne $h_2 = \text{DE} \sin \omega$.

Donc $h_1 + h_2 = (\text{BE} + \text{DE}) \sin \omega = d' \sin \omega$. (1)

Demême $h_3 + h_4 = d \sin \omega$; (2)

donc $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = (d + d') \sin \omega$.

Divisant membre à membre les relations (1) et (2) il vient

$$\frac{h_1 + h_2}{h_3 + h_4} = \frac{d'}{d}.$$

La surface de ABC est $\frac{dh_1}{2}$; celle de DAC est $\frac{dh_2}{2}$; celle du quadrilatère est donc $\frac{d}{2}(h_1 + h_2)$.

Or de (2) on tire $d = \frac{h_3 + h_4}{\sin \omega}$,

donc $S = \frac{1}{2} \frac{(h_1 + h_2)(h_3 + h_4)}{\sin \omega}$.

En exprimant de deux manières la surface du triangle ABC, on a $dh_1 = ab \sin B$; d'où $h_1 = \frac{ab}{d} \sin B$. On trouverait de même $h_2 = \frac{ce \sin D}{d}$, $h_3 = \frac{ae}{d} \sin A$, $h_4 = \frac{bc}{d'}$ sin C.

Multipliant membre à membre il vient

$$h_1\ h_2\ h_3\ h_4 = \frac{d'^2\ b^2\ c^2\ e^2}{b^2\ d^2} \sin A \sin B \sin C \sin D.$$

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Bompard, collège Stanislas; Gossieaux, Boulogne, à Saint-Quentin; Huet, à Orléans; Monterou, à Pau; Callon, lycée Saint-Louis; Baron, à Dinan; Hugot, à Lyon; Marin, à Agen; Blessel, à Paris; Gino Loria, à Mantoue; Daguillon, lycée Henri IV; Bonneville, à Toulouse; Bernard, à Pons; Vivant et Bertin, à Lons-le-Saulnier; Tinel, au Havre; Joly, Letellier, Grazides, à Tarbes; Vazou, collège Rollin; Tricon, à Marseille; Deslais, au Mans; Marit, lycée Louis-le-Grand; Payeux, à Verdun; Lacan, collège de la Seyne (Var).

QUESTION 249

Solution par M. Henri Bois, élève du Lycée de Montauban.

Si dans un triangle un angle C *est double d'un autre* A, *la projection du côté* BC *sur la bissectrice intérieure de l'angle* C *est égale à la moitié du côté* AB.

Soit C = 2A.

Il faut montrer que

$$2CH = AB.$$

En effet, $$CH = BC \cos A$$

et $$\frac{AB}{\sin 2A} = \frac{BC}{\sin A},$$

d'où $$AB = 2BC \cos A.$$

On a donc bien $$AB = 2CH.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Boucheaux, d'Angers; Gossieaux, Boulogne, de Saint-Quentin; Bompard, collège Stanislas; Bernard Roux, à Pons; Huet, à Orléans; Vautier, école Sainte-Geneviève, Paris; Marin à Passy; Weywada, à Albi; Montérou, à Pau; Talbourdeau, à Moulins; Tinel au Havre; Giroud, à Marseille; Baron, à Dinan; Hugot, à Lyon; Marin, à Agen; Blessel, à Paris; Gino-Loria, à Mantoue; Daguillon, lycée Henri IV; Bonneville, à Toulouse; Vivant et Bertin, à Lons-le-Saunier; Lacan, à Toulon; Tricon, à Marseille; Lachesnais, à Versailles; Marit, lycée Louis-le-Grand; Letellier, Joly à Tarbes; Deslais, au Mans; de Brévans, à Besançon; Payeur, à Verdun.

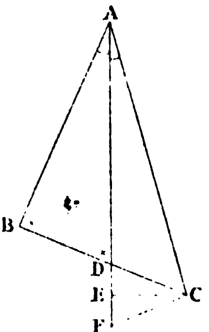
QUESTION 250.

Solution par M. WEYWADA, élève du Lycée d'Albi.

Si dans un triangle la bissectrice intérieure d'un angle est égale à l'un des côtés de l'angle, la projection de l'autre côté sur cette bissectrice est égale à la somme des côtés de l'angle.

(Launoy.)

Soit AD la bissectrice de A, égale à AB et AE la projection de AC sur AD. On doit avoir $AE = \frac{AB + AC}{2}$ ou $AD + DE = \frac{AB + AC}{2}$ et comme $AB = AD$, $2AD + 2DE = AD + AC$ ou $AD + 2DE = AC$.



Prolongeons AD d'une longueur $EF = DE$; il faut prouver que $AF = AC$.

Les deux triangles rectangles DEC, CEF sont égaux (EC commun, $DE = EF$), donc $EFC = EDC$; or $EDC = BDA$, donc $EFC = BDA$.

Les deux triangles ABD et FCA ont deux angles égaux chacun à chacun ($BAD = DAC$, $AFC = ADB$) ; dès lors ils sont semblables, et l'on a $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AB}$; or $AD = AB$, donc $AC = AF$.

NOTA : La même question a été résolue par MM. Tinel, élève du lycée du Havre ; Blessel, conducteur des ponts et chaussées ; Libmann, Bompard, collège

Stanislas; Roux, Bernard, à Pons; Letellier, Joly, à Tarbes; Lesoille, école de Cluny; Boulogne, à Saint-Quentin; Huet, à Orléans; Tricon, Giroud, à Marseille; Marin, à Agen; Gino-Loria, à Mantoue; Daguillon, au lycée Henri IV; Bonneville, à Toulouse; Lacan, à Toulon; Deslais, au Mans; de Brévans, à Besançon; Bois, à Montauban; Payeur, à Verdun.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE POITIERS

— Décomposer en facteurs du premier degré l'expression

$$28x(x+1)-105;$$

étudier sa variation lorsque x prend toutes les valeurs possibles.

— On joint les milieux de deux côtés consécutifs d'un rectangle; on en détache le triangle rectangle qui a la droite ainsi menée pour hypoténuse. Trouver le centre de gravité de l'aire restante.

— Trois nombres en progression arithmétique sont tels que la somme des carrés des deux premiers égale le carré du troisième. Le premier étant a, quels sont les deux autres?

— Exprimer x au moyen de a et de b, sachant que l'on a

$$x = y^3 + 3ay$$
$$y = \sqrt[3]{b+\sqrt{b^2+a^3}} + \sqrt[3]{b-\sqrt{b^2+a^3}}$$

— Le nombre π égale 3.1415926... Combien de chiffres décimaux exacts pourra-t-on obtenir à la racine carrée, en remplaçant ce nombre incommensurable par 3,1416?

— Inscrire dans une sphère de rayon R un cylindre dont la surface totale soit équivalente à celle d'un cercle de rayon m.

— D'un point A, situé dans le plan d'un cercle de rayon R, à une distance d du centre, on mène une sécante AD faisant un angle α avec le diamètre OA. Aux points C et D, où cette sécante coupe la circonférence, on mène les tangentes, qui se coupent en B. Déterminer, au moyen des données d et α : 1° la longueur OB; 2° la longueur AB; 3° la position de la projection b du point B sur OA; 4° l'angle BDA par une de ses lignes trigonométriques.

— Sur les quatre arêtes latérales d'un parallélépipède droit on prend, à partir de la base, quatre longueurs a, b, c, d; quelle est la condition pour que les quatre points ainsi déterminés soient situés dans un même plan? Expression du volume du parallélépipède tronqué ainsi formé.

— Quatre forces, situées dans un même plan, et d'intensités 1, 2, 3, 4, sont appliquées au même point. En faisant tourner la première autour de ce point de 30°, elle coïnciderait avec la seconde; à partir de cette position, une rotation de 90° dans le même sens l'amènerait sur la troisième; enfin, une nouvelle rotation de 30° la conduirait sur la quatrième. Calculer l'intensité de la résultante, et l'angle qu'elle fait avec la première force.

— Résoudre les équations

$$l - bz + cy = 0,$$
$$m - cx + az = 0,$$
$$t - ay + bx = 0,$$
$$ax + by + cz = 0,$$

où les inconnues sont x, y, z et t.

— Résoudre les équations

$$\sqrt{y} - \sqrt{20 - x} = \sqrt{y - x},$$
$$3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x}.$$

— Calculer les angles d'un triangle dont les côtés sont 984, 1537 et 18..

— La distance au Soleil de la planète Uranus est 19,183, celle de la Ter-
étant 1 ; calculer la durée de la révolution sidérale d'Uranus, celle de la Ter-
étant $365^{jm},256$.

— La hauteur d'une pyramide hexagonale régulière est égale au côté de la
base, trouver le cosinus de l'angle de deux faces latérales adjacentes.

— La déclinaison du soleil est 19°25′ boréale, et, à Paris, un cadran solaire
indique $3^h,20^m$ après midi ; quelles sont les coordonnées géographiques du
lieu où le soleil paraît au zénith ?

— Construire un cercle concentrique à un cercle de rayon R, et tel que la
couronne soit moyenne proportionnelle entre les surfaces des deux cercles.

FACULTÉ DE BORDEAUX

Examens de Pau en août 1880.

— L'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à a ; la somme des deux autres côtés est égale à b. Calcul de ces côtés et discussion de la formule ; calcul d'un angle aigu. Application : $a = 950$; $b = 1080$.

— Trouver la raison d'une progression arithmétique dont le premier terme est a, sachant que la somme des n premiers termes est égale à $2n$ fois le tiers du n^e terme. Application : $a = 10$; $n = 101$. On vérifiera le résultat trouvé.

FACULTÉ DE MONTPELLIER

— Résoudre le système

$$x + y = mz$$
$$x^2 + y^2 = nz^2$$
$$x^3 + y^3 = a^3 - z^3.$$

— Résoudre par rapport à x l'équation

$$x^2 - 2x \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = 0 ;$$

calculer la valeur numérique des racines dans le cas où l'on a

$$\alpha = 20°42'17'',$$

et aussi dans le cas où l'on a $\alpha = 69°17'43''$.

— Trouver un arc x tel que

$$\sin x + \cos x = m ;$$

calculer les valeurs numériques des racines dans le cas où $m = \frac{4}{3}$.

— Résoudre $a^2 x^2 - a^2 x + a - 1 = 0$
et indiquer comment varient les racines quand on donne à a toutes les valeurs possibles.

— Résoudre $\cos x = 2 \operatorname{tg} x$.

— Calculer la base et les angles d'un triangle isoscèle, sachant que le côté est égal à 2^m, et la surface à 1^m carré.

— On a deux cylindres dont l'un a pour rayon x et pour hauteur y, et l'autre

1 pour hauteur x et pour rayon y; déterminer x et y sachant que les surfaces totales de ces cylindres sont équivalentes, la première à la surface d'un cercle de rayon m, et la seconde à la surface d'un cercle de rayon n.

FACULTÉ DE PARIS

— Partager un angle donné a, moindre que 90°, en deux parties telles que la somme de leurs tangentes soit un minimum.

— On donne l'hypoténuse $BC = a$ d'un triangle rectangle et l'angle B; on suppose que le triangle tourne autour de l'hypoténuse; on demande de calculer en fonction de a et de B: 1° la somme des surfaces engendrées par chacun des côtés de l'angle droit; 2° le volume engendré par le triangle ABC; 3° le maximum de ce volume quand B varie.

— Démontrer que les droites qui joignent les milieux de deux arêtes non contiguës d'un tétraèdre passent toutes les trois par un même point, et que la distance de ce point à chacune des faces est égale au quart de la hauteur correspondante.

— On partage un angle de 60° en deux parties telles que le sinus de l'une soit le double du sinus de l'autre; trouver les valeurs de ces deux sinus.

— Déterminer la quantité a de façon que dans l'équation

$$x^2 - \frac{15x}{4} + a^3 = 0$$

l'une des racines soit le carré de l'autre.

— On considère un triangle ABC, le point D, milieu de BC, et la médiane AD. Trouver sur cette médiane un point M tel que la somme

$$MA^2 + MB^2 + MC^2$$

soit maxima.

— Calculer la surface d'un cercle, sachant que la surface du dodécagone régulier inscrit est de 1 mètre carré.

— On donne par ses traces un plan parallèle à la ligne de terre; on donne aussi les projections horizontales de deux droites parallèles situées dans ce plan; construire leur distance.

— Résoudre l'équation $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1880. COMPOSITIONS SUPPLÉMENTAIRES

Mathématiques.

1. — Calculer les angles x compris entre 0 et 180 donnés par la formule

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

dans laquelle on a

$$\alpha = 27°43'17''$$
$$\beta = 49°18'36''$$

2. — Résoudre l'équation

$$(x - a)(x - b)(x - c) + abc = 0$$

dans laquelle on suppose a, b, c positifs. Les quantités b et c ayant une valeur fixe, entre quelles limites a doit-il être compris pour que les racines soient réelles ?

3. — On donne un demi-cercle et un point P sur le diamètre AB, et on demande de déterminer sur la circonférence un point M tel que, en menant les cordes MA, MB et les parallèles PN, PQ à ces cordes le périmètre MNPQ soit maximum.

Géométrie descriptive.

Étant donnés : un point O situé à 45 millimètres au-dessus du plan horizontal et à 75 millimètres en avant du plan vertical, et le plan passant par le point O et la ligne de terre on demande :

1° De construire les projections d'un tétraèdre régulier s'appuyant par sa base sur le plan donné de telle sorte que le centre de cette base soit au point O; la longueur de l'arête étant de 70 millimètres ;

2° De faire tourner le plan donné d'un angle de 90° autour de la verticale passant par le sommet du tétraèdre;

3° De construire les projections du solide dans cette nouvelle position.

SUR LES TANGENTES AUX POINTS DOUBLES

DE L'INTERSECTION DES SURFACES

Par M. **Songaylo**, examinateur d'admission à l'École centrale des Arts et Manufactures.

(*Suite*, voir page 502.)

Problème. — *Construire les tangentes aux points doubles de l'intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques.*

Considérons deux cônes ayant un plan tangent commun P (*fig.* 2). Soient : S, S_1 leurs sommets ; $S\delta$, $S_1\delta$ les génératrices suivant lesquelles P touche, respectivement, chacune de ces surfaces.

Nous allons, tout à la fois, démontrer que le point δ, en lequel P touche les deux cônes, est un point double de leur intersection et chercher les tangentes en ce point. Pour atteindre simultanément ces deux buts, il suffit de construire les tangentes à la courbe d'intersection en δ, et de constater que le problème offre deux solutions. Ces tangentes sont nécessairement dans le plan tangent commun P ; il est

d'ailleurs manifeste qu'elles se confondent avec les tangentes à la projection sur P de la courbe commune aux deux cônes. Nous chercherons donc simplement ces dernières. Conduisons par δ deux plans perpendiculaires au plan tangent P et soient : δx, δx_1 les traces de ces plans sur P;

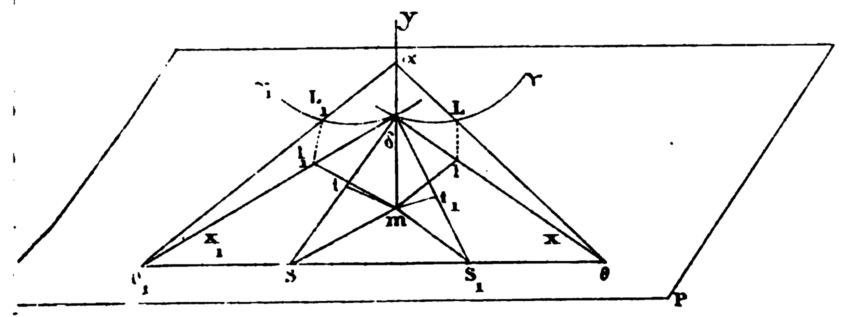


Fig. 2.

γ, γ_1 les courbes suivant lesquelles ils coupent respectivement les cônes de sommets S, S_1 ; δy l'intersection des plans perpendiculaires au plan P, qui est elle-même perpendiculaire à ce plan, et, finalement, θ, θ_1 les points en lesquels la ligne qui unit S, S_1 coupe, respectivement, les plans des courbes γ,γ_1.

Nous adopterons γ,γ_1 pour bases respectives des cônes et nous construirons, par la méthode générale, un point de la projection sur P de leur ligne commune. Pour le faire, conduisons, par θ, θ_1 et un point α, placé sur y et voisin de δ, un plan sécant auxiliaire ; lequel donne : sur les plans des bases, les droites $\theta\alpha$, $\theta_1\alpha$; sur les bases elles-mêmes les points L, L_1, que l'on projette sur P en l, l_1 ; enfin, sur les cônes, des génératrices, dont les projections sl, s_1l_1 se croisent au point m cherché.

Traçons la droite δm et observons que, puisqu'on connaît le point δ, tout se réduit à déterminer la limite de la direction de δm, lorsque m tend vers δ. On le fera en menant par m des droites mt, mt_1 respectivement parallèles à $\theta\delta$, $\theta_1\delta$; puis en cherchant la limite du rapport de ces deux lignes, que nous désignerons, la première mt, par p, l'autre mt_1 par p_1.

Soient $$y = f(x)$$
$$y_1 = \varphi(x_1)$$
les équations des courbes γ, γ_1 rapportées, respectivement aux axes $y\delta x$, $y\delta x_1$, et (x, y), (x_1, y_1) les coordonnées des points L, L_1. La similitude des triangles donne :

$$\frac{mt}{\delta l} = \frac{St}{S\delta},$$
$$\frac{mt_1}{\delta l_1} = \frac{S_1t_1}{S_1\delta};$$

ce qu'on peut écrire $$\frac{p}{x} = \frac{St}{S\delta},$$
$$\frac{p_1}{x_1} = \frac{S_1t_1}{S_1\delta};$$

en divisant membre à membre ces deux dernières relations on a $$\frac{p}{p_1} \cdot \frac{x_1}{x} = \frac{St}{S\delta} : \frac{S_1t_1}{S_1\delta}.$$

Lorsqu'on fait tendre α vers δ, les points m, t, t_1 tendent aussi vers δ, et les rapports du second membre de la dernière égalité ont 1 pour limite, ce qui permet d'écrire la relation

$$\lim \frac{p}{p_1} = \lim \frac{x}{x_1}. \qquad (5)$$

D'autre part, on l'a vu, la formule (1) peut s'écrire

$$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{\text{IV}}(0)$$
$$\ldots + \frac{x^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n(0) + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} f^{n+1}(\theta x) \quad (6)$$
$$\frac{y_1}{x_1^2} = \frac{1}{1 \cdot 2} \varphi''(0) + \frac{x_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(0) + \frac{x_1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \varphi^{\text{IV}}(0) \ldots$$
$$+ \frac{x_1^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \varphi^n(0) + \frac{x_1^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} \varphi^{n+1}(\theta_1 x_1) \quad (7)$$

La similitude des triangles donne encore

$$\frac{y}{\delta\alpha} = \frac{\theta l}{\theta\delta},$$
$$\frac{y_1}{\delta\alpha} = \frac{\theta_1 l_1}{\theta_1\delta_1};$$

on en déduit $$\frac{y}{y_1} = \frac{\theta l}{\theta\delta} : \frac{\theta_1 l_1}{\theta_1 \delta},$$

et, par suite, $$\lim \frac{y}{y_1} = 1.$$

Or, on l'a déjà vu (2), des équations (6) et (7) on tire, en général,
$$\lim \frac{y}{x^2} = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2},$$
$$\lim \frac{y_1}{x_1^2} = \frac{\varphi''(0)}{1 \cdot 2},$$
d'où l'on déduit
$$\lim \frac{y_1}{y} \cdot \lim \frac{x^2}{x_1^2} = \frac{\varphi''(0)}{f''(0)}$$
ou encore, puisque $\lim \frac{y_1}{y} = 1$,
$$\lim \frac{x}{x_1} = \pm \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{f''(0)}}.$$

En remplaçant dans (5) $\lim \frac{x}{x_1}$ par sa valeur, il vient
$$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{f''(0)}}.$$

Reprenons la formule (4) de la précédente question
$$f''(0) = \frac{1}{\rho \cos \beta},$$
dans laquelle β *(fig. 1)* représente l'angle de la normale à la courbe μ', en m', avec l'axe $m'y$, et observons que cette formule est applicable aux courbes γ, γ_1 *(fig. 2)*, à la condition toutefois de supposer β nul. Alors, en désignant par ρ et par ρ_1 les rayons de courbure, en δ, des courbes γ, γ_1, nous aurons
$$f''(0) = \frac{1}{\rho},$$
$$\varphi''(0) = \frac{1}{\rho_1}:$$
d'où l'on déduit $$\frac{\varphi''(0)}{f''(0)} = \frac{\rho}{\rho_1}$$

et, par suite, $$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}.$$

Telle est la formule cherchée; elle montre que le point δ est un point double et va servir à la construction des tangentes en ce point. Cette formule peut s'écrire

$$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \frac{\sqrt{\rho\rho_1}}{\rho_1},$$

le tracé ne saurait maintenant offrir aucune difficulté. Opérons dans le plan tangent commun P ; rien ne serait plus simple ensuite que de projeter sur un plan quelconque la figure que nous allons construire.

Soient SS, $S_1\delta$ les deux génératrices de contact qui

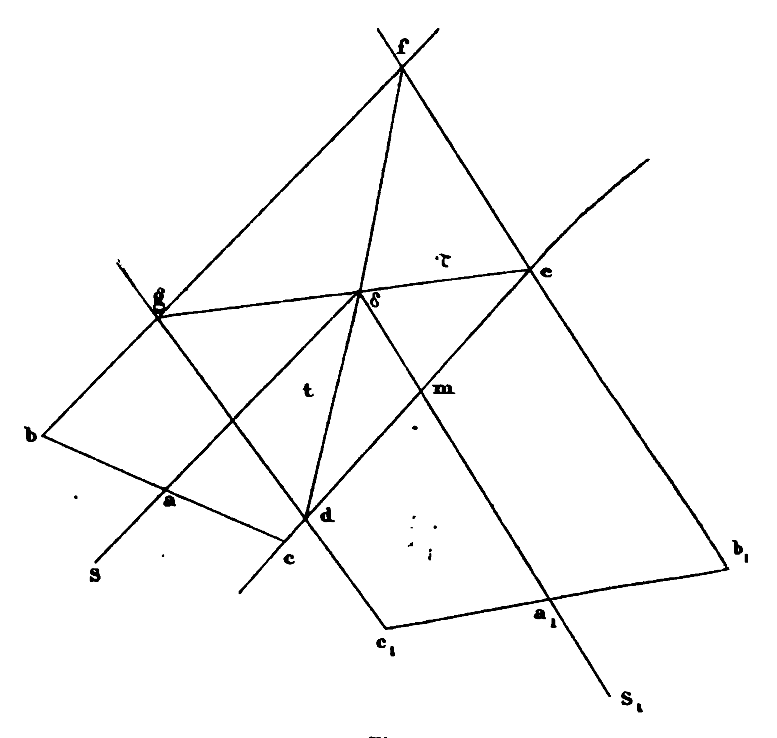


Fig 3.

se croisent au point double δ (*fig. 3*). Construisons $\sqrt{\rho\rho_1}$; après quoi, par un point *a*, pris arbitrairement sur Sδ,

menons une parallèle à la trace du plan de la courbe γ sur celui de la figure et portons sur cette ligne, de part et d'autre de a, deux longueurs ab, ac égales à $\sqrt{\rho\rho_1}$; puis, par b, c, tirons des parallèles à Sδ.

Opérons de même pour l'autre cône, mais en remplaçant cette fois $\sqrt{\rho\rho_1}$ par ρ_1.

Les couples de parallèles ainsi tracées forment un parallélogramme $defg$, dont les diagonales δt, $\delta\tau$ sont les tangentes cherchées.

Pour exécuter ce tracé, nous avons dû recourir aux rayons de courbure de deux bases placées dans des plans perpendiculaires au plan tangent commun; le théorème qui suit permet de le rendre indépendant de l'orientation des bases.

Théorème de Meusnier. (Ce théorème, que nous nous bornerons à considérer dans le seul cas des surfaces coniques, est encore vrai pour une surface quelconque). — *Dans toute surface conique, le rayon de courbure d'une section oblique est la projection du rayon de courbure de la section normale qui a même tangente.*

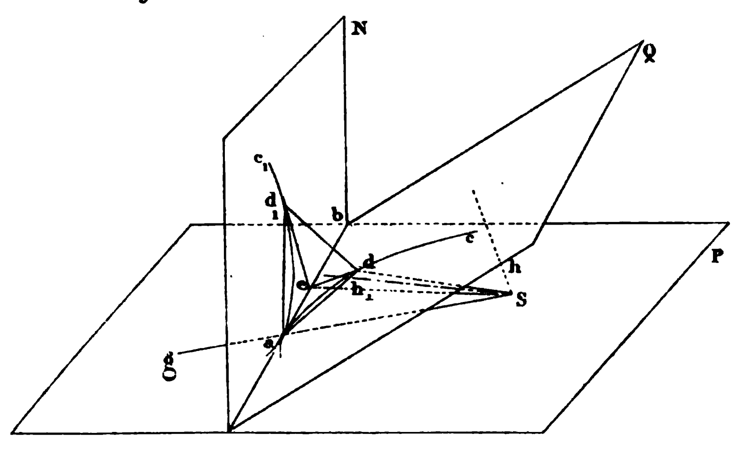


Fig. 4.

Soient *(fig. 4)* : Q le plan de la base ou d'une section oblique de la surface conique ; c la base elle-même ou la

section oblique ; S le sommet de la surface et Sg sa génératrice de contact avec l'un P de ses plans tangents.

Les plans P, Q se coupent suivant la tangente ab, à la courbe c, au point a. Par ab conduisons un plan N perpendiculaire à P et considérons la section e_1 avec le cône.

Prenons deux points, l'un d sur la courbe c, l'autre e sur la tangente ab, et tous deux voisins de a ; tirons la génératrice Sd et désignons par d_1 sa rencontre avec c_1 ; traçons enfin la droite qui unit S, e, ainsi que les triangles aed, aed_1. Nous désignerons encore respectivement par (Ω, Ω_1), (R, R_1) les aires de ces triangles et les rayons des cercles qui leur sont circonscrits.

On aura
$$4\Omega R = ae \, . \, ed \, . \, ad,$$
$$4\Omega_1 R_1 = ae \, . \, ed_1 \, . \, ad_1,$$
en divisant ces égalités membre à membre, on trouve
$$\frac{\Omega}{\Omega_1} \cdot \frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \cdot \frac{ad}{ad_1}. \tag{8}$$

La comparaison des pyramides Sade, Saed_1 donne à son tour, en appelant h et h_1 les distances du point S aux plans Q et N, la relation
$$\frac{\Omega h}{\Omega_1 h_1} = \frac{Sa \, . \, Sd \, . \, Se}{Sa \, . \, Sd_1 \, . \, Se}$$
ou
$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{h_1}{h} \, \frac{Sd}{Sd_1}.$$

En éliminant $\frac{\Omega}{\Omega_1}$ entre cette dernière relation et (8), on trouve
$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \cdot \frac{ad}{ad_1} \cdot \frac{h}{h_1} \cdot \frac{Sd_1}{Sd} \, ;$$
mais, d'autre part, on a
$$\frac{ad}{Sd} = \frac{\sin aSd}{\sin daS},$$
$$\frac{Sd_1}{ad_1} = \frac{\sin d_1aS}{\sin aSd} ;$$
en combinant les trois dernières relations, on trouve
$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \cdot \frac{\sin d_1aS}{\sin daS} \cdot \frac{h}{h_1} ;$$
mais, en appelant θ l'angle des plans N, Q, on peut rem-

placer $\frac{h}{h_1}$ par cos θ dans la dernière relation, ce qui donne

$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \; \frac{\sin d_1aS}{\sin daS} \; . \; \cos \theta.$$

En faisant d'abord tendre le point e vers a, le rapport $\frac{ed}{ed_1}$ tendra vers $\frac{ad}{ad_1}$, ou vers son égal $\frac{\sin ad_1d}{\sin add_1}$; si l'on fait ensuite tendre d vers a, les rayons R, R_1 tendront vers les rayons de courbure des courbes C, C_1, que nous désignerions par ρ et par ρ_1, et nous aurons finalement

$$\rho = \rho_1 \cos \theta,$$

ce qui justifie le théorème, attendu que l'angle des plans Q, N est égal à celui des normales en a aux courbes considérées.

Théorème. — *Les tangentes au point double de l'intersection de deux surfaces coniques forment un faisceau harmonique avec les deux génératrices de ces surfaces qui se croisent en ce point : les couples de rayons conjugués sont, d'une part, les deux tangentes, de l'autre les deux génératrices.*

Considérons la figure 3 et le faisceau $\delta.SS_1t\tau$. Soit m la rencontre des droites de, δS_1 ; la droite de prolongée coupe à l'infini δS; comme, d'autre part, m est le milieu de de, on voit que les rayons du faisceau considéré déterminent sur une divergente des points de section qui forment une division harmonique, et, par conséquent, que ce faisceau est lui-même harmonique. Ce théorème est évidemment applicable aux projections des rayons du faisceau, et sert, lorsqu'on connaît l'une des tangentes au point double, à trouver l'autre tangente en ce point.

NOTE SUR UNE APPLICATION
DU CALCUL DES DÉTERMINANTS
A CERTAINES QUESTIONS DE MAXIMA ET DE MINIMA

Par M. E.-J. Boquel.

(*Suite et fin*, voir page 460.)

La méthode peut être généralisée.

Nous ferons observer d'abord que l'on a, d'une manière générale,

$$\begin{aligned}&(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)\\ &- (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2\\ &+ (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2.\end{aligned}$$

En effet, tous les termes du second membre sont différents les uns des autres; ils se trouvent d'ailleurs tous dans le premier membre effectué, et il est facile de voir qu'il n'y en a aucun du premier membre qui manque dans le second. Dans le premier membre, le produit

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

contient n^2 termes; le carré $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$ contient n carrés et $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ doubles produits, de sorte que, dans le premier membre effectué, il reste $n^2 - n = n(n-1)$ carrés, et $\frac{n(n-1)}{2}$ doubles produits. Deux carrés et le double produit correspondant forment un carré parfait $(a_ib_k - a_kb_i)^2$, i et k recevant toutes les valeurs différentes de 1 à $n (i \gtrless k)$; il y a donc autant de ces carrés parfaits que de combinaisons de n lettres, deux à deux, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2}$; tous les termes du premier membre sont donc employés pour former le second.

— Cela posé, soit une fonction $F(x, y, z, \ldots v)$ de $n - 1$

variables indépendantes et telle qu'on puisse la mettre sous la forme de la somme de n carrés de n fonctions linéaires des $n - 1$ variables $x, y, z, \ldots v$, comme il suit

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \ldots v) = & (ax + by + cz + \ldots + kv + l)^2 \\ & + (a'x + b'y + c'z + \ldots + k'v + l')^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + k_{n-1}v + l_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Considérons le déterminant formé avec les coefficients des n fonctions linéaires qui entrent dans la composition de $F(x, y, z, \ldots v)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & k & l \\ a' & b' & c' & \ldots & k' & l' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & k_{n-1} & l_{n-1} \end{vmatrix}$$

et supposons ce déterminant différent de zéro.

Ordonnons-le par rapport aux éléments de la dernière colonne, il prendra la forme

$$\Delta = Ll + L'l' + \ldots L_{n-1}\, l_{n-1}.$$

$L, L', \ldots L_{n-1}$ étant des constantes, le minimum de F a évidemment lieu pour les mêmes valeurs de $x, y, z, \ldots v$ que le minimum de l'expression

$$(L^2 + L'^2 + \ldots + L^2_{n-1})\, F(x, y, z, \ldots v).$$

Désignons par $A, A', \ldots A_{n-1}$ les n fonctions linéaires

$$ax + by + cz + \ldots + l, \quad a'x + b'y + c'z + \ldots l'$$
$$\ldots, a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + l_{n-1}$$

on a identiquement, en vertu de l'observation faite plus haut:

$$\begin{aligned} & (L^2 + L'^2 + \ldots + L^2_{n-1})(A^2 + A'^2 + \ldots + A^2_{n-1}) \\ & - (AL + A'L' + \ldots + A_{n-1}\, L_{n-1})^2 = (LA' - LA')^2 \\ & + (LA'' - AL'')^2 + \ldots + (L_{n-2}\, A_{n-1} - A_{n-2}\, L_{n-1})^2 \end{aligned}$$

La quantité $AL + A'L' + \ldots + A_{n-1}\, L_{n-1}$ est précisément le déterminant Δ; car si, dans ce déterminant, on multiplie les éléments de la première colonne par x, ceux de la seconde par y, etc., enfin ceux de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ par v, et qu'on ajoute ces éléments ainsi multipliés aux éléments correspondants de la $n^{\text{ième}}$ colonne, le déterminant nouveau est égal au premier, et l'on a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \ldots ax + by + cz + \ldots + Kv + l \\ a' & b' & c' \ldots a'x + b'y + c'z + \ldots + K'v + l' \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n-1} & b_{n-1} & e_{n-1} \ldots a_{n-1}x + \ldots + K_{n-1}v + l_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & KA \\ a' & b' & c' & \ldots & K'A' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & K_{n-1}A_{n-1} \end{vmatrix}$$

Or, en donnant ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, on a précisément :

$$\Delta = AL + A'L' + \ldots + A_{n-1}L_{n-1}$$

puisqu'il ne diffère du proposé que par le changement en A. A', ... A_{n-1} des éléments l, l', l_{n-1} de la colonne par rapport à laquelle on avait primitivement ordonné.

On a donc finalement :

$$(L^2 + L'^2 + \ldots L_{n-1}^2)F(x, y, z, \ldots v) = \Delta^2$$
$$+ (LA' - AL')^2 + (LA' - AL'')^2 + \ldots$$
$$+ (L_{n-2}A_{n-1} - A_{n-2}L_{n-1})^2.$$

Cette expression est la somme de $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$ carrés dont l'un est une constante ; son minimum aura donc lieu quand les $\frac{n(n-1)}{2}$ derniers carrés seront nuls (si cela est possible), c'est-à-dire pour les valeurs de x, y, z ... v satisfaisant aux équations $LA' - AL' = 0$, $LA'' - AL'' = 0$, ... $L_{n-2}A_{n-1}\ A_{n-2}L_{n-1} = 0$.

Ces $\frac{n(n-1)}{2}$ équations n'en forment réellement que $(n - 1)$ distinctes ; car elles ne sont autre chose que l'égalité des n rapports suivants :

$$\frac{A}{L} = \frac{A'}{L'} = \frac{A''}{L''} = \ldots = \frac{A_{n-1}}{L_{n-1}}.$$

On pourra donc généralement trouver des valeurs de x, y, z, ... v annulant les $\frac{n(n-1)}{2}$ derniers carrés, et pour ces valeurs, l'expression

$$(L^2 + L'^2 + \dots L^2_{n-1})F(x, y, z, \dots v)$$

atteint son minimum, dont la valeur est Δ^2. Le minimum de $F(x, y, z, \dots v)$ est donc

$$\frac{\Delta^2}{L^2 + L'^2 + \dots + L^2_{n-1}}.$$

— Cette formule comprend, comme cas particulier, le minimum d'une fonction générale du second degré à $n - 1$ variables. Une pareille fonction se ramène, en effet, généralement à la somme de n carrés de n fonctions linéaires, dont la première renferme les $n - 1$ variables, la deuxième $n - 2$ de ces variables, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière qui est une constante.

Or si l'on a : $F = (ax + by + cz + \dots + Kv + l)^2 + (b'y + c'z + \dots + K'v + l')^2 + (c''z + \dots + K''v + l'')^2 + \dots + l^2_{n-1}$.

Le déterminant Δ sera :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\, b\, c \dots K & l \\ o\, b'\, c' \dots K' & l' \\ o\, o\, c'' \dots K'' & l'' \\ \dots\dots\dots & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots \\ o\, o\, o \dots K_{n-2} & l_{n-2} \\ o\, o\, o \dots o & l_{n-1} \end{vmatrix} = ab'c'' \dots K_{n-2} l_{n-1}$$

Les mineurs L, L', L'' ... sont tous nuls jusqu'à L_{n-2} inclusivement, car ils ont tous une ligne entièrement formée d'éléments nuls, quant à L_{n-1}, on a :

$$L_{n-1} = \begin{vmatrix} a\, b\, c \dots K \\ o\, b'\, c' \dots K' \\ o\, o\, c'' \dots K'' \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ o\, o\, o \dots K_{n-2} \end{vmatrix} = ab'c'' \dots K_{n-2}$$

La formule $\frac{\Delta^2}{L^2 + L'^2 + \dots + L^2_{n-1}}$ se réduit donc à

$\frac{a^2b'^2c''^2 \ldots K^2_{n-2}\, l^2_{n-1}}{a^2b'^2c''^2 \ldots K^2_{n-2}}$ c'est-à-dire à l^2_{n-1}. Ce résultat est d'ailleurs évident *à priori*; car les $(n - 1)$ premiers carrés peuvent, en général, être annulés par le système des $n - 1$ valeurs de $x, y, z, \ldots v$ qui vérifient les $n - 1$, équations $ax + by + cz + \ldots + Kv + l = 0$, $b'y + c'z + \ldots + K'v + l' = 0, \ldots$ et pour ces valeurs, la fonction se réduit à l^2_{n-1}.

En appliquant aux fonctions $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ et $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F$, on retrouve les résultats connus.

QUESTION 212

Solution par M. A. Simon, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Soit V *un polynôme entier par rapport à* x ; V_1 *sa dérivée : on peut toujours trouver un polynôme* X_1, *tel que* $X_1V_1 - 1$ *soit divisible par* V ; *soit* V_2 *le quotient. On détermine* V_3 *à l'aide de* V_1 *et de* V_2 *comme on a déterminé* V_2 *à l'aide de* V *et de* V_1, *etc... La suite* $V, V_1, V_2, V_3 \ldots$ *peut remplacer la suite de Sturm si* $V = 0$ *n'a pas de racines égales.* (H. Laurent.)

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que $V = 0$ a toutes ses racines inégales.

Cherchons le p. g. c. d. entre V et V_1 ; on aura la série d'égalités

$$V = V_1Q_1 + R_1$$
$$V_1 = R_1Q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2Q_3 + R_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Le dernier reste obtenu étant une constante C.

Or de ces égalités on tire

$$R_1 = V - V_1Q_1$$
$$R_2 = V_1(1 + Q_1Q_2) - VQ_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tous les restes seront de la même forme et l'on aura

finalement $C = A_1V_1 - AV$

A et A_1 étant des polynômes entiers en x.

On tire de là $\frac{A}{C}V = \frac{A_1}{C}V_1 - 1$,

ou bien $V_2 V = X_1V_1 - 1$

en posant $\frac{A}{C} = V_2 \quad \frac{A_1}{C} = X_1$.

Comme le polynôme V_2 est entier en x, $X_1V_1 - 1$ est divisible par V. En continuant ainsi on aura la série d'identités :

$$VV_2 = X_1V_1 - 1$$
$$V_1V_3 = X_2V_2 - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{k-1}V_{k+1} = X_kV_k - 1$$

Cela posé, considérons la suite

$$V, V_1, V_2, V_3 \ldots \quad V_k \ldots V_p ;$$

je dis que cette suite peut remplacer la suite de Sturm.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'elle possède les mêmes propriétés que celle-ci.

1° *La dernière fonction* V_p *est constante*, puisque les degrés des fonctions vont en diminuant chaque fois d'au moins une unité et que $V = 0$ et $V_1 = 0$ n'ont pas de racines communes.

2° ***Deux fonctions intermédiaires consécutives ne peuvent pas s'annuler pour la même valeur de*** x ; si en effet, pour une certaine valeur de x on a $V_k = 0$, on a $V_{k-1}V_{k+1} = -1$, ce qui exige $V_{k-1} \gtrless 0 \quad V_{k+1} \gtrless 0$.

3° ***Quand une fonction intermédiaire s'annule pour une certaine valeur de*** x, ***pour cette même valeur de*** x ***celle qui la précède et celle qui la suit sont de signes contraires.*** En effet, si $V_k = 0$ on a $V_{k-1}V_{k+1} = -1$.

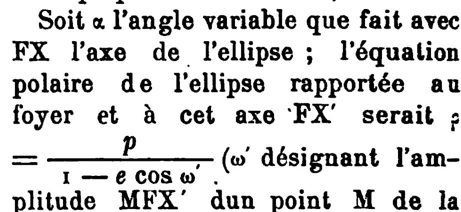
4° ***Le quotient*** $\frac{V_1}{V}$ ***passe du négatif au positif au moment où*** x ***atteint et dépasse une racine de l'équation*** $V = 0$; V_1 est en effet la dérivée de V.

QUESTION 235

Solution par **M. Tissier**, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Rouen.

Connaissant un foyer d'une ellipse, l'excentricité et un point, trouver l'enveloppe des directrices.

Prenons pour axes des coordonnées la droite FX passant par le foyer F et le point donné A, et sa perpendiculaire en F, FY.



Soit α l'angle variable que fait avec FX l'axe de l'ellipse ; l'équation polaire de l'ellipse rapportée au foyer et à cet axe FX' serait $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega'}$ (ω' désignant l'amplitude MFX' dun point M de la courbe). Si ω représente l'amplitude relative à l'axe OX, on a $\omega' = \omega - \alpha$, donc l'équation de l'ellipse rapportée à OX est
$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos(\omega - \alpha)}.$$

Soit a l'abscisse du point A; pour $\omega = 0$, on a $\rho = a$, ce qui détermine p $\quad p = a(1 - e\cos\alpha)$.

Ceci posé, la directrice correspondant au foyer F a pour équation
$$\rho = -\frac{p}{e\cos(\omega - \alpha)}$$
ou, en remplaçant p par sa valeur trouvée précédemment et repassant aux coordonnées cartésiennes,
$$e(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + a(1 - e\cos\alpha) = 0$$
ou
$$(x - a)\cos\alpha + y\sin\alpha + \frac{a}{e} = 0. \quad (1)$$

L'équation dérivée de cette équation sera
$$-(x - a)\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$$
$$\frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}. \quad (2)$$

Si nous éliminons α entre (1) et (2) nous aurons l'équation du lieu demandé. Pour cela, remarquons que l'équation (1) peut s'écrire
$$[(x - a)\cos\alpha + y\sin\alpha]^2 = \frac{a^2}{e^2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha).$$

Si dans cette équation, homogène en cos α et sin α, on remplace ces deux quantités par $x - a$ et y qui leur sont proportionnelles, on a pour équation du lieu

$$[(x-a)^2+y^2]^2=\frac{a^2}{e^2}[(x-a)^2+y^2]$$

et en supprimant la solution $(x-a)^2+y^2=0$ qui donne le point A, on trouve le cercle

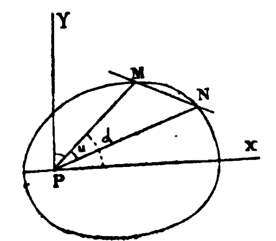
$$(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{e^2};$$

il a pour axe l'axe OX, ce qui était évident par raison de symétrie, et pour centre le point A. D'ailleurs, il coupe OX aux points $x = a \pm \frac{a}{e}$, ce qui achève de le déterminer.

Remarque. — Dans ce qui précède, aucune hypothèse n'a été faite sur la valeur de l'excentricité donnée e, donc il n'est pas nécessaire que la conique considérée soit une ellipse.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

M. Tissier a joint à la solution de la question 235 une note sur une propriété *très connue* des coniques. Sa démonstration étant originale, il nous a paru utile pour nos lecteurs de la donner à la suite de cette question. Cette propriété est la suivante :



L'enveloppe de la corde d'une conique vue du foyer sous un angle constant est une autre conique ayant même foyer et même directrice que la conique donnée.

Soit $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$ l'équation de la conique rapportée à son foyer comme pôle et à son axe focal comme axe polaire. Soit u l'angle donné, α l'amplitude de l'extrémité M de la corde MN et par suite $\alpha - u$ celle de l'extrémité N.

Formons l'équation de la corde MN.

Soit $\rho = \frac{c}{A\cos\omega + B\sin\omega}$ cette équation.

En exprimant qu'elle donne le même ρ que l'équation de

la conique pour $\omega = \alpha$ et $\omega = \alpha - u$, on a les deux relations $Ap \cos \alpha + Bp \sin \alpha = C(1 - e \cos \alpha)$

$$Ap \cos(\alpha - u) + Bp \sin(\alpha - u) = C[1 - e \cos(\alpha - u)]$$

Si nous y joignons l'équation précédente

$$A\rho \cos \omega + B\rho \sin \omega = C.$$

Nous aurons en éliminant A, B, C entre ces trois équations l'équation cartésienne de la corde MN

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p \cos \alpha & p \sin \alpha & 1 - e \cos \alpha \\ p \cos(\alpha - u) & p \sin(\alpha - u) & 1 - e \cos(\alpha - u) \end{vmatrix} = 0.$$

Si on multiplie les éléments de la dernière colonne par p, qu'on ajoute à ceux de la première multipliés par e, ce déterminant se simplifie et l'équation devient

$$\begin{vmatrix} x & y & p + ex \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 1 \\ \cos(\alpha - u) & \sin(\alpha - u) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ou en développant

$$x[\sin \alpha - \sin(\alpha - u)] + y[\cos(\alpha - u) - \cos \alpha]$$
$$+ (p + ex)[\sin(\alpha - u) \cos \alpha - \sin \alpha \cos(\alpha - u)] = 0$$

ou $2x \sin \frac{u}{2} \cos\left(\alpha - \frac{u}{2}\right) + 2y \sin \frac{u}{2} \sin\left(\alpha - \frac{u}{2}\right)$

$$- 2(p + ex) \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} = 0.$$

En posant $\alpha - \frac{u}{2} = \varphi$ et supprimant les facteurs communs, on a pour équation de la corde MN

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p + ex) \cos \frac{u}{2} = 0. \quad (1)$$

dont la dérivée par rapport à φ est

$$- x \sin \varphi + y \cos \varphi = 0, \text{ ou } \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Éliminons φ entre (1) et (2). Pour cela écrivons (1) sous la forme

$$(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 = (p + ex)^2 \cos^2 \frac{u}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

et remplaçons $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ respectivement par les quantités y et x qui leur sont proportionnelles, on a en supprimant la solution $x^2 + y^2 = 0$, l'équation

$$(x^2 + y^2) = (p + ex)^2 \cos^2 \frac{u}{2},$$

équation d'une conique ayant pour foyer l'origine des coordonnées, c'est-à-dire le foyer de la conique proposée et pour directrice la droite $p + ex = 0$ qui est précisément la directrice de la conique donnée.

QUESTION 243

Solution par M. **Comandré**, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis, classe de M. Piéron.

On donne une parabole $y^2 = 2px$, *rapportée aux axes ordinaires: autour de l'origine on fait tourner deux droites rectangulaires, rencontrant la parabole aux points* A *et* B, *et l'on construit une hyperbole* H *ayant pour asymptotes* OA *et* OB *et passant par un point* K *situé sur la bissectrice des axes. Trouver : 1° le lieu des pôles de* AB *par rapport à* H ; *2° le lieu* Σ *des points de rencontre de* AB *avec* H. *On cherchera les points de* Σ *qui se trouvent sur les droites* $x = 2p$ *et* $y = x$. *On discutera les différentes formes de la courbe suivant la position de* K *sur la droite* $y = x$.

L'équation de la parabole est

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Un système de deux droites rectangulaires passant par l'origine est

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 = 0; \qquad (2)$$

retranchant (1) de (2), on a

$$x = 0$$
$$x + 2\lambda y - 2p = 0.$$

La dernière équation représente la droite AB ; elle passe par le point fixe $y = 2p$. (Th. de Fraigier.)

Soit K ($x = a$, $y = a$) le point fixe, alors l'hyperbole sera

$$f(x, y) = x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2\lambda a^2 = 0.$$

1re PARTIE. — Soit (α, β) le pôle de AB, on aura

$$\frac{1}{f'_\alpha} = \frac{\alpha\lambda}{f'_\beta} = \frac{-2p}{f'_\gamma},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha + \lambda\beta} = \frac{\alpha\lambda}{\lambda\alpha - \beta} = \frac{p}{\lambda\alpha^2}.$$

Éliminant λ entre ces relations, on aura le lieu

$$\lambda = \frac{p\alpha}{a^2 - p\beta}$$

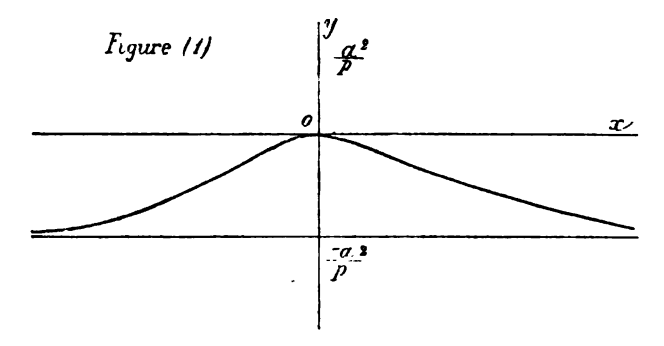
$$2\lambda^2 a^2 = p\lambda\alpha - p\beta;$$

donc
$$2\frac{p^2a^2\alpha^2}{(a^2 - p\beta)^2} = \frac{p^2\alpha^2}{a^2 - p\beta} - p\beta$$

ou
$$pa^2x^2 + px^2y + a^4y - 2a^2py^2 + p^2y^3 = 0,$$

d'où
$$x^2 = -\frac{y(py - a^2)^2}{p(py + a^2)}$$

courbe du 3e degré.



Discussion. — Cette courbe est symétrique par rapport à oy, elle passe à l'origine où elle a pour tangente l'axe ox.

Pour que x soit réel, il faut que y varie entre $-\frac{a^2}{p}$ et o.

Le point $x = 0$, $y = \frac{a^2}{p}$ est un point double isolé de la courbe; pour $y = -\frac{a^2}{p}$, x est infini et pour $y = 0$, $x = 0$.

Donc on a la courbe *fig. 1*.

2e Partie. — Pour avoir les points d'intersection de la droite AB avec l'hyperbole H, il suffit d'éliminer λ entre les équations

(H)
$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2\lambda a^2 = 0,$$

(AB)
$$x + 2\lambda y - 2p = 0.$$

On a
$$2\lambda = \frac{2p - x}{y}.$$

Done $$x^2 - y^2 + \frac{2p - x}{y}(xy - a^2) = 0$$
$$y(x^2 - y^2) + (2p - x)(xy - a^2) = 0$$
$$x = \frac{2pa^2 + y^3}{a^2 + 2py}$$
équation du 3e degré.

Discussion. — La droite $y = -\frac{a^2}{2p}$ est une asymptote de la courbe. x s'annule pour la valeur unique
$$y = -\sqrt[3]{2pa^2}.$$

La courbe a donc deux branches paraboliques asymptotes à la parabole $x = \frac{y^2}{2p} - \frac{a^2y}{4p} + \frac{a^4}{6p}$; on l'obtient en effectuant la division du numérateur de x par le dénominateur et supprimant les termes en $\frac{1}{y}$.

La droite $x = 2p$ rencontre la courbe en trois points dont les coordonnées sont
$$\overbrace{y = -2p \quad y = 0 \quad y = +2p}^{x = 2p}$$

Les deux points $x = 2p$, $y = \pm 2p$ sont les points d'intersection de la courbe avec la parabole donnée.

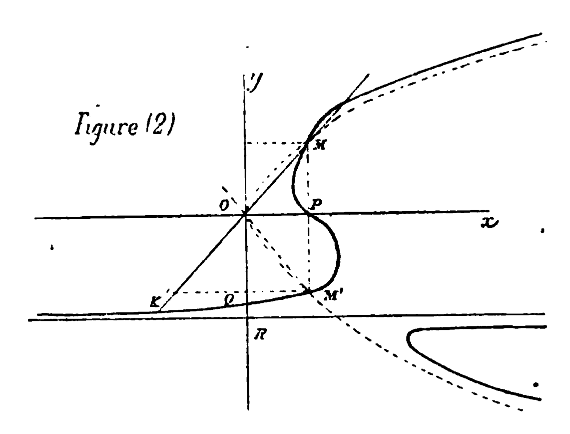
Si on coupe par $y = x$, on a
$$\begin{cases} \quad = 2p \\ x = 2p \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm a \\ x = \pm a \end{cases}$$

1° Supposons $a > 2p$, alors on a
$$a^2 > 4p^2$$
$$16p^4 < a^4$$
$$2pa^2 < \frac{a^6}{8p^3}$$
$$-2pa^2 > -\frac{a^6}{8p^3};$$
d'où enfin $$-\sqrt[3]{2pa^2} > -\frac{a^2}{2p};$$

donc on aura $-\sqrt{2pa^2} < -2p$ cos $a > 2p$

y	$-\infty$	$-\frac{a^2}{2p}$	$-\sqrt[3]{2pa^2}$	$-2p$	0	$2p + \infty$
x	$+\infty$	$+\infty$ $-\infty$	0	$+2p$ *max*	$+2p$ *min*	$2p + \infty$

Il y a un maximum pour x entre les deux valeurs de y, $-2p$ et 0 et un minimum de x entre 0 et $2p$. La courbe passant par le point K et par son symétrique par rapport à



l'origine, K', on a la forme donnée (*fig.* 2) $oP = 2p = PM = PM'$, $oQ = -\sqrt[3]{2pa^2}$, $oK = a$, $oK' = a$, $oR = -\dfrac{a^2}{2p}$

2° Supposons $a < 2p$, on a alors

$$-\sqrt[3]{2p\,a^2} > -2p \qquad -\frac{a^2}{2p} > -2p$$

$$-\sqrt[3]{2p\,a^2} < -\frac{a^2}{2p}.$$

Donc

y	$-\infty$	$-2p$	$-\sqrt[3]{2p\,a^2}$	$-\dfrac{a^2}{2p}$	0	$2p$	$+$
x	$-\infty$	$+2p-$	0	$-\infty$ / $+\infty$	$+2p$	$2p$	$+\infty$

Donc on aura la forme *fig.* 2 *bis*.

3° $a = 2p$. C'est le cas de transition entre les deux formes précédentes. Dans ce cas, la courbe se décompose entre une conique et une droite.

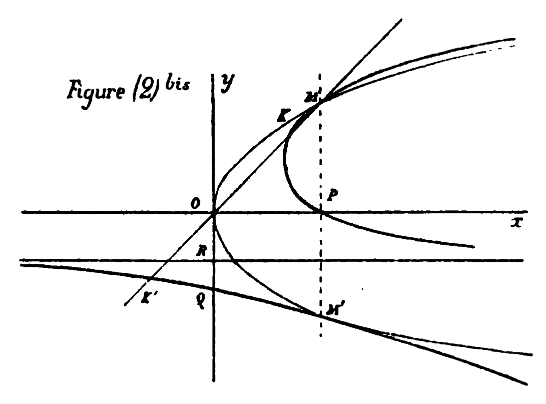
$$x = \frac{y^2 + 8p^3}{2p\,(y + 2p)}$$

ou bien $\qquad y + 2p = 0$

$$x = \frac{(y - 2p)^2}{2p},$$

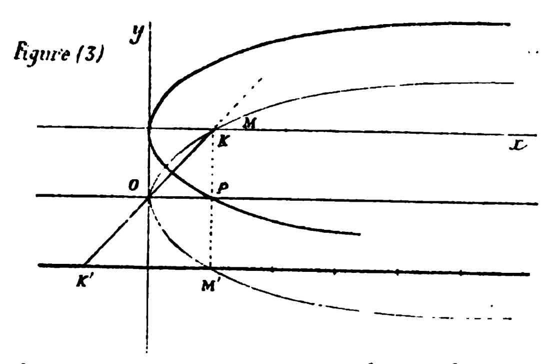
c'est-à-dire $\quad (y - 2p)^2 - 2px = 0.$

Ce qui est la parabole donnée que l'on aurait déplacée



dans le plan parallèlement à oy d'une longueur égale à $2p$.

On a alors la *fig.* 3.



Il est à remarquer que dans ce cas la courbe ne passe pas par le point K : car pour $y = x$ on a pour points d'intersection avec la parabole $\quad y^2 - 6py + 4p^2 = 0.$

Nota : Ont résolu la même question : MM. Coignard, au lycée Saint-Louis; Lestoquoy, à Saint-Quentin; Hugot, à Lyon; Leffuber, à Rennes; et *en partie seulement*, M. Escabeyrous, étudiant en mathématiques.

ÉCOLE CENTRALE

SECONDE SESSION DE 1880

Géométrie analytique.

Écrire l'équation générale des paraboles passant par deux points donnés A et B, et dont les diamètres ont une direction donnée.

— Donner l'expression des coordonnées du sommet et du foyer de chacune de ces paraboles.

— On mène à chaque parabole une tangente perpendiculaire à la droite AB; trouver le lieu des points de contact, et construire ce lieu.

Géométrie descriptive.

Par un point (ω, ω') situé dans le premier dièdre, à 100 millimètres de chacun des plans de projection, et au milieu de la feuille, on conduit une parallèle à la ligne de terre et une verticale.

La parallèle à la ligne de terre est l'axe d'un tore dont le cercle méridien, tangent à cet axe en (ω, ω'), a 45 millimètres de rayon.

La verticale est l'axe d'un autre tore concentrique au premier, dont le rayon du cercle méridien, égal à celui de son collier, vaut 30 millimètres.

On demande de construire les deux projections de l'intervention des surfaces ainsi définie.

Dans la mise à l'encre on représentera le corps constitué par l'ensemble des deux tores, et on indiquera les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection, avec la tangente en ce point.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

276. — Par un des sommets d'un triangle quelconque, mener une droite telle que la somme des projections des côtés du triangle aboutissant à ce sommet, sur cette droite, soit égale à une quantité donnée.

277. — Deux circonférences roulent sur une ligne droite AB; une troisième circonférence de même rayon que les deux autres leur est constamment tangente; pour quelle position des trois circonférences l'aire du pentagone ayant pour sommets les trois centres et les deux points de contact sera-t-elle maxima?

278. — Soient ABC, $\alpha\beta\gamma$ deux triangles homothétiques dont le centre d'homothétie est l'un quelconque des centres des cercles inscrits ou ex-inscrits au triangle ABC; soient αD, βE, γF des perpendiculaires respectives à Aα, Bβ, Cγ. Démontrer que les points de concours des droites AB et γF, CA et βE, CB et αD sont en ligne droite.

279. — On donne un demi-cercle ACB et une tangente AD à l'extrémité A du diamètre AB. On propose de mener par l'extrémité B une droite BCD, qui coupe la circonférence en C et la tangente en D, de telle sorte que, si l'on fait tourner la figure autour de AB, la surface du cercle engendré par AD soit égale à la zone engendrée par l'arc BC.

280. — On joint un point quelconque de l'axe radical de deux cercles aux points de contact d'une tangente commune; des points d'intersection de ces lignes prolongées avec une droite quelconque partant du centre de similitude, on mène des tangentes en A et B aux cercles; on demande : 1° de trouver le lieu de leur point de concours M; 2° de prouver que la droite AB passe par un point fixe.

281. — Résoudre le système d'équation

$$\frac{1}{ax-by-1}+\frac{1}{by-ax-1}=\frac{1}{ax-by-1}$$
$$bx+ay=m.$$

Mathématiques spéciales.

282. — Résoudre un triangle dont on donne un élément linéaire (côté, bissectrice, etc.), sachant en outre :

1° Que le rapport du carré de chacune des hauteurs au rectangle des segments qu'elle détermine sur la base correspondante est exprimé par un nombre entier;

2° Que le produit des trois hauteurs est un multiple du produit de trois segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés opposés. *(Geoffroy.)*

283. — Étant donnés une parabole P et deux points A et B de cette courbe situés sur une même corde principale (c'est-à-dire sur une même perpendiculaire à l'axe), on fait passer par les deux points A et B une hyperbole équilatère de forme

constante, c'est-à-dire dont l'axe est invariable en grandeur. On demande de trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes à la parabole fixe et à l'hyperbole variable, lorsque celle-ci change de position en passant toujours par les points fixes A et B.

AVIS

La rédaction n'a pas reçu de solution des questions suivantes :

132, 186, 218, 227, 228, 234, 235, 236, 246, 247, 254, 255, 256, 257, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 269.

Toutes les autres questions ont paru, ou paraîtront prochainement.

Quelques solutions sont parvenues sans nom, et ont dû par suite être écartées sans examen.

Nous rappelons aux lecteurs que toute solution doit remplir les conditions suivantes :

1° Chaque question doit être mise à part, avec son numéro bien en évidence, *et l'énoncé complet.*

2° Les figures doivent être faites à part et rattachées à la question correspondante ; elles doivent être faites avec soin.

3° Chaque question doit porter *en tête* le nom de celui qui l'a résolue et le nom de l'établissement auquel il appartient.

4° Nous engageons fortement les élèves à écrire très nettement, surtout les calculs algébriques, et à éviter toute abréviation non admise d'une manière absolument générale.

ERRATA

N° 11, page 510, ligne 11 : au lieu de A, A', A″, B, B', B″, lire : A, A', A″, BB'B″.

Lignes 12 et 13 : au lieu de $aa'a''$, $bb'b''$, lire : a, a', a'', b, b', b''.

Ligne 15 : au lieu de : $d = (a - \lambda A)\Delta$, lire : $a = (a - \lambda A)\Delta$.

$$A'A'' - B^2 = (a - \lambda A)\Delta.$$

Partout a au lieu de d.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 22984-0.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Géométrie analytique.

Géométrie descriptive.

Cosmographie.

Pages.

Trigonométrie.

Mélanges.

Bibliographie.

Questions proposées.

Concours pour les Écoles.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS